



## Razonamiento covariacional por universitarios al usar SimCalc Mathworlds

Verónica Vargas-Alejo

Departamento de Matemáticas, Matemáticas, Universidad de Guadalajara  
México

[veronica.vargas@academicos.udg.mx](mailto:veronica.vargas@academicos.udg.mx)

Carlos Enrique Flores-Gasca

Departamento de Ingeniería, Matemáticas, Universidad Aeronáutica en Querétaro  
México

[carlos.flores@unaq.mx](mailto:carlos.flores@unaq.mx)

### Resumen

En el presente reporte de investigación se exponen los resultados de una investigación relacionada con los niveles de razonamiento covariacional que exhiben estudiantes universitarios al describir una situación donde subyace la función escalonada con apoyo de SimCalc MathWorlds. La actividad se implementó en un ambiente online, mediante el uso de la plataforma Zoom. El marco teórico que se utilizó para analizar los resultados fue la teoría de razonamiento covariacional de Carlson. Los participantes en este estudio fueron 10 estudiantes de primer trimestre de nivel universitario. Como resultado se observó que dos equipos de estudiantes lograron exhibir el Nivel 3 de razonamiento covariacional y un equipo se quedó en el nivel 1.

*Palabras clave:* Educación Matemática; Razonamiento Covariacional; SimCalc MathWorlds; Educación universitaria; Cálculo Diferencial; Enseñanza virtual; México.

### Introducción

Varios investigadores (Vargas, Reyes y Cristóbal, 2016; Carlson, Jacobs, Coe, Larsen y Hsu, 2002; De Villiers, 1988; Kaput y Roschelle, 2013) han identificado que los estudiantes, de distintos niveles educativos, exhiben dificultades para interpretar funciones, algunas de ellas de carácter discreto o constante, asociadas a problemas cercanos a la vida real. Algunas de estas

dificultades pueden deberse a que están acostumbrados a resolver problemas asociados a funciones monótonas y continuas (Ärleback, 2017); así como, a la falta de propiciar el desarrollo de su pensamiento funcional, donde la covariación juega un papel importante (Kaput, 2008; Kaput y Roschelle, 2013). Entre los distintos tipos de funciones en su haber, podemos encontrar la función escalonada.

Investigadores como Vargas, Reyes y Cristóbal (2016), Vernaza y Tapia (2013) y De Villiers (1988) han realizado estudios sobre la enseñanza-aprendizaje del concepto función escalonada y sus conceptos asociados. Por ejemplo, De Villiers (1988) implementó una actividad de modelación de tarifas postales, una de sus conclusiones fue que los estudiantes, generalmente presentan dificultades para identificar, y representar algebraicamente, las variables que subyacen en situaciones problema que implican el uso de esta función. Vernaza y Tapia (2013), por su parte, realizaron un estudio sobre planes tarifarios de taxis; señalaron que los estudiantes suelen no darles significado a los puntos extremos de los intervalos de una función escalón, en sus distintas representaciones, lo que es fundamental para describir funciones de este tipo.

Estos investigadores sugieren que se diseñen más actividades y se investigue más sobre la temática con el objetivo de apoyar los procesos de enseñanza-aprendizaje de la función a trozos. En este sentido, en la presente investigación se propone una actividad basada en SimCalc MathWorlds para identificar y promover el razonamiento covariacional de estudiantes universitarios. Se busca responder la pregunta de investigación: ¿cuáles son los niveles de razonamiento covariacional que exhibe un grupo de estudiantes de primer trimestre universitario al involucrarlos en la resolución de una actividad, relacionada con la función escalonada, con apoyo de SimCalc MathWorlds?

## Desarrollo

### Marco teórico

Para que los estudiantes puedan desarrollar su conocimiento con respecto al concepto de función, deben desarrollar su razonamiento covariacional (Carlson et al., 2002). El razonamiento covariacional son aquellas “actividades cognitivas implicadas en la coordinación de dos cantidades que varían mientras que se atiende a las formas en que cada una de ellas cambia con respecto a la otra” (Carlson et al., 2002, p.124). Carlson et al. (2002) desarrolló un marco que describe cinco acciones mentales de los estudiantes (Tabla 1). Estas acciones están asociadas a cinco niveles de desarrollo del razonamiento covariacional (Tabla 2). De acuerdo con los investigadores, un estudiante ha obtenido un nivel, si sustenta las acciones mentales del nivel considerado y las asociadas a los niveles inferiores.

Tabla 1

*Acciones mentales del marco conceptual para la covariación*

Acción Mental (AM)	Descripción de la acción mental	Comportamientos
AM1	Coordinación del valor de una variable con los cambios en la otra	Designación de los ejes con indicaciones verbales de coordinación de las dos variables (e.g., $y$ cambia con cambios en $x$ ).

AM2	Coordinación de la dirección del cambio de una variable con los cambios en la otra variable.	Construcción de una línea recta creciente. Verbalización de la consciencia de la dirección del cambio del valor de salida mientras se consideran los cambios en el valor de entrada.
AM3	Coordinación de la cantidad de cambio de una variable con los cambios en la otra variable.	Localización de puntos/construcción de rectas secantes. Verbalización de la consciencia de la cantidad de cambio del valor de salida mientras se consideran los cambios en el valor de entrada.
AM4	Coordinación de la razón de cambio promedio de la función con los incrementos uniformes del cambio en la variable de entrada.	Construcción de rectas secantes contiguas para el dominio. Verbalización de la consciencia de la razón de cambio del valor de salida (con respecto al valor de entrada) mientras se consideran incrementos uniformes del valor de entrada.
AM5	Coordinación de la razón de cambio instantánea de la función con los cambios continuos en la variable independiente para todo el dominio de la función.	Construcción de una curva suave con indicaciones claras de los cambios de concavidad. Verbalización de la consciencia de los cambios instantáneos en la razón de cambio para todo el dominio de la función (los puntos de inflexión y la dirección de las concavidades son correctos).

Nota. Tabla extraída de Carlson et al. (2002, p. 357).

Tabla 2  
Marco conceptual para los niveles de la covariación

<b>Niveles de razonamiento covariacional</b>
<p>El marco conceptual para la covariación describe cinco niveles de desarrollo de las imágenes de la covariación. Estas imágenes de covariación se presentan en términos de las acciones mentales sustentadas por cada imagen.</p> <p><b>Nivel 1 (N1). Coordinación</b> En el nivel de coordinación, las imágenes de la covariación pueden sustentar a la acción mental de coordinar el cambio de una variable con cambios en la otra variable (AM1).</p> <p><b>Nivel 2 (N2). Dirección</b> En el nivel de dirección, las imágenes de la covariación pueden sustentar a las acciones mentales de coordinar la dirección del cambio de una de las variables con cambios en la otra. Las acciones mentales identificadas como AM1 y AM2 ambas son sustentadas por imágenes de N2.</p> <p><b>Nivel 3 (N3). Coordinación cuantitativa</b> En el nivel de la coordinación cuantitativa, las imágenes de la covariación pueden sustentar a las acciones mentales de coordinar la cantidad de cambio en una variable con cambios en la otra. Las acciones mentales identificadas como AM1, AM2 y AM3 son sustentadas por las imágenes de N3.</p> <p><b>Nivel 4 (N4). Razón Promedio</b> En el nivel de la razón promedio, las imágenes de covariación pueden sustentar a las acciones mentales de coordinar la razón de cambio promedio de una función con cambios uniformes en los valores de entrada de la variable. La razón de cambio promedio se puede descomponer para coordinar la cantidad de cambio de la variable resultante con los cambios en la variable de entrada. Las acciones mentales identificadas como AM1 hasta AM4 son sustentadas por imágenes de N4.</p> <p><b>Nivel 5 (N5). Razón Instantánea</b> En el nivel de la razón instantánea, las imágenes de covariación pueden sustentar a las acciones mentales de coordinar la razón de cambio instantánea de una función con cambios continuos en la variable de entrada. Este nivel incluye una consciencia de que la razón de cambio instantánea resulta de refinamientos más y más pequeños en la razón de cambio promedio. También incluye la consciencia de que el punto de inflexión es aquel en el que la razón de cambio pasa de ser creciente a decreciente o al contrario. Las acciones mentales identificadas como AM1 a AM5 son sustentadas por imágenes de N5.</p>

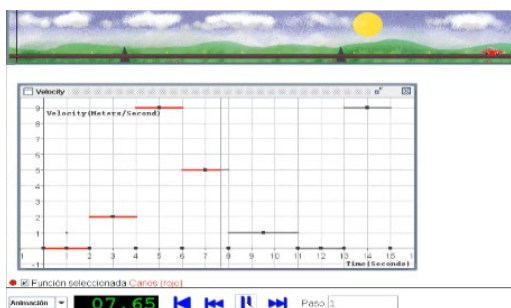
Nota. Tabla extraída de Carlson et al. (2002, p. 358).

## Metodología

La investigación fue de tipo cualitativa. Se utilizó análisis temático (Braun y Clarke, 2006) porque el interés era reportar los significados que emergieron relacionados con el razonamiento covariacional de los estudiantes: “el análisis temático puede ser un método esencialista o realista, que reporta experiencias, significados y la realidad de los participantes” (p. 81). Se utilizaron las seis fases descritas por Braun y Clarke (2006). Los temas que permitieron la descripción final de los resultados fueron las acciones mentales y los Niveles de razonamiento covariacional propuestos por Carlson et al. (2002). El profesor-investigador y un investigador analizaron por separado los datos y discutieron los hallazgos con base en estos temas.

La investigación realizó en el ambiente virtual Zoom, a raíz de la pandemia del COVID-19. Los participantes fueron 10 estudiantes, de 18 a 20 años de edad, del primer trimestre de nivel universitario. Fueron organizados en tres equipos (A, B y C). Cada equipo se integró con tres estudiantes, excepto el equipo C que fue conformado por cuatro estudiantes. El acomodo en equipo fue por afinidad para promover la interacción entre los estudiantes; esto porque el profesor a cargo del grupo señaló que se caracterizaban por una escasa participación en clases. Se conocían poco entre ellos debido a que pertenecían a una generación de nuevo ingreso en pandemia COVID-19.

La actividad se apoyó en simulaciones realizadas con el programa Carsz de SimCalc MathWorlds (Figura 1a), porque de manera dinámica los estudiantes podían observar cómo se movía un automóvil a partir de una función dada (escalonada); revisando así la covariación entre la velocidad y el tiempo. La primera tarea fue describir de manera verbal, en sesión grupal síncrona, el movimiento del automóvil a través de simulaciones. La segunda tarea se realizó en equipos y consistió en describir en forma escrita otra simulación dada en video. Para ello se entregó una hoja de trabajo que contenía preguntas explícitas (Figura 1b).



1. ¿Cuáles son las variables que te permiten describir el movimiento del automóvil en la gráfica?
2. ¿Cuál es la variable independiente y cuál es la variable dependiente?
3. Describe el comportamiento del automóvil. Haz uso de la gráfica que se observa en el video. Es decir, *describe* ¿Cómo varía la velocidad del automóvil con respecto al tiempo?
4. ¿Cómo varía la velocidad del automóvil durante el primer segundo?
5. ¿Cómo varía la velocidad del automóvil entre el segundo 2 al segundo 5?
6. ¿Cuánto cambia la velocidad entre el segundo 5 y el segundo 8?
7. ¿Cómo describiría en forma algebraica la velocidad del vehículo durante todo el recorrido que se observa en la simulación?

(a)

(b)

Figura 1. Simulación del Programa Carsz de SimCalc MathWorlds y Hoja de Trabajo.

Las fases fueron:

- a) Discusión grupal síncrona de dos simulaciones generadas por el profesor-investigador, quien fungió como guía de la reflexión grupal mediante preguntas.
- b) Trabajo en equipo para resolver la hoja de trabajo (Figura 1b) compuesta por preguntas que se respondían al analizar una video grabación de una simulación realizada con el programa Carsz de SimCalc MathWorlds. Cada estudiante tuvo acceso a esta videograbación a través de un archivo de Drive que pudo abrir en su propio equipo en casa.
- c) Cierre de la sesión.

La implementación de la actividad se llevó a cabo durante un periodo de 90 minutos. Se recopilaron datos de videos, reportes de los estudiantes y notas del profesor-investigador.

## Resultados

Los resultados se describen en dos etapas. En la primera se observa cómo los estudiantes exhibieron acciones mentales 1, 2 y 3. Los estudiantes describieron el movimiento del automóvil en términos de velocidad en función del tiempo. En la segunda etapa todos los estudiantes tuvieron la oportunidad de participar en sus equipos y proponer sus descripciones con base en el video. Se observó que el equipo 1 exhibió nivel 1 de razonamiento covariacional. En cambio, los equipos 2 y 3 exhibieron un nivel 3. En seguida, se describen en detalle los resultados.

### Etapa 1: Simulación de carzs de simcalc mathworlds

Durante la sesión grupal, el profesor-investigador solicitó a los estudiantes describir la simulación (Figura 1) y la gráfica, con el objetivo de identificar sus acciones mentales. Los estudiantes que participaron describieron cualitativamente el gráfico de la velocidad promedio contra el tiempo mediante el uso de conceptos distintos. Por ejemplo, un estudiante comentó:

$A_1$ : Es la velocidad con la que se mueve el automóvil conforme pasan los segundos (AM1).

El estudiante  $A_1$  coordinó el valor de la variable velocidad con los cambios en la velocidad contra el tiempo, lo cual corresponde a AM1. Mientras que,  $B_2$  dijo:

$B_2$ : En los primeros dos segundos, su velocidad es cero y no hay movimiento (AM1 y AM3).

El estudiante  $B_2$  no solo coordinó el valor de la variable velocidad con los cambios con respecto al tiempo (AM1), coordinó la dirección del cambio de la variable velocidad con los cambios en la variable tiempo (AM2) y coordinó la cantidad de cambio entre ambas variables (AM3) al señalar la velocidad del automóvil y su falta de movimiento durante un periodo.

### Etapa 2: Resolución de la hoja de trabajo por equipos

Posterior a la descripción de la simulación, se solicitó a los estudiantes que respondieran las preguntas de la hoja de trabajo (Figura 1b) mediante la simulación dada en video.

**Nivel de razonamiento del equipo A.** El equipo tuvo dificultades para contestar las tres primeras preguntas de la hoja de trabajo. Pero, en sus descripciones, para responder la pregunta tres (Figura 2), se denota la identificación y el uso de las variables velocidad y tiempo para describir el comportamiento del automóvil, no sin dificultades para hacerlo (AM1).

R: la velocidad por conforme al tiempo va disminuyendo poco a poco hasta llegar a un punto neutro donde ya no avanza por conforme va avanzando el tiempo aumenta aún más la velocidad con como aumenta el tiempo

Figura 2. Respuesta a la tercera pregunta de la hoja de trabajo por el equipo A.

El equipo afirmó que tenía que hacer uso de alguna fórmula para responder la pregunta siete y en su hoja de trabajo escribió  $V: T/A$   $v = T * A$ . Sin embargo, como puede observarse en la Figura 3, no utilizó esta expresión algebraica al escribir la función escalonada. En su lugar, se observa la relación  $f(x) = y$ . Quizás usaron “y” para representar que la velocidad era constante en algunos intervalos, ya que enseguida señalaron que  $f(x)$  tomaba varios valores constantes. Podemos decir que el equipo A exhibió N1.

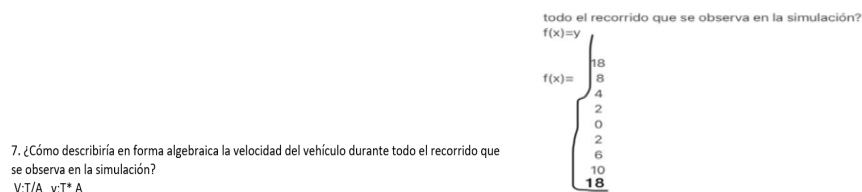


Figura 3. Respuesta a la séptima pregunta de la hoja de trabajo por el equipo A.

**Nivel de razonamiento del equipo B.** Este equipo, al responder las preguntas de su hoja de trabajo, identificó y escribió las variables involucradas (Figura 4) en la situación (AM1). Describió de forma cualitativa el movimiento del vehículo, aunque en lugar de señalar las velocidades constantes por intervalos de tiempo, señaló que la velocidad del automóvil iba disminuyendo y aumentando.

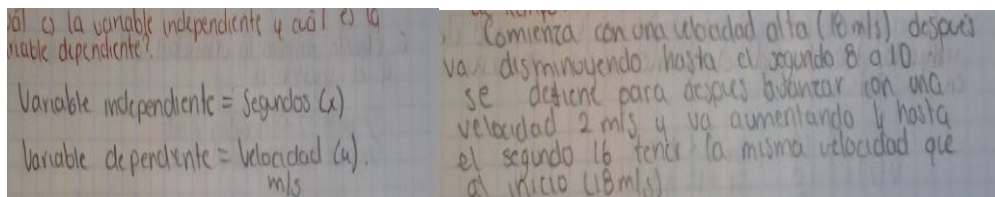


Figura 4. Respuesta a la segunda y tercera pregunta de la hoja de trabajo por el equipo B.

El equipo B construyó una función escalonada para describir el comportamiento del vehículo (AM2 y AM3). Podemos decir que el equipo B exhibió N3, no obstante, tuvo dificultades para escribir la función y usar la notación convencional, pues en lugar de escribir los valores que la velocidad ( $v$ ) tomaba respecto al tiempo ( $x$ ) ordenó de manera descendente los valores que tomaba  $v(x)$  independientemente del valor de  $x$  (Figura 5).

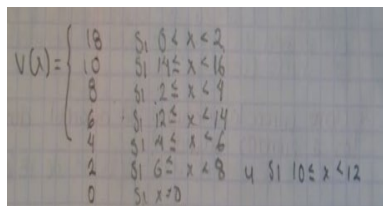
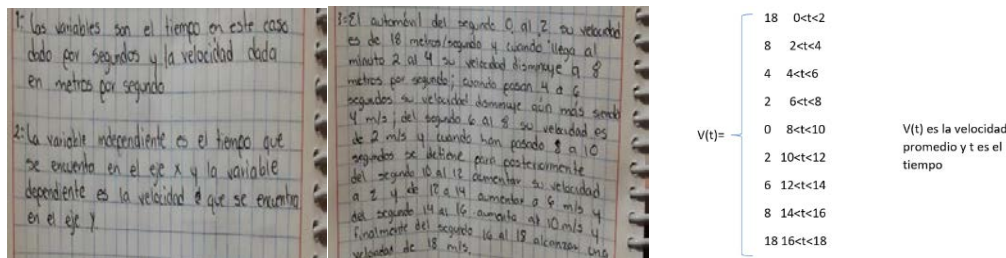


Figura 5. Respuesta a la séptima pregunta de la hoja de trabajo por el equipo B.

**Nivel de razonamiento del equipo C.** El equipo identificó las variables inmersas en la simulación (Figura 6a), velocidad y tiempo; así como las unidades de medida de cada una: metros por segundo y segundos (AM1). Describió de manera adecuada y en forma cualitativa el comportamiento de la función escalonada asociada al movimiento del vehículo (AM2 y AM3). El equipo C logró escribir la función escalonada algebraicamente (Figura 6b). Podemos decir que el equipo C exhibió N3.



(a) (b)

Figura 6. Respuestas a las tres primeras preguntas y a la séptima pregunta de la hoja de trabajo por el equipo C.

En resumen, los resultados son los siguientes (Tabla 3).

Tabla 3

Acciones Mentales y Niveles de Razonamiento Covariacional de los Equipos A, B y C

Equipos	AM 1	AM 2	AM 3	Niveles de Razonamiento Covariacional
A	✓			N1
B, C	✓	✓	✓	N3

### Cierre de la sesión

Los equipos presentaron al final de la sesión sus respuestas. El profesor-investigador retomó las participaciones y promovió reflexión sobre ellas, mediante una discusión grupal. El énfasis se puso en la función escalonada y algunos de los conceptos matemáticos relacionados.

En esta discusión, se observó que aun cuando los equipos tuvieron dificultades para escribir la función escalonada en su forma algebraica, gracias a la simulación los estudiantes pudieron describir de manera general y verbal el comportamiento del automóvil a partir de la simulación. Los equipos comentaron al profesor-investigador que describir el comportamiento del vehículo no fue sencillo porque no estaban acostumbrados a resolver problemas en contexto

que implicaran el uso de funciones escalonadas, pero que les gustó. Esto último coincide con lo encontrado por Kaput y Roschelle (2013) respecto a que algunas dificultades de los estudiantes pueden deberse a que en la escuela no se promueve la resolución de tareas o problemas relacionados con funciones definidas a trozos y, además, posiblemente cuando se hace, se utilizan ambientes estáticos de lápiz y papel.

## Conclusiones

Respecto a la pregunta de investigación planteada en este reporte, podemos concluir lo siguiente. Las respuestas denotaron que el equipo A tuvo dificultades para identificar las variables involucradas y describir el movimiento del vehículo, lo cual nos condujo a clasificarlos como de Nivel 1 de razonamiento covariacional (AM1). Por otra parte, se observó que los estudiantes de los equipos B y C exhibieron Nivel 3, pues identificaron las variables requeridas para describir el movimiento del vehículo (AM1) y las relacionaron de manera cualitativa y cuantitativa para explicar el comportamiento, mediante una función escalonada (AM1 y AM2). Concluimos al igual que investigadores señalados en este documento, que aún en el nivel universitario los estudiantes exhiben bajos niveles de razonamiento covariacional. Quizás se deba a la escasez de experiencias en el aula donde se razone sobre el comportamiento de eventos dinámicos.

## Referencias y bibliografía

- Ärlebäck, J., B. (2017). *Using a Models and Modeling Perspective (MMP) to frame and combine research, practice- and teachers' professional development* [Sesión de Conferencia]. Décimo Congreso de la Sociedad Europea para Investigación en Educación Matemática (CERMA10). Universidad de Dublín, Irlanda. <http://liu.diva-portal.org/smash/record.jsf?pid=diva2%3A1244966&dswid=-6299>
- Braun, V., y Clarke, V. (2006). Using thematic analysis in psychology. *Qualitative Research in Psychology*, 3(2), 77-10. <http://dx.doi.org/10.1191/1478088706qp063oa>
- Carlson, Jacobs, S., Coe, E., Larsen, S., y Hsu, E. (2003). Razonamiento Covariacional Aplicado a la Modelación de Eventos Dinámicos: Un Marco Conceptual y un Estudio. *EMA*, 8(2), 121-156.
- De Villiers, M. D. (1988). Modelling with Step-Functions. *Mathematics in School*, 17(5), 8-10.
- Kaput, J. J. (2008). What is Algebra? What is Algebraic Reasoning? En J. J. Kaput, D. W. Carraher, M. Blanton (Eds.), *Algebra in the Early Grades* (pp. 5-18). Routhledge.
- Kaput, J. J., y Roschelle, J. (2013). The mathematics of change and variation from a millennial perspective: New content, new context. En S. J. Hegedus, y J. Roschelle (Eds.), *The SimCalc Vision and Contributions* (pp. 13–26). Dordrecht: Springer.
- Vargas, V., Reyes A. V. & Cristóbal, C. (2016). Ciclos de entendimiento de los conceptos de función y variación. *Educación Matemática*, 28(2), 59-84.
- Vernaza, A. J., y Tapia, A. K. (2013). *Una Propuesta de Enseñanza de la Función por Tramos Usando el Periódico y GeoGebra* [Tesis de Maestría no publicada]. Instituto de Educación y Pedagogía, Universidad del Valle.