

# XVI CIAEM



Conferencia Interamericana de Educación Matemática  
Conferência Interamericana de Educação Matemática  
Inter-American Conference of Mathematics Education



Lima - Perú  
30 julio - 4 agosto 2023



[xvi.ciaem-iacme.org](http://xvi.ciaem-iacme.org)

## **Razonamiento Geométrico 3D: Una revisión sistemática de la literatura en relación a aspectos semióticos, instrumentales y discursivos abordados desde la investigación**

Fabiola **Arévalo-Meneses**

Pontificia Universidad Católica de Valparaíso  
Chile

[Fabiola.arevalo@pucv.cl](mailto:Fabiola.arevalo@pucv.cl)

Elizabeth **Montoya-Delgadillo**

Pontificia Universidad Católica de Valparaíso  
Chile

[Elizabeth.montoya@pucv.cl](mailto:Elizabeth.montoya@pucv.cl)

### **Resumen**

El estudio de geometría 3D ha adquirido mayor protagonismo en los recientes programas ministeriales de educación matemática en Chile, en donde se declara la importancia de utilización de softwares de geometría dinámica. Ahora bien, el tránsito desde la geometría 2D a la 3D, no es trivial. Para poder abordar esta temática se realiza una revisión bibliográfica sistemática de literatura en la base bibliográfica Scopus de acuerdo a elementos epistemológicos, cuyos resultados destacan la presencia y relevancia que se ha dado desde la investigación a abordar aspectos semióticos e instrumentales, mientras que son pocos los artículos que hacen referencia a aspectos discursivos en torno al razonamiento geométrico 3D.

*Palabras clave:* Educación Matemática; Geometría 3D; Razonamiento geométrico 3D; Visualización de objetos 3D; Software de Geometría Dinámica; Habilidades espaciales.

### **Introducción**

El estudio de la geometría 3D es uno de los ejes temáticos de estudio en matemática que no había sido considerado con mayor énfasis en las propuestas ministeriales de educación hasta la reciente incorporación de uno de los programas de formación diferenciada para 3° y 4° año de enseñanza media, Geometría 3D (MINEDUC, 2020). Orientado a la resolución de problemas y a

la modelación de situaciones en que intervienen la forma, el tamaño y la posición, el programa se presenta como una contribución al pensamiento espacial, en donde se relacionan situaciones y problemas en el espacio 3D que permiten utilizar conocimientos de la geometría 2D para la resolución de problemas en el espacio tridimensional (p. 21). No obstante, el estudio de la geometría 3D nos sitúa en un contexto en que se debe avanzar desde la geometría euclidiana bidimensional, generalmente estudiada en los años de la educación escolar, a una geometría euclidiana tridimensional, en donde no es fácil dibujar figuras 3D ni imaginar objetos en el espacio (Ferrarello et al., 2018).

De esta manera, la observación y visualización de objetos y de cambios en el espacio se vuelve fundamental si consideramos que la percepción antecede a la comprensión del objeto matemático (Dana-Picard, 2006). Se recomienda así, el uso de softwares de geometría dinámica dado que facilitan los procesos de visualización (de Sousa et al., 2021), siendo una herramienta útil para comprobar y refutar conjeturas.

Dados estos antecedentes surge la necesidad de realizar una revisión sistemática de la literatura desde una perspectiva epistemológica, con el fin de dar respuesta a la siguiente pregunta de investigación: ¿Cuáles son los aspectos epistemológicos abordados desde la investigación en relación al estudio de geometría 3D?

### **Marco Teórico**

De acuerdo al objetivo de esta revisión sistemática, se consideró el Espacio de Trabajo Matemático (ETM), que considera una dimensión epistemológica que se ve articulada con una dimensión cognitiva en el trabajo matemático de un individuo (Kuzniak et al., 2016, 2022; Kuzniak y Richard, 2014). En esta articulación es posible identificar la presencia de aspectos semióticos, aspectos instrumentales y aspectos discursivos.

#### **Aspectos Semióticos**

Se pone énfasis en los signos, objetos que pueden, o no, ser concretos y tangibles (*Representamen*), los que se organizan en registros de representación semiótica (Duval, 1993). Estos signos son decodificados e interpretados por un individuo, proceso mediante el cual les otorga un significado.

#### **Aspectos Instrumentales**

Para poder comprender lo que entendemos como *aspectos instrumentales* debemos conocer la idea de *artefacto*. La noción de *artefacto* es considerada por Rabardel (1995) como todo lo que ha sufrido una transformación de origen humano, dentro de los que se distinguen; *artefactos simbólicos*, tales como los algoritmos, *artefactos materiales* como ábaco, tablas logarítmicas, regla y compás y, por último, *artefactos digitales* como software geométricos y calculadoras. Estos artefactos que se encuentran en una dimensión epistemológico se hacen operativos al ser utilizados para llevar a cabo una actividad matemática, es así como se transforman en *instrumentos*. Rabardel (1995) considera que un *instrumento* posee dos componentes; un artefacto material o simbólico y esquemas de uso determinados. En esta misma mirada, los

artefactos se transforman en herramientas para un sujeto cuando este tiene asociados esquemas para su utilización (Gómez-Chacón et al., 2016; Kuzniak et al., 2016).

## **Aspectos Discursivos**

Se presenta un sistema de referencia teórico en que encontramos definiciones, propiedades y teoremas (*Referencial teórico*), que va más allá de una mera colección de propiedades matemáticas, pues es la base del discurso matemático propio de un matemático que prueba o demuestra. Estas propiedades, teoremas y definiciones que se organizan en el referencial teórico son empleadas en el proceso discursivo para la validación y el razonamiento matemático (Kuzniak et al., 2016, 2022; Kuzniak y Richard, 2014).

## **Metodología**

Se realizó una búsqueda sistemática narrativa (Rocco y Plakhotnik, 2009) de la literatura desde la base de datos Scopus, de acuerdo a lo propuesto por Gaona (2022). La búsqueda se realizó en el mes de abril del año 2022, en la cual se consideraron artículos de revistas en idioma español, portugués, inglés, francés e italiano. La búsqueda se estructuró de acuerdo a: *Criterios de búsqueda*, *Criterios de selección* y *Criterios de análisis*.

## **Criterios de búsqueda**

En un primer momento se definieron como criterios de búsqueda las palabras y conceptos claves en relación a nuestro tema de interés:

Para el término “geometría” se utilizó la palabra “geometry” y “figure” separadas por “or”;

Para el término “3D” las palabras separadas por “or”: “three-dimensional”, “spatial”, “3D” y “3-D”.

Para considerar solo artículos de revistas que están indexadas en educación, mediante el conectivo “and” se agregó el código de área educación “3304”.

La búsqueda arrojó como resultado 411 artículos, de los cuales luego se descartó a aquellas áreas que pese a reunir todos los términos considerados, se encuentran en otras áreas de conocimiento como, medicina, arqueología, química, biotecnología, y que no hacían referencia a educación matemática. Tras este filtro los resultados de la búsqueda se redujo a 270 artículos. Estos artículos fueron considerados para la etapa de selección.

## **Criterios de selección**

De los 270 artículos se seleccionaron aquellos que poseen mayor cantidad de citas (30 o más citas) junto con los más nuevos (publicados dentro de los últimos 5 años). De este modo, se obtienen 65 artículos, de los cuales, se descartaron aquellos que no son pertinentes dado el tema de interés, quedando finalmente 43 artículos, 41 en idioma inglés y 2 en idioma español.

## Criterios de análisis

Los 43 artículos seleccionados fueron analizados de acuerdo a los *aspectos semióticos, instrumentales y discursivos* que consideran (de acuerdo a las definiciones antes mencionadas). Si alguno de los artículos presenta aspectos que están fuera de la dimensión epistemológica, se agregará una categoría adicional que se denominará *aspectos emergentes*.

## Resultados

Dada la revisión de los artículos se observó que las tareas que proponen a los sujetos de investigación la mayoría presentan *aspectos semióticos* (41 de 43 artículos), los dos artículos que no los consideran corresponden a la categoría *aspectos emergentes*.

Por otra parte, de estos 41 artículos que presentan *aspectos semióticos* la mayoría contienen a la vez *aspectos instrumentales*. Pero además, se observa que es muy difícil identificar en estos cuál de los dos *aspectos* es más preponderante, de esta manera podemos decir que los artículos presentan *aspectos semióticos e instrumentales* (34 de 41 artículos). Además es importante destacar que no se encontraron artículos que solo consideren *aspectos instrumentales*, de alguna manera podemos decir que los artículos que consideran *aspectos instrumentales* se manifiestan de forma inherente a *aspectos semióticos*. Esto puede estar dado por la naturaleza de los objetos matemáticos involucrados, que se diferencian por ejemplo de objetos del álgebra en donde se presentan generalmente una preponderancia a la utilización de instrumentos. En los 34 artículos encontramos principalmente artefactos digitales, en particular softwares de geometría dinámica como GeoGebra y realidad aumentada (AR), y en menor cantidad se encuentra la utilización de artefactos materiales para realizar construcciones geométrica, como lo es la utilización de bolígrafos de impresión 3D.

Los Siete artículos restantes contienen solo *aspectos semióticos*, dichos artículos utilizan test que pueden ser respondidos a través de procesos de visualización, los que se caracterizan por presentar imágenes 2D de objetos 3D. Tal es el caso de una investigación que describe y analiza la estructura del pensamiento geométrico 3D, concluyendo que las habilidades espaciales de los estudiantes son un fuerte predictor de los tipos de razonamiento geométrico 3D.

No se encontraron artículos en que solo se muestren *aspectos discursivos*, aquellos que lo hacen (6 de 41 artículos), presentan además *aspectos semióticos e instrumentales*, a partir de los cuales se propicia la validación y el razonamiento matemático de acuerdo a los objetos matemáticos involucrados. Uno de estos estudios, manifiesta que los estudiantes que utilizaron GeoGebra 3D poseen habilidades de comunicación matemática más elevadas que aquellos estudiantes que no utilizaron ningún software de geometría dinámica.

De los dos artículos correspondientes a la categoría *aspectos emergentes*, uno de ellos considera un sistema interactivo multimodal para la exploración no visual (auditivo-háptica) de mapas virtuales, indicando que la retroalimentación auditivo 3D mejora el rendimiento con respecto a la retroalimentación 2D. El otro artículo hace referencia a la valoración y aceptación del uso de AR para mejorar las habilidades de pensamiento geométrico de los estudiantes.

*Nota:* Las citas referentes a los artículos encontrados en la revisión no están presentes en el escrito por falta de espacio.

## Conclusión

Se ha realizado una revisión sistemática de la literatura con foco en una dimensión epistemológica en relación al estudio de geometría 3D, la que arroja resultados interesantes. Se destaca la importante consideración de *aspectos semióticos e instrumentales* en investigación. Los procesos de visualización de signos así como los esquemas de usos asociados a distintas herramientas se presentan como relevantes en el estudio de geometría 3D y, de forma particular, en el tránsito desde la geometría 2D a la geometría 3D.

Ahora bien, se observa un vacío en cuanto a *aspectos discursivos* en los artículos analizados, sin embargo, los *aspectos discursivos* son fundamentales en el aprendizaje, pues es mediante el discurso que los estudiantes validan sus razonamientos al establecer conexión entre la actividad realizada y el referencial teórico. De esta manera, se presenta la posibilidad de abordar *aspectos discursivos* desde la investigación con el fin de poder aportar con conocimientos importantes a la comunidad científica, los que pueden ser orientadores para programas de formación inicial y continua de profesores, con el fin de fortalecer las habilidades espaciales y el razonamiento geométrico 3D.

## Referencias y bibliografía

- Dana-Picard, T. (2006). Plane transformations in a complex setting I: Homotheties-translations. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 37(6), 726–734. <https://doi.org/10.1080/00207390500064247>
- de Sousa, R. T., Alves, F. R. V., & de Azevedo, I. F. (2021). Categories of intuitive reasoning and GeoGebra 3D: An experience with Brazilian students. *LUMAT*, 9(1), 622–642. <https://doi.org/10.31129/LUMAT.9.1.1618>
- Duval, R. (1993). Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée. In *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives* (Vol. 5, pp. 37–65). [https://mathinfo.unistra.fr/fileadmin/upload/IREM/Publications/Annales\\_didactique/vol\\_05/adsc5\\_1993-003.pdf](https://mathinfo.unistra.fr/fileadmin/upload/IREM/Publications/Annales_didactique/vol_05/adsc5_1993-003.pdf)
- Ferrarello, D., Mammanna, M. F., & Pennisi, M. (2018). Magic of centroids. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 49(4), 628–641. <https://doi.org/10.1080/0020739X.2017.1418917>
- Gaona, J. (2022). Búsqueda bibliográfica sistemática en educación (matemática). SocArXiv Documentos. <https://doi.org/10.31235/osf.io/jszbh>
- Gómez-Chacón, I. M., Kuzniak, A., & Vivier, L. (2016). El rol del profesor desde la perspectiva de los Espacios de Trabajo Matemático The Teacher's role from the perspective of Mathematical Working Spaces. *Bolema, Rio Claro*, 30(54), 1–22. <http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v30n54a01>
- Kuzniak, A., Montoya-Delgado, E., & Richard, P. R. (2022). *Mathematical Work in Educational Context* (A. Kuzniak, E. Montoya-Delgado, & P. R. Richard, Eds.; Vol. 18). Springer International Publishing. <https://doi.org/10.1007/978-3-030-90850-8>

- Kuzniak, A., & Richard, P. R. (2014). Spaces for mathematical work: Viewpoints and perspectives. *Revista Latinoamericana de Investigación En Matemática Educativa*, 17(4(I)), 17–27. <https://doi.org/10.12802/relime.13.1741b>
- Kuzniak, A., Tanguay, D., & Elia, I. (2016). Mathematical Working Spaces in schooling: an introduction. *ZDM - Mathematics Education*, 48(6), 721–737. <https://doi.org/10.1007/s11858-016-0812-x>
- MINEDUC. (2020). *Programa de estudio Geometría en 3D 3º y 4º medio*. Ministerio de educación.
- Rabardel, P. (1995). Les hommes et les technologies; approche cognitive des instruments contemporains. In *Les hommes et les technologies; approche cognitive des instruments contemporains*. Armand Colin.
- Rocco, S. T. y Plakhotnik, S. M. (2009). Literature reviews, conceptual frameworks, and theoretical frameworks: Terms, functions, and distinctions. *Human Resource Development Review*, 8(1):120–130.