Valor recíproco de tamaño relativo. Normas sociomatemáticas para la enseñanza de la fracción como medida

Ivette Anel **Delgado** Valdez
Universidad Pedagógica Nacional
México
ivette.delgado8@hotmail.com
Luis Manuel **Aguayo** Rendón
Universidad Pedagógica Nacional
México
Luisaguayo726@gmail.com
Orlando Daniel **Jiménez** Longoria
Benemérita Escuela Normal Manuel Ávila Camacho
México
orlandojimenez@benma.edu.mx

Resumen

En esta ponencia se presentan los los resultados de la aplicación de una Teoría de Enseñanza de un Dominio Específico (TEDE) que se enmarca de la Educación matemática Realista. En la TEDE las fracciones se consideran como una medida que explica la iteración de un tamaño de la subunidad y se reconoce el valor de la fracción unitaria independiente de la unidad de referencia. Específicamente se analizan las normas sociomatemáticas mediante las cuales el docente busca que los alumnos comprendan que, si $1/n$ se itera n veces se crea algo del mismo tamaño que un entero, también se reflexiona sobre la manera como los alumnos desarrollan simbolizaciones que les ayudarán a comprender la notación convencional de la fracción y su relación con el numerador/denominador. Los resultados muestran la factibilidad de la propuesta.

Palabras clave: educación matemática realista, tamaño relativo; iteración; fracción; medida.

Introducción

Durante más de 25 años en el currículum mexicano para la educación primaria se ha planteado la enseñanza de las fracciones muy ligada con la noción de número racional debido a la influencia del modelo de Kieren (1981), en este modelo los números fraccionarios se ven como un megaconcepto, es decir como un concepto que el alumno ha de construir mediante la articulación comprensiva y paulatina de los diferentes significados de la fracción (parte-todo, medida, razón, cociente y operador) y generalmente se privilegia el significado parte-todo para que los alumnos comiencen la construcción de la fracción. Iniciar con la construcción del significado parte-todo es conveniente porque se comprende sin gran dificultad, sin embargo posteriormente genera limitaciones para construir otras nociones porque obliga a los alumnos a percibir a la fracción como contenida en un entero, lo que dificulta en el futuro la comprensión de nociones como las fracciones impropias.

Por las razones anteriores entre otras, Freudenthal (1983) hace una crítica al modelo de Kieren y propone basar la enseñanza de las fracciones en la comparación que puede relacionarse con las ideas matemáticas de magnitud. Considerando la perspectiva de Freudenthal y siguiendo los principios de la Educación Matemática Realista, Cortina et al. (2008; 2013; 2014; 2021; 2017) diseñaron una propuesta de enseñanza para la enseñanza para las fracciones basada en la medida de longitud, dicha propuesta se se estructuró como Teoría de la Enseñanza de un Dominio Específico (TEDE) y se articuló metodológicamente con el Experimento de Diseño.

Desde la perspectiva teórica asumida, para desarrollar de manera efectiva la TEDE es necesario que el profesor establezca en el aula ciertas normas sociomatemáticas que buscan cumplir dos objetivos esenciales: que mediante la interacción los alumnos puedan reconocer las fracciones como números que permiten cuantificar y; que identifiquen que estos números (las fracciones) son independientes de la unidad de referencia, característica que permite que la fracción sea iterada para medir una longitud menor, igual o mayor la unidad de referencia. Con base en estas ideas la pregunta que guio el presente trabajo fue: ¿Cuáles son las normas sociomatemáticas que el profesor instaura en el aula para que los alumnos reconozcan a la fracción como producto de la iteración de una medida de longitud?

Educación Matemática Realista y normas sociomatemáticas

El desarrollo de investigaciones que buscaban un cambio de perspectiva comenzó con una idea desarrollada en el Instituto para el Desarrollo de la Educación Matemática (IOWO) en la Universidad estatal de Utrecht de Holanda (ahora Instituto Freudenthal) bajo la dirección de Hans Freudenthal. La idea principal de los primeros estudios giraba en torno a la necesidad de "reinventar las matemáticas" mediante la matematización del mundo real (Cobb et al., 2008) para que los alumnos se sintieran habituados a los problemas que se presentan en su vida diaria y les crean la necesidad de resolverlos. En palabras de Freudenthal "Los seres humanos no tienen que aprender matemáticas como sistema cerrado, sino como una actividad: el proceso de matematizar la realidad y, de ser posible incluso, el de matematizar las matemáticas" (Freudenthal, 1983, p.7).

En correspondencia con esta idea, la Educación Matemática Realista plantea que la enseñanza de la matemáticas no debe partir de una simbolización convencional, al "enseñar matemáticas puras y después mostrar cómo aplicarlas, me temo que no estamos en mejores condiciones. Creo que es justamente emplea el orden equivocado." (Freudenthal, 1968, p. 5), al contrario de esto se trataría de comprender la manera cómo los conceptos fueron creados, esto es cómo nacen a partir de un fenómeno.

Enseñar desde la matemática realista no significa desarrollar un proceso que va de lo simple a lo complejo sino reconocer las discontinuidades que tiene esta disciplina necesarias para empatarla con lo real, con una actividad humana, es decir de lo que se trata es de "matematizar", de modelizar matemáticamente determinadas porciones de la realidad. Desde esta perspectiva entonces, reconocer las matemáticas como una actividad humana es esencial para un nuevo y mejor método de enseñanza (Freudenthal, 1973). Entonces, desde la perspectiva de la EMR se considera que el aprendizaje matemático es una actividad necesaria para el alumno que deberá estar orientada por determinados principios como: principio de realidad; principio de niveles; principio de reinvención; principio de interactividad y; principio de interconexión.

Cada principio junto con la fenomenología didáctica permiten que el alumno haga matemática y se convierta en un matemático capaz de reinventar un concepto (reinventar porque dentro del juego de ser matemático él mismo crea un saber ya existente, es decir lo reinventa) (Cobb et al., 2008). La fenomenología didáctica es un concepto fundamental en la EMR puesto que permite analizar todos aquellos conceptos que organizan un fenómeno ya que la matemática nace de una realidad que ha sido organizada por un objeto matemático, cuando se reconoce dicho fenómeno podemos estructurar un experimento de enseñanza que permita a los alumnos realizar el mismo proceso que un matemático y esa realidad organizarla/reinventarla a través de la matematización.

Sin embargo, en el proceso de enseñar matemáticas se manifiestan las interacciones entre profesor-alumno que no son casuales sino que están regidas por "obligaciones" o normas no explícitas que cada uno debe cumplir. En las clases de matemáticas, las normas sociomatemáticas responden a una retórica matemática y regulan las argumentaciones influyendo en las oportunidades de aprendizaje, es decir, las normas sociales se convierten en normas sociomatemáticas porque hacen referencia a lo que es "matemáticamente aceptable" (Yackel y Cobb, 1996). Es decir, existe un proceso de negociación que establece nuestras obligaciones específicas (y recíprocas) dentro de un proceso didáctico que debieran originar un conocimiento, y un metaconocimiento, una norma sociomatemática busca que, cuando el alumno encuentre un fenómeno que organizar pueda ser consciente de las obligaciones que tiene para alcanzar un conocimiento y, a la par, reconozca las obligaciones que el docente tiene para lograr dicho objetivo.

Ahora bien, la puesta a prueba de un experimento de enseñanza que nace de una fenomenología, nos permite analizar la manera como los principios de la EMR y las normas sociomatemáticas matemáticas se combinan para crear cada una de las prácticas en la que los alumnos podrán "reinventar" las ideas que giran en torno al concepto de fracción unitaria. Las normas sociomatemáticas, que son normas exclusivas de la clase de matemáticas (Yackel y Cobb, 1996), dan la pauta que debe seguir el profesor para hacer de la clase un espacio de creación del objeto matemático a partir de preceptos como que el aprendizaje es meramente un objeto social (por eso las conversaciones colectivas) además de una actividad en sí misma que permite entender y argumentar aspectos que giran en torno a los mismos conceptos. Precisamente la presente investigación trata del análisis de las normas sociomatemáticas que permiten ver qué es lo que se hace el docente para lograr que los alumnos realicen la matematización y la reinvención de lo que se conoce como "fracción unitaria".

Metodología

La investigación se basa en la metodología del "Experimento de diseño" que contempla la necesidad de contar con una herramienta que en el ámbito educativo permita realizar investigación, sobre todo en educación matemática. Los experimentos de diseño son entonces una metodología de aprendizaje instruccional para investigar la relación entre la teoría educativa, los artefactos diseñados y la misma práctica;

> los experimentos de diseño permitirán que las expresiones, los gestos, las interacciones entre pares y profesor, los trabajos escritos y todas aquellas acciones que realiza el estudiante, puedan ser utilizadas para recolectar datos que en algunas ocasiones pasan desapercibidos y que son necesarios para obtener evidencias y a la vez nutrir las investigaciones en Matemática Educativa. (Briceño y Buendía Ábalos, 2015)

El experimento de diseño parte de la puesta en prueba de una Teoría Hipotética de Aprendizaje (THA) para promover el aprendizaje de los estudiantes y las hipótesis en torno a su y una Teoría Conjeturada de Aprendizaje (TCA) que plantea lo qué debe hacer el docente para alcanzar sus objetivos, ambas teorías nos ayudan a planear los objetivos y los medios y también a analizar los resultados para dar cuenta si los objetivos se cumplieron, en este sentido cabe aclarar que lo replicable no son las actividades sino la agenda, el Experimento de Enseñanza y que a partir de nuevas conjeturas se puede llevar a cabo un nueva investigación. Por otra parte, la formulación de teorías de la enseñanza en un dominio *específico* (TEDE), tiene el propósito de apoyar a los docentes en sus tareas de enseñanza ya que en una TEDE se propone una progresión de objetivos de aprendizaje y los medios didácticos que servirán para lograrlos (Stephan et al., 2003).

Nuestra TEDE busca ser un recurso que apoye a los docentes a lograr que sus alumnos desarrollen comprensiones relativamente complejas de las fracciones como medidas que dan cuenta del tamaño de una longitud. Asimimos que esta forma de entender las fracciones es una base para que los alumnos comprendan las características y propiedades de los números racionales y las prácticas cuantitativas, típicas de las disciplinas empíricas, en las que se comparan mediciones en términos de tamaño relativo (Thompson y Saldanha, 2003). La progresión de objetivos de aprendizaje en la TEDE se formularon tomando en consideración otros dos principios de la EMR: *el del nivel* (pasar por varios niveles de comprensión*)* y el de *reinvención guiada* (Heuvel-Panhuizen, 2009).

Nuestra TEDE plantea como realidad matematizable un contexto derivado de la leyenda de un antiguo pueblo (Los Acajay) famosos por su habilidad para fabricar cerámica, en este contexto surgen varias problemáticas ligadas con la medición que integramos en la TEDE que llamamos "La vara de Kía". Por otra parte, la progresión de objetivos de aprendizaje se define en términos de la emergencia secuencial de prácticas matemáticas (Stephan et al., 2003), por esta razón la TEDE se estructura con seis prácticas matemáticas: 1) medir longitudes utilizando una unidad estandarizada, y números enteros; 2) reconocer el tamaño relativo de una subunidad de medida, cuya longitud corresponde a una fracción unitaria de la longitud de la unidad de referencia; 3) interpretar una fracción como una medida de longitud realizada a través de iterar una subunidad; 4) interpretar una fracción como una medida de longitud que puede ser menor, mayor o igual a otra medida realizada; 5) interpretar las fracciones como medidas susceptibles de producir otras medidas al ser iteradas cierto número de veces y; 6) interpreta a las fracciones como medidas de longitud que pueden ser menores, iguales o mayores a un medio.

Congruentes con el Experimento de Diseño se organizó un equipo de investigación formado por los diseñadores de la TEDE, el investigador que fungió como profesor en la experimentación de la propuesta y dos investigadores observadores que analizarían el desarrollo de la TEDE y al final de la experimentación harían un análisis retrospectivo que permitiera aprobar algunas prácticas y modificar otras. La TEDE se experimentó con un grupo de 31 alumnos de 5º grado de educación primaria (edades entre 11 y 12 años) en una escuela de la ciudad de México ubicada en una zona de clase trabajadora. La TEDE se trabajó durante 26 sesiones de hora y media cada una que fueron videograbadas, no obstante en esta investigación nos centramos en las primeras 15 clases que abarcan las primeras cuatro prácticas matemáticas y que tratan de la introducción de las fracciones como un tamaño relativo (propias e impropias).

Es importante aclarar que esta ponencia se construyó desde la perspectiva del investigador-observador que como se mencionó, forma parte del equipo en el experimento de diseño. Esta posición nos ha permitido analizar la actividad del profesor centrándonos en las normas sociomatemáticas necesarias para que el alumno reorganice sus esquemas fraccionarios.

La reinvención de las fracciones unitarias. Una norma sociomatemática

El experimento toma su principio de realidad (lo imaginable, no solo lo palpable por los sentidos) de la narración sobre un antiguo pueblo mesoamericano, los Acajay, famosos por su habilidad para la elaboración de cerámica. Los Acajay usaban la vara de Kía o Tikje (vara de aproximadamente 24 cm) para hacer sus mediciones, la idea es que siguiendo el principio de realidad los alumnos imaginen los problemas de medición que tenían los Acajay.

En la primera práctica matemática de la TEDE los alumnos trabajan sobre la norma sociomatemática “reconstrucción del significado de medición”, la cual busca en un principio que reconozcan la importancia de la medición como práctica social y la necesidad de contar con unidades y subunidades para poder dar cuenta de una medida exacta. Cuando los alumnos usan la vara de Kia como herramienta de medición estandarizada se enfrentan a nuevos retos, al medir su altura se dan cuenta que pueden medir más de cinco Tikjes pero menos de seis, a partir de ello buscan nuevas herramientas para resolver la problemática de medir el “cachito” que falta o que sobra. En esta búsqueda, la guía del docente resulta fundamental para que en la realidad que han sido sumergidos los alumnos puedan matematizar y buscar alternativas para la solución del problema de los “cachitos que faltan o sobran”.

Para generar la reflexión de los alumnos el profesor plantea una situación en la que se debe cubrir completamente una longitud pero que no queden queden “cachitos sin cubrir, las subunidades con las que se ha de cubrir esa longitud se llaman “pequeños en la narrativa de los Acajay y cumplen un requisito específico: un pequeño de a dos, por ejemplo, debe ser iterado dos veces para cubrir la longitud del Tikje, esta idea permitirá al alumno percibir la subunidad como algo que no está contenida dentro del entero sino que es independiente y de esta manera “esperamos que los alumnos interpreten las fracciones como medidas que explican la iteración del tamaño de una subunidad” (Cortina, 2014, p.7).

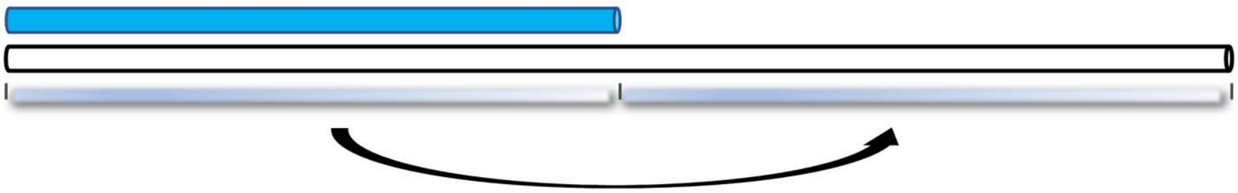

Figura 1. Subunidad. El pequeño de dos.

Lo interesante del experimento de enseñanza aparece cuando los alumnos comienzan a crear otros “pequeños” (el pequeño de tres que debe ser iterado tres veces para cubrir la unidad, el pequeño de a cuatro que debe ser iterado cuatro veces para cubrir la unidad…), pues como lo señala Gravemeijer et al., (2003) con esta herramienta (los “pequeños”) los alumnos encuentran sentido a su actividad y la hallan útil dentro de la matematización que viven en la realidad de la narrativa. Steffe (2002) encuentra en la actividad de iteración un nuevo sentido al esquema fraccionario alejado de las partes de un todo que permite ir entendiendo la noción de tamaño relativo.

Al tener interacciones en la clase mediante las conversaciones colectivas, los alumnos identifican en un primer momento la relación recíproca de tamaño relativo de cada uno de los “pequeños” que han elaborado y dimensionan su longitud al considerar el número de veces que se requieren iterar para cubrir la unidad de referencia, de esta manera los alumnos pueden comprender no sólo la fracción unitaria sino también su relación con el entero, es decir son capaces de ir reinventando la idea de que “1/n como algo que cuantifica el tamaño de una sola cosa, la cual, si se itera (o copia) n veces, produce algo que es del tamaño del entero (Cortina et al., 2008, p. 43).

Conforme avanzan las sesiones de la segunda práctica observamos que los alumnos reconstruyen la idea de fracción, sobre ese respecto Steffe (2002) reconoce que el esquema fraccionario del alumno va cambiando cuando sus argumentos toman sentido en la iteración y no en la parte de un todo, cuando los alumnos son capaces de expresar estas ideas comparten los objetos mentales que han desarrollado que pueden ir concretando para dar pie a una matematización vertical (dentro del principio de niveles), pues van organizando sus ideas dentro de la realidad en la que están inmersos y esquematizan sus respuestas para dar origen a ideas matemáticas que posteriormente servirán para ser matematizadas y dar origen a nuevas ideas y conceptos matemáticos.

Con las actividades de matematización realizadas en este primer momento los alumnos han sido capaces de determinar el tamaño relativo de las fracciones unitarias y comparar cuál fracción ("pequeño") es mayor que otra al reconocerlas como elementos independientes de la unidad de referencia e identificar que su tamaño está determinado por la relación que Thompson y Saldanha (2003) expresan de la siguiente manera: Si A es seis veces B entonces B es 1/6 parte de A. Con esta comprensión como base posteriormente los alumnos podrán percibir la fracción en términos multiplicativos al saber que pueden ser iteradas de menor, igual o mayor que la unidad de referencia.

La simbolización del denominador

Cuando los alumnos avanzan en el trayecto signado por la TEDE reconocen que los "pequeños" o subunidades representan una herramienta que les ha de permitir cuantificar (Stephan, 2002) y que no está contenida dentro del entero, en este sentido con el experimento de diseño buscamos "orientar a los estudiantes a pensar en las fracciones unitarias como multiplicandos (…) que sean concebidas como números que cuantifican tamaños, por tratarse del tamaño de una sola cosa]" (Cortina et al., 2008, p. 43).

Gravemeijer et al., (2003) menciona que no sólo es importante que los alumnos se relacionen con nuevas herramientas sino que también vayan adentrándose al mundo de los símbolos, por ello en esta segunda práctica se busca, además de reconocer las fracciones unitarias, el uso de un símbolo que vaya acercando a los alumnos a ver las ideas desarrolladas en el mundo Acajay como una idea matematizadora de las fracciones.

La idea de acercar al alumno a esta simbolización es que puedan reconocer al pequeño del que se echa mano como el denominador (más allá de la idea de que denominador es el número en que se divide un entero), por ejemplo si se usa el pequeño de cinco podría saberse que estamos hablando de 1/5 que ha de ser iterado *n* veces. Los alumnos, a través de la guía del docente, van proponiendo algunas maneras de simbolizar el denominador hasta llegar a lo que se propone dentro de la agenda:

$\boxed{\mathbf{2}\quad\quad}$

Figura 2. Notación no convencional con la que se presenta el tamaño de la subunidad "pequeño" de a dos.

El número colocado dentro del recuadro les permite al alumno expresar y comprender de forma más sencilla de qué "pequeño" se está echando mano, sin embargo los conocimientos que giran alrededor de esta escritura va más allá; existe un conocimiento de cuál es tamaño relativo de cada uno de los pequeños y a su vez permite crear reflexiones de que su tamaño no depende del número (en relación a las nociones de números enteros que se han adquirido) sino que su tamaño gira en torno a la idea de valor recíproco de tamaño relativo.

A través de esta segunda práctica los alumnos han logrado identificar el tamaño de una fracción unitaria (en términos del tamaño del pequeño), dicho conocimiento se ha generado a partir de las ideas de medida y con la noción de inverso multiplicativo; los alumnos transitaron por la creación de los pequeños que los llevo a entenderlos como algo externo al todo (la vara) y que, en posteriores prácticas, les ha de permitir poderlo iterar de manera menor, igual y mayor que la unidad de referencia.

Referencias y bibliografía

Briceño, O. A. y Buendía Ábalos, G. (2015). *Los experimentos de diseño y la práctica de modelación: significados para la función cuadrática*. Revista Virtual Universidad Católica del Norte, 45, 65-83. Recuperado de http://revistavirtual.ucn.edu.co/index.php/RevistaUCN/article/ view/656/1189

Cobb, P., Visnovska, J., y Zhao, Q. (2008). *Learning from and adapting the theory of realistic mathematics education*. Education et Didactique, 55-73.

Cortina, J. L., Visnovska, J., y Claudia, Z. (2008). *Un punto de partida alternativo para la instrucción de fracciones*. Educación Matemática, 20(2), 35-61

Cortina, J. L., Zuñiga, C., y Jana, V. (2013). *La equipartición como obstáculo didáctico en la eneñanza de las fracciones*. Educación Matemática, 25(2), 7-29.

Cortina, J. L., Zuñiga, C., y Jana, V. (2013). *La equipartición como obstáculo didáctico en la enseñanza de las fracciones* . Educación Matemática, 25(2), 7-29.

Cortina, J. L. (2014). *Investigar las fracciones: experiencias inspiradas en la metodología de los experimentos de diseño*. Educación Matemática, 270-284.

Delgado, I. y Cortina, J.L. (2021). *La educación matemática realista. Naturaleza y posibles aportes en México*. En Aguayo, L y Calderón, J. (Eds.). *Formación y Profesión Docente entre Prescripciones Teorías y Prácticas Educativas*. (PP. 325-342). Taberna Librería Editores.

Freudenthal, H. (1968). *Why to teach mathematics as to be useful?* Educational Studies in Mathematics.

Freudenthal, H. (1973). *Mathematics as an educational task.* . Dordrecht: Reidel Publis.

Freudenthal, H. (1983). *Didactical Phenomenology of Mathematical Structures*. Mathematics Education Library. D. Kluwer Academic Publisher.

Gravemeijer, K. (1994). *Developing realistic mathematics education*. Utrech, Países Bajos, Utrech CD-β Press.

Gravemeijer, K. (2004). *Local instruction theories as means of support for teachers in reform mathematics education*, en Mathematical Thinking and Learning, núm. 6, pp. 105-128.

Heuvel-Panhuizen, M. (2009). *El uso didáctico de modelos en la Educación Matemática Realista: Ejemplo de una trayectoria longitudinal sobre porcentaje*. Certidumbres e incertidumbres, S/N.

Kieren, T. (1981). "*The rational number construct–Its elements and mechanisms"* . En T. E. Kieren, Recent research on number learning (págs. 125-149). Columbus: OH:ERIC/SMEAC.

Steffe, L. P. (2002). *Una nueva hipótesis sobre los niños en conocimiento fraccional*. Departamento de Educación Matemática .

Stephan, M., Bowers, J., Cobb, P., y Gravemeijer, K. (2003). *Diario para Investigación en Matemáticas Educación*. Revista de investigación matemática, 1-123.

Thompson, P. W. y L. A. Saldanha (2003), *"Fractions and multiplicative reason- ing*", en J. Kilpatrick, G. Martin y D. Schifter (eds.), Research Companion to the Principles and Standards for School Mathematics, Reston, Virginia, National Council of Teachers of Mathematics, pp. 95-113.

Yackel, E., y Paul, C. (1996). Normas sociomatemáticas, argumentação e autonomia em matemática. Journal for Research in Mathematics Education, 458-477.