

XVI CIAEM



Conferencia Interamericana de Educación Matemática
Conferência Interamericana de Educação Matemática
Inter-American Conference of Mathematics Education



Lima - Perú
30 julio - 4 agosto 2023



xvi.ciaem-iacme.org

Recorrido histórico de la evolución del estudio de los intervalos de confianza en el currículo de Chile

Exequiel **Llanos** Lagos

Facultad de Educación, Universidad San Sebastián
Chile

exequiel.llanos@gmail.com

Jesús Guadalupe **Lugo-Armenta**

Departamento de Ciencias Exactas, Universidad de Los Lagos
Chile

jesus.lugo@ulagos.cl

Luis R. **Pino-Fan**

Departamento de Ciencias Exactas, Universidad de Los Lagos
Chile

luis.pino@ulagos.cl

Resumen

La siguiente comunicación tiene como propósito presentar los resultados de un estudio sobre el tratamiento del intervalo de confianza desde su incorporación al currículo de matemáticas de Chile. Para llevar a cabo esta investigación se han utilizado herramientas teórico-metodológicas del Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemáticos (EOS), como las nociones de práctica matemática y configuración ontosemiótica, para analizar cómo son presentados los intervalos de confianza y el tratamiento que se les ha dado en el currículo. Los resultados muestran que se carece de congruencia en el tratamiento de los intervalos de confianza desde su incorporación en el currículo hasta la actualidad, por ejemplo, en cómo ha sido definido; además, en el texto vigente se observa que se favorecen aspectos procedimentales, en lugar de una comprensión holística del intervalo de confianza y las nociones relacionadas con él.

Palabras claves: Educación matemática; Análisis de textos; Enfoque Ontosemiótico; Inferencia estadística; Intervalo de confianza; Significados.

Introducción

En las últimas décadas, la incorporación de la estadística en la educación ha sido fundamental dada la relevancia que esta disciplina ha cobrado en la vida laboral y cotidiana de un número cada vez mayor de personas. A principios del siglo XX, la estadística, se utilizaba en aplicaciones vinculadas a las ciencias y, posteriormente, se fue incorporando gradualmente en la enseñanza de los distintos niveles educativos. Perry (1900), citado en *International Handbook of Research in Statistics Education*, propuso un plan de estudio para que las escuelas británicas consideraran en el currículo la interpolación y errores probables. Los Estándares de currículo y evaluación para las matemáticas escolares (NCTM, 1989) delimitaron los contenidos y objetivos en los planes y programas de Estados Unidos. Del mismo modo, este fenómeno se observa en Chile, debido a que en el año 1992 se comienza a incorporar contenidos de estadística descriptiva y probabilidad en los niveles de 8° básico y 4° medio. Es así como el sistema educacional chileno se ha ido adecuando y ajustando a las necesidades de la sociedad, y esto se puede observar con la creciente incorporación de contenidos y habilidades que busca desarrollar en el eje temático de estadística y probabilidad.

Las nuevas tendencias y habilidades del siglo XXI buscan formar ciudadanos críticos, que puedan tomar decisiones y realizar predicciones. La inferencia estadística es uno de los tópicos que contribuyen al desarrollo de habilidades para tomar de decisiones y realizar predicciones fundamentadas. Quintana (1989), menciona que este tópico resuelve dos tipos de problemas, el primero, refiere a la estimación de una o varias características de la población, destacando que la estimación se separa en la del tipo puntual y otra por intervalos de confianza (IC); y el segundo, permite corroborar hipótesis acerca de características de la población. Asimismo, Wild, Utts y Horton (2018), indican que la naturaleza de la inferencia estadística es la extrapolación de datos para llegar a conclusiones sobre un todo, refiriéndose a una realidad más amplia. En la actualidad, se ha incorporado la estadística inferencial en los programas de estudios de educación media de diversos países (e.g., Chile, España y Australia).

En Chile, en el año 2009 se incorporó en los programas de estudios contenidos referidos a la inferencia estadística, como los intervalos de confianza (IC), siendo una noción clave para predecir características de la población mediante una muestra. La necesidad de incluir los IC en el currículo chileno se debe a su importancia y los usos que tienen en áreas donde se requieren estimaciones cuantitativas que permiten realizar inferencias con un mayor grado de certeza. A pesar de la gran utilidad de los IC, su estudio no ha estado exento de errores y dificultades tal como lo han reportado diversas investigaciones (e.g., Behar, 2001; Olivo, Ortiz y Batanero, 2008).

En lo que respecta al aprendizaje sobre los IC, las investigaciones han reportado que tanto estudiantes como profesores presentan dificultades para comprenderlos. Específicamente, Olivo, Ortiz y Batanero (2007), señalan que una de las complejidades del significado del IC es identificar si se está considerando como un concepto o como un procedimiento, así como dificultades respecto a las propiedades que están asociadas a la noción de estudio (variación del ancho del intervalo y el tamaño muestral) y a los procedimientos; por ejemplo, al escoger el tipo de distribución que debe asociarse a la construcción del intervalo.

Otros estudios han identificado que el principal error que cometen los estudiantes es confundir el estadístico con el parámetro (e.g., Behar, 2001; delMas, Garfield, Ooms y Chance, 2007; Olivo, Ortiz y Batanero, 2007), errores asociados a la interpretación del IC y, dificultades con el error asociado y la amplitud del intervalo (Flider y Cumming, 2005; Yáñez y Behar, 2009; Harradine et al., 2011; López-Martín, Batanero y Gea, 2019). López-Martín, Batanero y Gea (2009), detectaron que los futuros profesores conocen los errores que podrían cometer sus estudiantes en inferencia estadística, sin embargo, los profesores describen los posibles errores con poca precisión; esto puede deberse a que su conocimiento es todavía escaso respecto al tema.

En vista de lo mencionado anteriormente, se observa que al ser un eje que se ha incorporado en las últimas décadas en los currículos escolares, existen dificultades tanto para los estudiantes como para los profesores en formación en el estudio de los IC. Un instrumento que comparten tanto profesores como estudiantes que, a su vez, es el reflejo del conocimiento pretendido por los programas de estudios, son los libros de textos escolares. Es por ello, que nos preguntamos ¿cómo ha sido el tratamiento de los IC desde que se abordan por primera vez en el currículo chileno –programas de estudio y textos escolares– hasta los documentos que se encuentra vigentes actualmente?

Marco teórico

Para el desarrollo de esta investigación utilizamos herramientas del Enfoque Ontosemiótico (EOS) del Conocimiento y la Instrucción Matemáticos, debido a que nos permiten analizar los elementos primarios que intervienen en las prácticas matemáticas de los IC presentes en los programas de estudio y libros de textos escolares. Entendemos por práctica matemática “toda actuación o manifestación (lingüística o no) realizada por alguien para resolver problemas matemáticos, comunicar a otros la solución, validar la solución y generalizarla a otros contextos y problemas” (Godino y Batanero, 1994, p. 334). El análisis pormenorizado de la práctica matemática lo realizamos mediante la configuración ontosemiótica, la cual nos permite identificar los objetos matemáticos primarios –situaciones-problemas, conceptos/definiciones, proposiciones/propiedades, elementos lingüísticos, procedimientos y argumentos– que intervienen en dichas prácticas matemáticas.

Del mismo modo, el EOS proporciona herramientas para evidenciar los tipos de significados, los que provienen de prácticas que son de índole operativas y discursivas, de estas se distinguen las de carácter personal e institucional (e.g., Lugo-Armenta et al., 2021a; 2021b). Respecto a este último, Godino y Batanero (1994) definen como sistema de prácticas institucionales aquellas que emergen en un momento dado desde un campo de problemas, y Godino y Font (2007) declaran cuatro tipos, siendo éstos el implementado (es un proceso de estudio específico), evaluado (es un subsistema que se medirá), pretendido (referido al que se planifica) y el referencial (es utilizado como referente para elaborar uno pretendido).

Metodología

Esta investigación se realizará bajo un enfoque cualitativo; de acuerdo con Corbetta (2009), la “investigación cualitativa [esta] inspirada en el paradigma interpretativo, la relación que existe entre la teoría e investigación es abierta, interactiva” (p. 41).

Para llevar a cabo el estudio, fueron seleccionados los períodos en que se han realizado ajustes curriculares en los programas de estudios en Chile, principalmente los correspondientes a los años 1998-2009, 2009-2019 y del 2019 a la actualidad. Por lo tanto, se analizaron los libros de textos escolares que incorporan el tópico de Intervalos de Confianza, siendo un total de 5 textos que se han utilizado desde el año 2005 al 2022, en particular, se identifican y caracterizan los objetos matemáticos primarios que intervienen en el tratamiento de los IC.

Análisis epistémico

A continuación, por cuestiones de espacio, se presentan algunos de los resultados del análisis del tratamiento de los IC de los textos escolares desde el 2005 a la fecha. En la *Figura 1* se resumen las nociones que se encuentran relacionadas con el IC, a las cuales se hace alusión en la definición del IC presente en los textos escolares.

	Definición del IC	Estimador	Parámetro	Nivel de confianza	Error asociado	Coefficiente asociado al nivel de confianza	Amplitud del intervalo	Probabilidad asociada
Texto escolar, 4 ^{to} medio, 2005 – 2006.	✓	✓	✓		✓			
Texto escolar, 4 ^{to} medio, 2007 – 2010.	✓		✓	✓	✓	✓		✓
Texto escolar, 4 ^{to} medio, 2011 – 2012.	✓		✓	✓	✓	✓		✓
Texto escolar, 4 ^{to} medio, 2013 – 2019.	✓	✓		✓			✓	✓
Texto escolar, 3 ^{ro} – 4 ^{to} medio, 2020 a la actualidad.	✓			✓	✓		✓	✓

Figura 1. Nociones relacionadas con el IC que se encuentran presentes en su definición en los textos escolares desde el 2005 al 2022.

Es importante destacar que no existe congruencia en las nociones que debe presentar la definición, lo que más se resalta es el nivel de confianza y la probabilidad asociada. Sin embargo, en el texto actual (texto escolar de tercero y cuarto medio) no se define el estimador y el parámetro, siendo estos dos conceptos claves para interpretar e inferir información desde una muestra hacia una población de estudio.

Otro aspecto por destacar es que, desde el año 2005 al 2012, se utilizaba la noción de parámetro para referirse al nivel de confianza, en efecto, a partir de una probabilidad dada se relacionaba con un valor numérico fijo (constante k), lo que carece de que éste sea relacionado con una distribución de probabilidad.

En lo que respecta a la propiedad/proposición del IC, se aprecia que en diversos períodos de los textos escolares tenemos objetos matemáticos asociados, tales como, parámetro, rango,

intervalo, nivel de confianza y probabilidad. En los períodos 2005 – 2006 y 2013 –2019, se valoriza el grado de certidumbre asociado a una probabilidad de que se encuentre el valor del parámetro en el intervalo. Sin embargo, en los otros períodos no se integra el nivel de confianza y significancia. Otro aspecto observado es como es presentada la propiedad/proposición utilizada en los textos escolares (Figura 2).

Año del texto escolar	Escrituras utilizadas para representar un intervalo de confianza
2005 – 2006	$\bar{X} - z \frac{\sigma_M}{\sqrt{N}} \leq \mu \leq \bar{X} + z \frac{\sigma_M}{\sqrt{N}}$ $\left[\bar{X} - z \cdot \frac{\sigma_M}{\sqrt{N}} ; \bar{X} + z \cdot \frac{\sigma_M}{\sqrt{N}} \right]$
2007 – 2010	$\bar{x} \pm k \frac{s}{\sqrt{n}}$ $[\bar{x} - E, \bar{x} + E] \text{ siendo } E = k \frac{s}{\sqrt{n}} \text{ (error).}$
2011 – 2012	$\left[\bar{x} - k \cdot \frac{s}{\sqrt{n}} , \bar{x} + k \cdot \frac{s}{\sqrt{n}} \right]$
2013 – 2019	$\left[\bar{x} - z_{\left(\frac{\alpha}{2}\right)} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} ; \bar{x} + z_{\left(\frac{\alpha}{2}\right)} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right]$
2020 – a la actualidad	$\left(\bar{x} - z_{\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} ; \bar{x} + z_{\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right)$

Figura 2. Tratamiento en la propiedad/proposición del IC para estimar la media presente en los textos escolares.

En la Figura 2 podemos apreciar que existen distintos conceptos asociados en las propiedades/proposiciones del IC; por ejemplo, del año 2005 al 2019 se observa que para el coeficiente de confianza se utilizan las nomenclaturas de z , k , $z_{\left(\frac{\alpha}{2}\right)}$, y actualmente se evidencia como $z_{\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)}$. Las dos primeras son utilizadas por medio de valores dados que provienen de una tabla, y los últimos dos son asociados a la distribución normal y su tabla de probabilidades, en este último caso el estudiante tendría que asociar nociones como nivel de confianza, significancia, distribuciones de probabilidad y estadístico. Por otro lado, la desviación estándar difiere bastante y llevan a diversos significados que pueden emerger, confundiendo el representante con el representado; en particular se utilizan las nomenclaturas σ_M , s y σ , en orden correlativo se tienden a confundir con distribuciones muestrales, distribución muestral y distribución poblacional. Cada una de estas acepciones de la desviación estándar se pueden utilizar en los intervalos de confianza para la media, sin embargo, cuál de ellas se utiliza depende de que se cumpla con ciertas condiciones en el problema resolver.

Respecto al tratamiento que se le da al IC en el texto escolar vigente observamos que es de carácter procedimental, dejando de lado las interpretaciones que podrían realizarse a partir del intervalo de confianza formado, lo cual contrasta con el objetivo curricular que es inferir información (ver Figura 3).

1. Analiza la siguiente situación. Luego, realiza las actividades propuestas.

El dueño de una farmacia se encuentra interesado en saber si el refrigerador en que se conservan las vacunas ha mantenido la temperatura media de $5,5^{\circ}\text{C}$ durante los meses recientes. De no ser así, deberá comprar otro para no afectar la durabilidad y efectividad de las vacunas.



d. Analiza el siguiente ejemplo. Luego, determina los intervalos del 95% de confianza para las otras muestras.

Se han extraído cinco muestras aleatorias de distintos tamaños. Se sabe, además, que la desviación estándar de la temperatura del refrigerador es de $1,2^{\circ}\text{C}$:

	Muestra 1	Muestra 2	Muestra 3	Muestra 4	Muestra 5
Media de la Muestra ($^{\circ}\text{C}$)	6	5,8	4,5	5,4	6,5
Tamaño de la muestra (días)	30	45	50	55	60

Para la primera muestra los datos son:

- $1 - \alpha = 0,95$
- $\alpha = 0,05$
- $\frac{\alpha}{2} = 0,025$
- $Z_{0,975} = 1,96$
- $\bar{x} = 6^{\circ}\text{C}$
- $\sigma = 1,2^{\circ}\text{C}$
- $n = 30$

Reemplazando tenemos que:

$$\left(6 - 1,96 \cdot \frac{1,2}{\sqrt{30}}; 6 + 1,96 \cdot \frac{1,2}{\sqrt{30}} \right)$$

$$(6 - 0,43; 6 + 0,43)$$

Con un nivel de confianza del 95%, es posible afirmar que μ se encuentra en $(5,57; 6,43)$.

Figura 3. Ejemplo del libro de texto escolar de 3-4 medio, 2019.

La situación/problema presentado para introducir al IC en el texto vigente está enfocada al área de la salud y busca determinar si un refrigerador está apto para mantener una temperatura media para no afectar la durabilidad y efectividad de las vacunas. El procedimiento utilizado para encontrar el IC y posterior respuesta, dan cuenta que se utiliza más bien como una aplicación de una serie de pasos a seguir, debido a que en la respuesta no se propicia una inferencia contextualizada y articulada con un argumento estadístico.

Como podemos ver en la Figura 3, para verificar si se cumple la condición que desea observar el dueño de la farmacia se entregan 5 muestras y para cada una de ellas se solicita determinar un intervalo de confianza con un nivel de confianza del 95%. En la respuesta experta presentada en el libro del texto escolar se afirma que el valor de μ se encuentra en el intervalo encontrado, el cual, corresponde a $(5,57; 6,43)$ y, prosigue indicando que con un nivel de confianza del 95% el valor de μ se encuentra entre dichos valores, sin embargo, lo anterior no es congruente con el parámetro μ que es $5,5^{\circ}\text{C}$, debido a que no pertenece al intervalo determinado.

A continuación, en la Figura 4, presentamos de manera sucinta la configuración ontosemiótica observada en la práctica matemática que presenta el libro de texto para dar respuesta a la situación/problema previamente descrito:

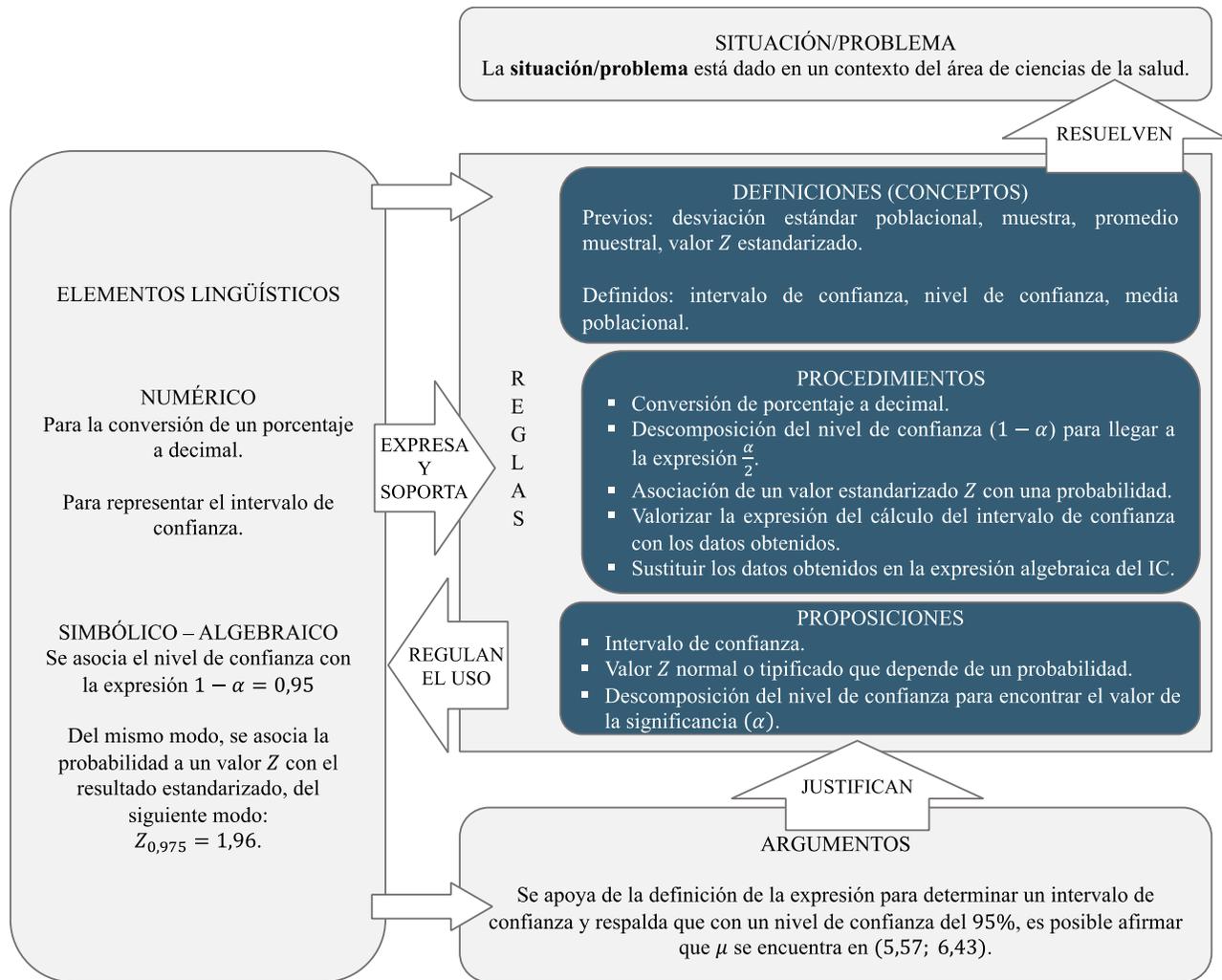


Figura 4. Configuración epistémica del ejemplo del libro de texto escolar de 3-4 medio, 2019.

En función a lo observado en la práctica matemática presentada en el libro de texto vigente, se generan las siguientes interrogantes: ¿qué sucede cuándo el valor a priori pretendido no se encuentra en el intervalo encontrado?, ¿cómo se debería interpretar?, y en un aspecto más general, ¿cuál es el grado de certidumbre e incertidumbre que genera un intervalo de confianza?

Conclusiones

En síntesis, se aprecia que desde la incorporación de los intervalos de confianza en los programas de estudios y textos escolares de Chile, los diferentes objetos matemáticos primarios involucrados en la configuración ontosemiótica han variado, por ejemplo, los elementos lingüísticos, conceptos/definiciones y propiedades/proposiciones utilizadas en el tratamiento de los intervalos de confianza. Aún se debe seguir ahondando en por qué las diferencias y su representatividad respecto de los significados de referencia de los IC.

Agradecimientos

Este trabajo ha sido desarrollado en el marco del Proyecto de Investigación Fondecyt Regular N°1200005, financiado por la Agencia Nacional de Investigación y Desarrollo (ANID) de Chile.

Referencias y bibliografía

- Behar, R. (2001), *Aportaciones para la mejora del proceso de enseñanza-aprendizaje de la estadística*, Tesis doctoral, Universidad Politécnica de Cataluña.
- Corbetta, P. (2009). *Metodología y técnicas de investigación social*. Madrid: McGraw-Hill.
- delMas, R.C., J.B. Garfield, A. Ooms y B.L. Chance (2007), “Assessing students’ conceptual understanding after a first course in statistics”, *Statistics Education Research Journal*, vol. 6, núm. 2, pp. 28-58, www.stat.auckland.ac.nz/serj.
- Godino, J. D., & Batanero, C. (1994). Significado institucional y personal de los objetos matemáticos. *Recherches en didactique des Mathématiques*, 14(3), 325-355.
- Godino, J. D., & Font, V. (2007). Algunos desarrollos de la teoría de los significados sistémicos. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 14(3), 325-355.
- López-Martín, M. D. M., Batanero, C., & Gea, M. M. (2019). ¿ Conocen los futuros profesores los errores de sus estudiantes en la inferencia estadística?. *Bolema: Boletim de Educação Matemática*, 33, 672-693.
- Lugo-Armenta, J. G., & Pino-Fan, L. (2021a). Niveles de razonamiento inferencial para el estadístico t-Student. *BOLEMA*, 35(71), 1776-1802. doi: <http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v35n71a25>
- Lugo-Armenta, J.G., & Pino-Fan, L. (2021b). Inferential reasoning of secondary school mathematics teachers on the Chi-square statistic. *Mathematics*, 9(19), 2416. <https://doi.org/10.3390/math9192416>
- MINEDUC. (2019). *Bases Curriculares Matemática III y IV de Educación Media*. Unidad de Currículum y Evaluación: Santiago, Chile.
- National Council of Teachers of Mathematics (NCTM). (1989). *Curriculum and evaluation standards for school Mathematics*. Reston, Va.: NCTM.
- Olivo, E., Batanero, C., & Díaz, C. (2008). Dificultades de comprensión del intervalo de confianza en estudiantes universitarios. *Educación matemática*, 20(3), 5-32.
- Olivo, E., Ortiz, J. J., & Batanero, C. (2007). Notas históricas sobre los intervalos de confianza e implicaciones didácticas. En X Simposio de la SEIEM (p. 105).
- Perry, J. (1900). The teaching of mathematics. *Nature*, 2, 317–320.
- Quintana Ruiz, C. (1989). *Elementos de inferencia estadística* (No. 519.54 Q7e). EUCR.
- Wild, C. J., Utts, J. M., & Horton, N. J. (2018). What is statistics?. In *International handbook of research in statistics education* (pp. 5-36). Springer, Cham.