
# Razonamiento matemático de un profesor de secundaria en el contexto de la generalización de patrones cuadráticos

Karina **Nuñez-Gutierrez**
Facultad de Matemáticas, Universidad Autónoma de Guerrero
México
kgutierrez@uagro.mx
Guadalupe **Cabañas-Sánchez**
Facultad de Matemáticas, Universidad Autónoma de Guerrero
México
gcabanas@uagro.mx

**Resumen**

El objetivo de la investigación es caracterizar el razonamiento matemático basado en los argumentos emergentes de un profesor de matemáticas de secundaria en el contexto de la generalización de patrones cuadráticos figurales y numéricos. Nos sustentamos en una propuesta teórica-metodológica que articula el modelo argumentativo de Toulmin, para delimitar el razonamiento a partir de los argumentos del profesor. Los resultados evidencian que el razonamiento matemático del profesor en el contexto de la generalización de patrones cuadráticos se fundamenta en acciones como la descomposición figural y numérica, conteos estratégicos, reconocimiento del comportamiento del patrón figural, formulación, verificación y validación de conjeturas.

*Palabras clave*: Educación matemática; Educación secundaria; Enseñanza; Algebra; México.

## Introducción

El razonamiento es uno de los procesos cognitivos importante en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Desde el currículo escolar, es considerado como una habilidad o competencia que debe ser desarrollada en todos los niveles escolares y se vincula con actividades matemáticas como la exploración, conjeturación, argumentación y generalización (National Council of Teachers of Mathematics, [NCTM], 2000). Desde esta postura, el profesor de matemáticas es quien asume la responsabilidad sobre el desarrollo del razonamiento en sus estudiantes desde la argumentación (Rapanta, 2018). No obstante, los estudios enfocados en el profesor han reportado dificultades sobre el razonamiento matemático y cómo desarrollarlo en sus estudiantes (Clarke et al., 2012).

Uno de los ámbitos en los que se ha estudiado el razonamiento matemático consisten en el abductivo, inductivo y deductivo (Arce y Conejo, 2019; Conner et al., 2014; Soler-Álvarez y Manrique, 2014), que, en su mayoría, han evidenciado procesos cognitivos evidenciados por estudiantes de diferentes grados escolares y profesores de matemáticas en formación en el contexto de la aritmética o geometría. Sin embargo, no ha ocurrido lo mismo con el estudio de estas formas de razonamiento sobre el profesor de matemáticas en servicio.

Además, uno de los contextos que favorece el estudio del razonamiento es el de generalización porque promueve la formulación y justificación de de conjeturas a través del estudio de patrones matemáticos (Rivera, 2013; Mata-Pereira y Ponte, 2017). Si se espera que los estudiantes generalicen y justifiquen en distintos contextos matemáticos, entonces es importante comprender el razonamiento de los profesores quienes promueven el desarrollo de estas habilidades (Kirwan, 2015). En este sentido, el objetivo de la investigación consiste en caracterizar el razonamiento matemático a partir de los argumentos de un profesor de matemáticas de secundaria (PMS) en servicio al resolver tareas de generalización de patrones cuadráticos en el contexto figural y numérico.

## Marco conceptual

### Razonamiento Matemático

En esta investigación, se entiende como cualquier acción o procedimiento que permite obtener una nueva información (Saorin et al., 2019; Torregrosa et al., 2010). Se relaciona con otros procesos, como la inferencia, justificación y generalización (McCluskey et al., 2016).

### Argumentación y argumento

La argumentación es un proceso secuencial que permite inferir conclusiones desde unas premisas, por medio de la comunicación interactiva entre personas (Toulmin, 1958/2003). El razonamiento matemático, agrupa un conjunto de argumentos basado en una serie de proposiciones que implica una conclusión inferida de los datos (Toulmin, Rieke y Janik, 1984). El argumento es una estructura compleja de datos que involucra un movimiento que inicia con los datos (D) hasta establecer una conclusión (C). El movimiento de la evidencia a la conclusión es la certeza de que la línea argumentativa se ha realizado exitosamente, movimiento o conexión que es permitido por la garantía (G), que a su vez tiene un respaldo o soporte (S), un cualificador modal (Q) que indica el grado de fuerza o probabilidad de la aserción y ocasionalmente, pueden presentarse objeciones o refutaciones (R). Para el análisis del contenido de las argumentaciones se considera el Modelo de Toulmin (Inglis, Mejía-Ramos y Simpson, 2007) (ver Figura 1).

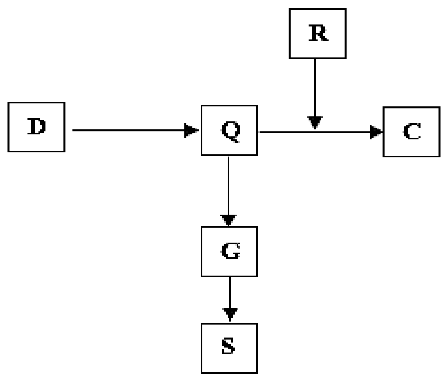



*Figura 1.* Modelo argumentativo de Toulim (Inglis, Mejía-Ramos y Simpson, 2007).

El estudio de los argumentos se fundamenta en el modelo básico de Toulmin (ver Figura 2) que refiere al núcleo del argumento. Esta estructura permite identificar la tipología de razonamiento matemático.

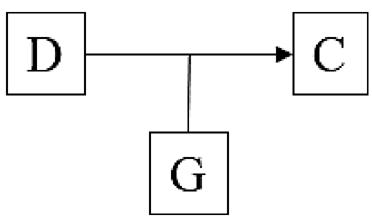


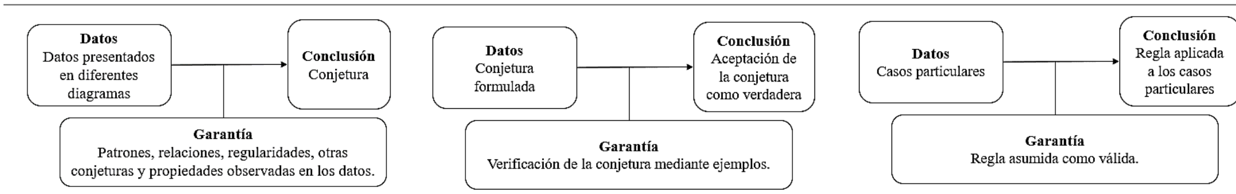

*Figura 2.* Modelo argumentativo básico de Toulmin.

## Tipos de Razonamiento

Se clasifica en tres tipos: abductivo, inductivo y deductivo. La *abducción* y la *inducción* representan un razonamiento plausible y experimental, apoyados en la formulación y verificación de conjeturas mientras que la *deducción*, consiste en la validación de la conjetura para garantizar su veracidad (Polya, 1966). Para la identificación y caracterización de los tipos de razonamiento matemático se adopta la propuesta teórica-metodológica de Soler-Álvarez y Manrique (2014) (ver Tabla 1).

Tabla 1
*Esquemas generales de los tipos de Razonamiento Matemáticos (Soler-Álvarez y Manríque, 2014)*

| Abductivo | Inductivo | Deductivo |
|---|---|---|



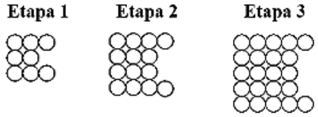
## Generalización

Consiste en el proceso de identificación de un comportamiento regular en algunos casos particulares de una sucesión, con el fin de extender esa regularidad reconocida y construir una expresión o regla general, que represente y relacione todos los términos de la sucesión (Radford, 2008).

## Metodología

Es un estudio de caso cualitativo (Merriam y Tisdell, 2015). Se desarrolló a través de un curso-taller (CT) en modalidad virtual. Participaron dieciséis profesores de matemáticas de secundaria (PMS) de tres países de Latinoamérica. Uno de los profesores fue seleccionado para el análisis de la unidad del estudio de caso. Su selección atendió los criterios siguientes: a) participación voluntaria en la investigación, b) resolver las tareas de generalización de patrones cuadrático y c) participar en una entrevista semiestructurada. Para objetivos de este artículo, el análisis lo centramos en dos de las tareas (ver Tabla 2).

Tabla 2
*Tarea de generalización de patrones cuadráticas*

| Tarea Figural (T1) | Tarea Numérica (T2) |
|---|---|
| En la construcción de un patio, se colocan piedras circulares de igual tamaño. Para observar el avance que sigue la construcción, se toma una foto al patio por etapa.<br>**Etapa 1** **Etapa 2** **Etapa 3**<br><br>a. ¿Cuántas piedras circulares se han colocado para la sexta etapa si en la construcción del patio se avanza de la misma manera? Justifica tu respuesta.<br>b. ¿Cuántas para la etapa 50? Justifica tu respuesta.<br>c. ¿Cómo se puede hallar la cantidad de piedras circulares para cualquier número de etapa? Argumenta tu respuesta. | Se tiene la sucesión de números:<br>**2** **6** ___ ___ **30** **42** ___ **72** **90** ___ ...<br>a. Determine los términos que hacen falta de la sucesión.<br>b. Encuentre el número que estará en la posición 145 de esta sucesión. |

## Resultados

Se identificaron tres formas del razonamiento matemático en el profesor al resolver las tareas de generalización de patrones cuadráticos. Los argumentos del PMS evidenciaron el *razonamiento abductivo* en el contexto figural y numérico, caracterizado por el estudio inicial de los casos particulares dados en las tareas hasta la formulación de una conjetura de forma numérica y/o algebraica, como regla plausible, que le permitió representar el comportamiento del patrón cuadrático (ver Tabla 3). Dentro del proceso abductivo, se destacaron acciones en las que el PMS transitó en la construcción de la conjetura como la visualización, el conteo, descomposición figural y numérica de los patrones. En el *razonamiento inductivo,* los argumentos del PMS se caracterizaron por la verificación de la conjetura en los casos conocidos en ambos contextos y el *razonamiento deductivo*, por la validación de la conjetura verificada en casos particulares conocidos y nuevos.

Tabla 3
*Conjeturas formuladas por el profesor*

| Tarea | Conjeturas |
|---|---|
| Figural | $a_n = 2(n+2) + n(n+1),$ |
| Numérica | $a_n = n(n+1),$ |

Por ejemplo, en el contexto numérico, el profesor explicó que enumeró las posiciones de los términos k-ésimo de la sucesión e inmediatamente con los términos k-ésimo conocidos, realizó *descomposiciones aritméticas* relacionando el término k-ésimo con el número de su posición (ver Figura 3).

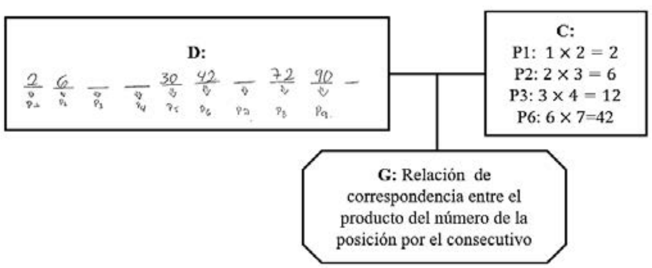



*Figura 3.* Argumento abductivo del profesor en la tarea numérica.

Esto le permitió establecer que “cada término de la sucesión representa el producto de esa posición con la siguiente” y realizar una conversión de la conjetura del sistema numérico al sistema algebraico. La conjetura formulada es de la forma $a_n = n(n+1)$, donde *n* es la posición del término k-ésimo de la sucesión numérica.

En el razonamiento inductivo, el profesor argumenta que la conjetura que formuló abductivamente era verdadera, a partir de la sustitución de la conjetura en etapas conocidas. Al reconocer la validez de su conjetura, concluye que la expresión matemática de la forma $a_n = n(n+1)$, representa el comportamiento de la sucesión numérica (ver Figura 4).

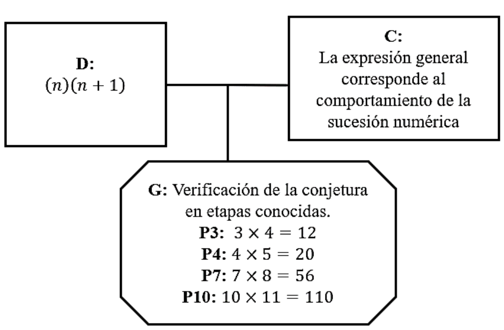



*Figura 4.* Argumento inductivo del profesor en la tarea numérica.

En el contexto figural, el razonamiento deductivo se caracterizó de la aplicación de la regla general (conjetura asumida como verdadera) en casos particulares conocidos y nuevos. El profesor usó deductivamente la regla general para etapas cercanas y lejanas para responder las cuestiones sobre la etapa 6 y 50. Se reconoce que el razonamiento deductivo de P1, se evidencia a través del uso de la regla general, por medio de sustituciones en la regla general $a_n = 2(n + 2) + (n(n + 1))$.

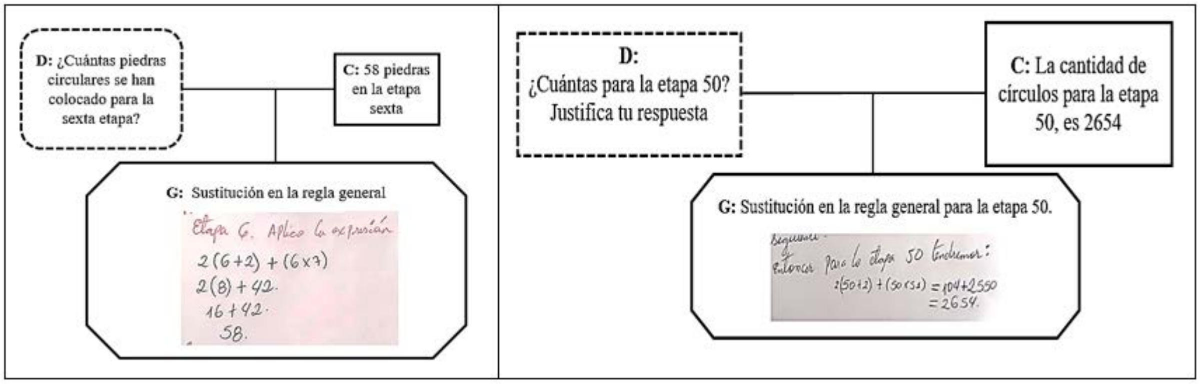



*Figura 5.* Argumentos deductivo del profesor en la tarea figural.

## Reflexiones

El razonamiento matemático que evidencia el PMS permite caracterizar el proceso del pensamiento regulado por acciones mentales y relacionarse con una tipología del razonamiento (abducción, inducción y deducción). El contexto de la generalización de patrones facilitó que el profesor evidenciará distintas acciones para resolver las tareas en el contexto figural y numérico, vinculados con las tres formas del razonamiento matemático. Metodológicamente, la tarea en el contexto figural y numérico facilitó la visualización en la percepción de las características del patrón y las relaciones entre los objetos matemáticos que lo conformaban. Además, favoreció diferentes formas de contar y estructurar los objetos del patrón, como manera útil para formular la conjetura (Rivera, 2013). Se reconoce que los patrones figurales al cumplir con las características de orden, equilibrio y armonía facilitan la construcción de una regla plausible y útil.

En general, se reconoce que la experiencia docente y el conocimiento profesional sobre las matemáticas, apoyados en los hechos, imágenes conceptuales y creencias (Lithner, 2006) del profesor, influyen en la elección de sus estrategias para formular, verificar y validar las conjeturas. Además, se evidenció que el profesor de matemáticas no hace su elección aleatoria de sus acciones, sino que se sustenta de sus conocimientos sobre el tema y los utiliza para responder a las demandas de la tarea, que, para su criterio, es el método más preciso y rápido.

## Referencias y bibliografía

Arce, M., & Conejo, L. (2019). Razonamientos y esquemas de prueba evidenciados por estudiantes para maestro: relaciones con el conocimiento matemático. *Investigación en Educación Matemática XXIII* (pp. 163-172). Valladolid: SEIEM.

Clarke, D. M., Clarke, D. J., & Sullivan, P. (2012). Reasoning in the Australian Curriculum: Understanding its meaning and using the relevant language. *Australian Primary Mathematics Classroom, 17*(3), 28–32.

Conner, A., Singletary, L., Smith, R., Wagner, P. A., & Francisco, R. T. (2014). Identifying Kinds of Reasoning in Collective Argumentation. *Mathematical Thinking and Learning, 16*(3), 181-200.

Inglis, M., Mejia-Ramos, J. P. & Simpson, A. (2007) Modelling mathematical argumentation: the importance of qualification. *Educational Studies in Mathematics,* 66, 3–21. https://doi.org/10.1007/s10649-006-9059-8

Kirwan, J. (2015). Preservice Secondary Mathematics Teachers Knowledge of Generalization and Justification on Geometric-Numerical Patterning Tasks. Springfield, Illinois: Theses and Dissertations. Paper 392.

McCluskey, C., Mulligan, J., & Mitchelmore, M. (2016). The Role of Reasoning in the Australian Curriculum: Mathematics. *Mathematics Education Research Group of Australasia*.

Mata-Pereira, J., & da Ponte, J. P. (2017). Enhancing students' mathematical reasoning in the classroom: teacher actions facilitating generalization and justification. *Educational Studies in Mathematics*, 96(2), 169-186.

Merriam, S. B., & Tisdell, E. J. (2015). *Qualitative research: A guide to design and implementation*. John Wiley & Sons.

National Council of Teachers of Mathematics [NCTM] (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston: National Council of Teachers of Mathematics.

Polya, G. (1966). *Matemática y razonamiento plausible.* Madrid: Technos-Madrid.

Radford, L. (2008). Iconicity and contraction: A semiotic investigation of forms of algebraic generalizations of patterns in different contexts. *ZDM Mathematics Education*, *40*(1), 83–96.

Rapanta, C. (2018). Teaching as Abductive Reasoning: The Role of Argumentation. *Informal Logic*, 38(2), 184-311.

Rivera, F. (2010). Visual templates in pattern generalization activity. *Educational Studies Mathematical*, *73*(3), 297–328.

Rivera, F. (2013). *Teaching and Learning Pattern in School Mathematics*. Springer.

Saorín, A., Torregrosa, G., & Quesada, H. (2019). Razonamiento configural y organización discursiva en procesos de prueba en contexto geométrico. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 22(2), 213-244.

Soler-Álvarez, M., & Manrique, V. (2014). El proceso de descubrimiento en la clase de matemáticas: los razonamientos abductivo, inductivo y deductivo. *Enseñanza de las ciencias*, *2*(32), 191-219.

Torregrosa, G., Quesada, H., & Penalva, M. C. (2010). Razonamiento configural como coordinación de procesos de visualización. *Enseñanza de las Ciencias*, 28(3), 327-340.

Toulmin, S. E. (1958). *The philosophy of science* (Vol. 14). Genesis Publishing Pvt Ltd.

Toulmin, S. E. (2003). The uses of argument. In *Cambridge University Press*.

Toulmin, S. E., Rieke, R. D., & Janik, A. (1984). *An introduction to reasoning*. New York London: Macmillan; Collier Macmillan Publishers