



ISBN: 978-980-7839-02-0



CONTRIBUIÇÕES PARA CARACTERIZAÇÃO DA MATEMÁTICA DO ENSINO DE FRAÇÕES EM TRABALHOS RECENTES DO ENAPHEM

CONTRIBUTIONS TO THE CHARACTERIZATION OF THE TEACHING MATHEMATICS OF FRACTIONS IN RECENT WORKS OF ENAPHEM

Adriana Menegotto Niérri¹

Colégio Estadual Heitor Cavalcanti de Alencar Furtado

Danilene Gullich Donin Berticelli²

Universidade Federal do Paraná

Barbara Winiarski Diesel Novaes³

Universidade Tecnológica Federal do Paraná

RESUMO

O presente artigo objetiva verificar nos trabalhos recentes publicados no Encontro Nacional de História de Educação Matemática (Enaphem - Brasil) elementos para a caracterização de uma matemática do ensino de frações por meio das categorias sequência, significado, graduação, exercícios e problemas (Morais, Bertini, Valente, 2021). Foram selecionados trabalhos que traziam em seus títulos e palavras-chave “fração” ou “frações”, tema de pesquisa das autoras. Dos cinco trabalhos inventariados, quatro deles utilizaram manuais pedagógicos como fonte privilegiada para o estudo e um deles livros didáticos. Os artigos analisados trazem elementos para caracterizar a matemática do ensino das frações: sequência, significado, graduação, exercícios e problemas. Em todos os estudos que envolveram uma periodização desde meados do século XIX até a década de 1960 a categoria graduação foi mobilizada. Em três trabalhos a graduação estava associada ao uso de materiais concretos que auxiliassem na aprendizagem progressiva das frações por parte dos alunos.

Palavras-chave: Enaphem. Frações. Materiais Didáticos. Graduação. Matemática do ensino.

ABSTRACT

This article aims to verify in recent works published at the National Meeting of History of Mathematics Education (Enaphem - Brazil) elements for the characterization of a mathematics teaching fractions through the categories sequence, meaning, graduation, exercises and problems (Morais, Bertini, Valente, 2021). Works that had “fraction” or “fractions” in their titles and keywords, the subject of the authors' research,

¹ Graduada em Matemática na (UNIPAR). Graduada em Pedagogia pela (UNOPAR). Professora no Colégio Estadual Heitor Cavalcanti de Alencar Furtado Tupãssi, Paraná, Brasil. Avenida Memória, 357, Paraná, Brasil, CEP: 85945-000. E-mail: adriana.menegotto@yahoo.com.br

² Doutora em Educação pela Pontifícia Universidade Católica do Paraná (PUC-PR). Docente na Universidade Federal do Paraná, setor Palotina, Palotina, Paraná, Brasil. Rua Pioneiro, 2152, Jardim Dallas. Palotina, Paraná, Brasil, CEP: 85950-000. E-mail: danilene@ufpr.br

³ Doutora em Educação pela Pontifícia Universidade Católica do Paraná (PUC-PR). Docente na Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Campus Toledo, Toledo, Paraná, Brasil. Rua Cristo Rei, 19, UTFPR, Vila Becker, Toledo, Paraná, Brasil, CEP: 85902-490. E-mail: barbaraw@utfpr.edu.br

were selected. Of the five works listed, four of them used pedagogical manuals as a privileged source for the study and one of them used textbooks. The articles analyzed bring elements to characterize the mathematics of teaching fractions: sequence, meaning, graduation, exercises and problems. In all studies that involved a periodization from the mid-19th century to the 1960s, the graduation category was mobilized. In three works, graduation was associated with the use of concrete materials that would help the students to progressively learn fractions

Keywords: Enaphem. Fractions. Teaching materials. Graduation. Mathematics from teaching.

INTRODUÇÃO

Pesquisas e produções sobre educação matemática em perspectiva histórica têm apresentado um crescimento significativo nos últimos anos no Brasil. Pode-se perceber a consolidação de grupos como Grupo Associado de Estudos e Pesquisas sobre História da educação matemática no Brasil (GHEMAT-Brasil), Grupo de Pesquisa História, Filosofia e Educação Matemática (HIFEM) e Grupo de História Oral e Educação Matemática (GHOEM), entre outros, fato decorrente do grande número de produções de artigos, teses, livros, dissertações e trabalhos de iniciação científica sobre a História da educação matemática. Assim, percebeu-se a necessidade de um evento nacional para reunir essa comunidade de pesquisa que está em amplo desenvolvimento.

Ao término do I CIHEM – (Congresso Iberoamericano de História da Educação Matemática), no ano de 2011 ainda em Portugal, vários pesquisadores brasileiros, analisaram a hipótese de promoverem em 2012 um evento nacional na expectativa de reunirem uma comunidade de pesquisadores em História da Educação Matemática. Nasceu assim, o I ENAPHEM⁴ – Encontro Nacional de Pesquisa em História da Educação Matemática que foi realizado em Vitória da Conquista, Bahia, nos dias 01, 02, e 03 de novembro de 2012. Segundo Pinto (2014, p. 26) “o I ENAPHEM deu sinais que a história da educação matemática está se tornando *disciplinarizável*”

O encontro tem uma periodização de dois em dois anos, ocorrendo no mês de novembro. O II ENAPHEM foi realizado na cidade de Bauru, São Paulo, nos dias 31 de outubro, 01 e 02 de novembro de 2014. O III ENAPHEM ocorreu em São Matheus, Espírito Santo, nos dias 31 de outubro, 01, 02 de novembro de 2016. O IV ENAPHEM ocorreu em Campo Grande, Mato Grosso do Sul, nos dias 14, 15, 16 e 17 de novembro de 2018, e o V ENAPHEM estava previsto para acontecer em Natal, Rio Grande do Norte,

⁴ As informações históricas sobre o Enaphem foram retiradas dos anais dos eventos e que estão disponíveis em: <https://periodicos.ufms.br/index.php/ENAPHEM/issue/archive>. Acesso em: 02 de julho de 2021.

mas devido à pandemia do Covid-19, ocorreu de forma virtual, nos dias 07, 14, 21 e 28 de novembro de 2020.

Os encontros do ENAPHEM têm por objetivo promover a socialização das experiências e pesquisas dos professores, alunos e comunidade científica produzidas em História da Educação Matemática; divulgar e discutir as pesquisas realizadas em História da Matemática na esfera das relações entre História, Epistemologia e Ensino de Matemática; difundir a História da Educação Matemática entre professores da educação básica, professores universitários, alunos da graduação e pós-graduação em Matemática, Educação Matemática, História das Ciências e áreas afins, além de ser um espaço de encontro de jovens pesquisadores brasileiros que estejam desenvolvendo seus projetos, podendo beneficiar-se das avaliações, comentários e sugestões de professores experientes na temática.

Diante das produções realizadas, submetidas e aprovadas nas sessões coordenadas do I ao V ENAPHEM, destacamos que no I ENAPHEM foram avaliados 35 trabalhos, sobre as temáticas: Fontes e metodologias da pesquisa para a História da Educação Matemática; História da educação matemática em diferentes níveis de ensino, e na formação de professores. No II ENAPHEM foram comentados 74 trabalhos com o tema: Fontes, temas, metodologias e teorias: a diversidade na escrita da História da Educação Matemática no Brasil. Já no III ENAPHEM foram submetidos 68 trabalhos com o tema: História da Educação Matemática e formação de professores. Durante o IV ENAPHEM foram avaliados 78 trabalhos que abordaram a temática: Formação de Professores: história, cultura e política, e no V ENAPHEM foram avaliados 74 trabalhos que tiveram como tema norteador História da Educação Matemática: panoramas curriculares e circulação de conhecimento.

A partir do número expressivo de trabalhos submetidos as cinco edições do evento por parte de vários grupos de pesquisa que se interessam pelos estudos da História da educação matemática é que decidimos verificar qual deles possuíam como temática principal as frações, atual objeto de estudo das autoras deste trabalho.

As frações são consideradas como um tema polêmico que gera muitas discussões didático-pedagógicas, talvez pela dificuldade encontrada pelos alunos no entendimento e compreensão destas. Concordamos com Morais, Bertini e Valente (2021, p. 11) e “consideremos que tal assunto merece uma análise histórica de modo a favorecer uma melhor compreensão da sua presença nas escolas ao longo do tempo”. A análise dos trabalhos apresentados no Enaphem nos permite conhecer o que já foi produzido neste

contexto em relação ao ensino de frações e de que forma podemos avançar em nossos estudos sobre este tema.

Estudos de Morais, Bertini e Valente (2021) consideram a escola como um espaço criativo (Chervel, 1990) que possui uma cultura escolar (Julia, 2001) forjada ao longo do tempo. Cabe ao pesquisador da História da educação matemática “compreender as dinâmicas e processos que ocorrem no cotidiano das aulas” (Morais, Bertini e Valente, 2021, p.13) e cunham o termo “matemática do ensino”, uma matemática que a escola elabora ao longo do tempo para ser ensinada, “um saber resultante da produção histórica da cultura escolar” (p.16). Na análise de livros didáticos e manuais pedagógicos para o ensino e para a formação de professores é possível caracterizar mudanças ocorridas na matemática do ensino, no caso específico do livro, da matemática do ensino de frações. Para os autores a organização espaço-temporal (níveis de ensino, graus, ano letivo, avaliações, ...) condiciona a produção de saberes e que no âmbito escolar há de ser considerado elementos como *sequência, significado, graduação, exercícios e problemas*. Segundo Valente (2020):

Um primeiro elemento mencionado refere-se à sequência indicada para a matemática do ensino de frações, postas nos livros didáticos. Entende-se por sequência o lugar ocupado pelas frações no conjunto dos temas da aritmética. Assim, caberia verificar, para uma dada obra, como o autor introduz as frações, vale dizer, após que temas tratados? E, ainda, o que segue o ensino de frações numa dada aritmética posta num livro didático? Um outro elemento que as pesquisas que vêm sendo levadas pelo GHEMAT Brasil apontam como importante para análise da matemática do ensino refere-se ao significado dado às frações no texto escolar: como são definidas as frações? Isto é, como o texto comunica o significado das frações ao aluno? Que ideia primeira deve o aluno ter de frações? Segue-se, na análise dos livros didáticos, a graduação como mais um elemento distintivo da matemática do ensino, da matemática do ensino de frações: qual o passo-a-passo deverá ser seguido pelo professor para tratar as frações? Assim, no conjunto dos escritos do livro didático, que temas são encadeados para o entendimento da ideia de frações? Por fim, mas não menos importante, tem-se a análise dos exercícios e problemas que remetem às expectativas de respostas esperadas pelos professores relativamente ao que ensinaram sobre frações para seus alunos (Valente, 2020, p. 37).

Dessa forma seria possível fazer uma “epistemologia dos saberes escolares” e são essas categorias que mobilizamos para verificar nos trabalhos recentes publicados no Encontro Nacional de História de Educação Matemática (Enaphem - Brasil) elementos para a caracterização de uma matemática do ensino de frações.

DELINEANDO UMA “TOPOGRAFIA DE INTERESSE”: AS FRAÇÕES

A partir das discussões realizadas na disciplina de Fundamentos da Educação Matemática⁵ em que as professoras procuraram fomentar a aproximação do referencial teórico discutido nos encontros com os temas de pesquisa dos pós-graduandos e com o objetivo de conhecer alguns eventos que estão relacionados à Educação Matemática que ocorrem em âmbito nacional, buscou-se analisar os trabalhos submetidos nas sessões coordenadas do ENAPHEM, que vão ao encontro do nosso tema de pesquisa, as frações.

Para a seleção dos artigos e análise considerou-se aqueles que possuíam a palavra “fração” ou “frações” no título ou nas palavras-chave dos resumos. Nas três primeiras edições⁶ do evento a busca não resultou em nenhum artigo. Isso não quer dizer que as frações não estavam presentes, apenas que não era o foco principal dos trabalhos. Isso ocorreu quando os autores tratavam das sequências de conteúdos dos programas, dos livros didáticos, dos manuais didáticos para formação de professores, provas escolares, entre outros.

Nos intriga perceber que a pesquisa retornou como resultado apenas cinco trabalhos no quarto e quinto ENAPHEM com a palavra “frações” no título conforme o quadro 1. Mais recentemente, parece haver uma tendência dos pesquisadores em História da educação matemática, principalmente do Ghemat Brasil, em caracterizar uma matemática do ensino das frações⁷.

Figura 1 - Trabalhos analisados

⁵ A primeira autora cursou a disciplina no primeiro semestre de 2021 como aluna especial do Programa de Pós-graduação em Educação em Ciências, Educação Matemática e Tecnologias Educativas (PPGECEMTE) da Universidade Federal do Paraná, setor Palotina.

⁶ Os Anais das cinco edições do ENAPHEM estão disponíveis em:

<https://periodicos.ufms.br/index.php/ENAPHEM/issue/archive> . Acesso em 15 de julho de 2021.

⁷ Em 2021, a Revista Histemat (<http://www.histemat.com.br/index.php/HISTEMAT>) organizou um Dossiê intitulado “Ensino de Frações: história e perspectivas atuais” em fluxo contínuo e que possui até o momento 18 artigos publicados e mais 1 resenha. Buscando contribuir com uma “epistemologia do ensino das frações” Novaes & Pinto (2021) analisam 15 trabalhos de pesquisadores do Ghemat Brasil sobre a temática das frações publicados em 2019 e 2020 pontuando os avanços e desafios em relação a essa temática.

Titulo/ Autores/Periodização/ Palavras-chave	Fontes mobilizadas
Um "novo" olhar sobre as frações segundo o manual Primeira Lições de Coisas. Kesia Caroline Ramires Neves, Denise Medina França, Edilene Simões Costa dos Santos (2020). segunda metade do século XIX. Método intuitivo; Calkins; Matemática para ensinar fração	Calkins, N. A. (1872). Primary Object Lessons: For Training the Senses and Developing the Faculties of children. 18 edition. New York: HARPER & BROTHERS. Calkins, N. A. (1886). Primeiras Lições de coisas: manual de ensinamento elementar para uso dos pais e professores. 40 ed. Tradução Ruy Barbosa de Oliveira. Rio de Janeiro: Imprensa Nacional.
As frações nas edições da Segunda Aritmética da Série Concórdia. Malcus Cassiano Kuhn (2019). década de 1940. História da Educação Matemática; Frações; Livros de Aritmética; Cultura Escolar.	Goerl, O. A. [194-]. Série Concórdia: Segunda Aritmética. Porto Alegre: Casa Publicadora Concórdia. Série Concórdia: Segunda Aritmética. (1948). Porto Alegre: Casa Publicadora Concórdia.
Transformações nos saberes para ensinar frações no curso primário relacionadas ao uso de materiais escolares (1930-1970). Barbara Winiarski Diesel Novaes, Danilene Gullich Donin Berticelli, Neuza Bertoni Pinto (2020). décadas de 1930 e 1960. História da educação matemática; Ensino de frações; Materiais didáticos	Albuquerque, I. (1958). Metodologia da Matemática, 3a. Edição, Rio de Janeiro: Conquista. Campos, J. F. (1933). Das frações dobrando e rasgando papel. São Paulo: Typ Siqueira - Salles Oliveira, Rocha & Cia. Porto, R. A. (1967). Frações na Escola Elementar. 4. ed. Belo Horizonte: Editora do Professor
A descoberta das frações equivalentes e o material Cuisenaire. Barbara Winiarski Diesel Novaes, Adriana Menegotto Nierri (2020). Década de 1960. Material Cuisenaire; Frações Equivalentes; Movimento da Matemática Moderna	Márquez, Á. D. (1967). Didática das Matemáticas Elementares-O Ensino das Matemáticas pelo Método dos Números em Côr ou Método Cuisenaire. Rio de Janeiro: Editora Letras e Artes LTDA.
Saberes Para Ensinar Frações no Livro: O Ensino de Aritmética pela Compreensão. Diogo Ferreira Jandrey, Laura Silva Dias, Edilene Simões Costa dos Santos (2020). Década de 1960. Frações; Livro; Saberes para ensinar; Ensino	Grossnickle, F. E. & Brueckner, L. J. (1965): O Ensino da Aritmética pela Compreensão. Rio de Janeiro: Editora Fundo de Cultura.

fonte: as autoras

Após a seleção dos artigos, analisou-se a problemática de pesquisa apresentada, os objetivos, o referencial teórico-metodológico, as fontes de pesquisa, os conteúdos sobre frações, bem como as considerações finais de cada.

Ao considerarmos as pesquisas em História da educação matemática, definir e reconhecer as fontes torna-se um passo importante, pois para o historiador as

[...] fontes são marcas do que foi, são traços, cacos, fragmentos, registros, vestígios do passado que chegam até nós, revelados como documento pelas indagações trazidas pela História. Nessa medida, elas são fruto de uma renovada descoberta, pois só se tornam fontes quando contêm pistas de sentido para a solução de um enigma proposto. São, sem dúvida, dados objetivos de um outro tempo, mas que dependem do historiador para revelar sentidos. Elas são, a rigor, uma construção do pesquisador e é por elas que se acessa o passado (PESAVENTO, 2005, p. 98).

A escolha das fontes deve dar-se a partir do problema de pesquisa, está na dependência direta das questões problematizadoras a que o historiador se propõe a tratar. Será a partir deste trabalho realizado com as fontes que possui, que serão produzidos fatos históricos. Estes, ressaltamos, não existem sem a pergunta sincera realizada pelo historiador. Conforme a figura 1, nos cinco trabalhos analisados um privilegia os livros didáticos (Kuhn, 2019) e quatro os manuais pedagógicos. Por meio dos manuais chegamos as práticas de forma indireta, segundo Pinto (2016):

Sua importância repousa na difusão e uniformidade do discurso, pois além da prescrição de um programa, os manuais, no caso os pedagógicos, participam da

construção de uma identidade profissional, de um sistema de valores que diz respeito à profissão, à educação, aos saberes a serem ensinados, principalmente sobre a melhor forma de ensiná-los (Pinto, 2016, p. 176-177)

Para esse estudo iremos verificar se os trabalhos selecionados trazem indícios de elementos (*sequência, significado, graduação, exercícios e problemas*) para a caracterização de uma matemática do ensino de frações (Morais, Bertini e Valente, 2021).

Os autores dos trabalhos selecionados não tiveram contato *a priori* com as categorias mencionadas, desta forma, não há prejuízo aos resultados apresentados caso não apareçam elementos das categorias que estamos mobilizando para caracterizar uma matemática do ensino das frações.

CONTRIBUIÇÕES PARA CARACTERIZAÇÃO DA MATEMÁTICA DO ENSINO DE FRAÇÕES

Numa perspectiva sócio-histórica, as autoras Ramires, França, Santos (2020), realizaram uma análise nas obras “Primeiras Lições de Coisas”, na versão original escrita por Norman Allison Calkins em 1861 na edição de 1872 e na versão traduzida por Rui Barbosa de Oliveira 1881 na edição 1886. A investigação teve como objetivo apontar indícios da pedagogia moderna de uma matemática *a e para* ensinar frações no manual de Calkins, a partir de sua apropriação do método intuitivo. Em suas observações as autoras pontuam que de alguma maneira Calkins produz saberes para a docência através de suas teorias do método intuitivo, transformando-as em orientações metodológicas. A obra “Primeiras Lições de Coisas” apresenta ao professor uma organização em etapas, sendo que as lições primeiro partem do concreto para o abstrato e, quanto ao ensino, concluíram que “Calkins sistematizou uma matemática *a e para* ensinar frações”, (Neves, França, Santos, 2020, p. 5). As orientações pedagógicas seguem a marcha: observar, classificar e generalizar, o que caracteriza uma *graduação* da matemática do ensino. No ensino as frações são tratadas pela divisão de partes iguais de objetos (maçãs, folhas de papel), de uma grandeza (esferas) ou de um número (comparação de retas paralelas divididas em metades e terços em forma de diagrama), constituindo seu *significado*. As autoras observaram que o ensino de frações na atualidade traz indícios de apropriação das ideias de Calkins quanto ao ensino de frações, considerando que muitas das atividades propostas no ensino fundamental anos iniciais utilizam-se da comparação de grandezas, composição e decomposição de figuras geométricas divididas em partes iguais, assim como as relações numéricas.

A comunicação científica de Kuhn (2019), intitulada “As frações nas edições da Segunda Aritmética da Série Concórdia”, buscou compreender “a abordagem das frações nas edições da Segunda Aritmética da Série Concórdia, editadas pela Igreja Evangélica Luterana no Brasil (IELB), por meio da Casa Publicadora Concórdia de Porto Alegre, para as escolas paroquiais luteranas do século XX, no RS” (Kuhn, 2019, p.2). A investigação, ancorada na perspectiva histórica e no conceito de cultura escolar, constatou-se que na segunda edição na década de 1940, foi priorizado o *significado* das frações $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$ e $\frac{1}{4}$ (visualização da divisão de uma linguiça, uma maçã, um bolo, um queijo) e a fração de um número (bolinhas) ainda pelo método de ensino intuitivo desenvolvendo os conceitos de parte-todo e quociente. Seguido de *exercícios* para o desenvolvimento de habilidades de cálculo mental e escrito de acordo com o nível dos alunos (*graduação*). Por fim, a aplicação prática do conhecimento matemático formalizado. Os *problemas* exploram os *significados* de fração, parte-todo e quociente, que, ao relacioná-las a diferentes contextos. Priorizavam o significado e o emprego das frações nas práticas socioculturais onde as escolas luteranas estavam inseridas. O ensino de frações estava associado às unidades do sistema de medidas, atividades voltadas à agricultura, à economia e as operações comerciais, mostrando consonância com as orientações pedagógicas da época. Portanto o ensino de matemática estava voltado para a formação dos futuros colonos da comunidade, as atividades que eram desenvolvidas em sala de aula estavam relacionadas à sua cultura e com suas necessidades humanas e sociais.

O apontamento de pesquisas quanto à frágil compreensão do conceito de frações, por alunos do ensino regular e estudantes universitários, conduzidas na perspectiva da história cultural, foi destacado pelas autoras Novaes, Berticelli, Pinto (2020), que apresentam seus estudos sobre as transformações nos saberes para ensinar frações no curso primário, relacionadas ao uso de materiais didáticos, 1930 a 1970. Num período em que as ideias do ensino ativo são renovadas, valendo-se de métodos e processos mais adequados à compreensão da criança, as autoras analisaram os manuais pedagógicos de Campos (1933); Albuquerque (1958) e Porto (1967). Os manuais trazem a ideia que o uso de materiais concretos relaciona-se à *graduação* do ensino e são indispensáveis ao ensino das frações. Das frações "dobrando e rasgando papel" (Campos, 1933), destaca-se a importância da criança trabalhar com os materiais didáticos que auxiliem a comprovar propriedades, deduzir regras e compreender as frações, antes de se chegar à abstração. No manual de Albuquerque (1958), destacam-se recomendações do uso de materiais

atribuindo ao aluno um processo de redescoberta. Para tanto sugere o "quadro de equivalências de frações", pois considera importante o conceito de equivalência para a apropriação do conhecimento sobre frações. Em relação ao manual de Porto (1967), nota-se uma recorrente afirmação sobre a relevância do uso de materiais didáticos para o ensino de frações, permeando todas as séries do curso primário.

Nesse contexto de renovações, os materiais didáticos para ensinar frações ganham destaque, e o uso adequado desses materiais "(...) é parte de um conjunto de saberes profissionais, requeridos para o professor ensinar matemática na escola primária, no período do escolanovismo" (Novaes, Berticelli, Pinto, 2020, p. 4). A pesquisa mostrou que nos anos iniciais do ensino primário os autores dos manuais pedagógicos apresentam uma variedade de materiais escolares, sendo que nas séries finais do ensino primário os materiais dão lugar aos diagramas, gráficos, desenhos, quadros de equivalência, visando preparar o aluno para o ensino secundário, cumprindo sua finalidade propedêutica.

O artigo apresentado por Novaes e Niérri (2020) teve por objetivo investigar a proposta para ensinar frações equivalentes por meio do material Cuisenaire, presente no livro "Didática das Matemáticas Elementares" de Angel Diego Márquez (1967). O estudo aponta que o educador e sua obra foram vetores da circulação do Método Cuisenaire no Brasil, durante o período da matemática moderna (MM). O material segue os fundamentos psicopedagógicos de Jean Piaget sobre a gênese do número e as estruturas-mãe (algébricas, topológicas e de ordem). Por meio do material estruturado a criança, de forma rápida e eficaz, adquire os mecanismos das operações matemáticas fundamentais, partindo do concreto pensado sem comprometer o rigor dedutivo, e passa a ter consciência de uma álgebra de conjuntos e estruturas fundamentais. O número é percebido como uma grandeza contínua, desta forma com novas racionalidades. Segundo Morais, Bertini e Valente (2021, p. 40) "em tempos da MM, a matemática do ensino de frações tem por finalidade a construção dos números racionais, a fração como uma das representações do número racional". As frações são concebidas como operadores e o material é utilizado como meio de comprovação e suporte para a compreensão, levando a criança à descoberta das frações equivalentes por meio de tentativa e erro de forma *gradativa, progressiva*.

O artigo de Jandrey, Dias e Santos (2020), teve por objetivo verificar os *saberes a ensinar e para ensinar* frações presentes no livro "O ensino de aritmética pela compreensão" de Grossnickle e Brueckner (1965). Com características da Escola Nova, este livro era destinado aos professores que ensinam matemática no ensino primário e

sugerem o ensino de frações por meio da dramatização e o uso de materiais concretos. A pesquisa destaca o uso de flanelógrafos, de discos de frações e quadros de equivalência para o ensino de frações ordinárias. Orienta que haja uma *graduação* do ensino das operações de adição e de subtração de frações. Em relação à *sequência*, as operações com denominadores diferentes deveriam ocorrer, a partir da quinta série, com o uso de materiais didáticos. O livro “orienta os professores a tratarem as operações com as frações acompanhadas de um material concreto para levar o aluno a descobrir o significado de tal operação” (Jandrey, Dias, Santos, 2020, p. 5). Orienta ainda que o aluno deve ter muitas experiências significativas com frações, utilizando materiais concretos, podendo descobrir o *significado* das operações com frações.

Apresentamos no quadro 1 uma síntese das categorias que apareceram em cada um dos trabalhos.

Quadro 1 – Síntese das categorias observadas nos trabalhos analisados

Categoria	Autores	Descrição
Sequência	Jandrey, Dias e Santos (2020)	Analisaram a obra “O ensino de aritmética pela compreensão” de Grossnickle e Brueckner (1965). Em relação à sequência, as operações com denominadores diferentes deveriam ocorrer, a partir da quinta série, com o uso de materiais didáticos.
Significado	Ramires, França e Neves (2020)	Numa perspectiva sócio histórica, analisam a obra “Primeiras Lições de Coisas”. No ensino as frações são tratadas pela divisão de partes iguais de objetos (maçãs, folhas de papel), de uma grandeza (esferas) ou de um número (comparação de retas paralelas divididas em metades e terços em forma de diagrama), constituindo seu significado.
	Kuhn (2019)	Na segunda edição da Segunda Aritmética de Série Concórdia na década de 1940, foi priorizado o significado das frações $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$ (visualização da divisão de uma linguça, uma maçã, um bolo, um queijo) e a fração de um número (bolinhas) ainda pelo método de ensino intuitivo desenvolvendo os conceitos de parte-todo e quociente.
	Jandrey, Dias, Santos (2020)	Orienta que o aluno deve ter muitas experiências significativas com frações, utilizando materiais concretos, podendo descobrir o significado das operações com frações.
Graduação	Ramires, França e Neves (2020)	As orientações pedagógicas seguem a marcha: observar, classificar e generalizar, o que caracteriza uma graduação da matemática do ensino.
	Kuhn (2019)	Respeitar o nível do aluno.
	Novaes, Berticelli, Pinto (2020)	Os manuais de Campos (1933); Albuquerque (1958) e Porto (1967) trazem a ideia que o uso de materiais concretos relaciona-se à graduação do ensino e são indispensáveis ao ensino das frações.

	Novaes, Niérri (2020)	O estudo analisa o ensino das frações equivalentes por meio das Barras Cuisenaire presentes na obra “Didática das Matemáticas Elementares” de Angel Diego Marquéz (1967). o material é utilizado como meio de comprovação e suporte para a compreensão, levando a criança à descoberta das frações equivalentes por meio de tentativa e erro de forma gradativa, progressiva.
	Jandrey, Dias e Santos (2020)	A pesquisa destaca o uso de flanelógrafos, de discos de frações e quadros de equivalência para o ensino de frações ordinárias. Orienta que haja uma graduação do ensino das operações de adição e de subtração de frações.
Problemas e exercícios	Kuhn (2019)	Os <i>exercícios</i> eram postos para o desenvolvimento de habilidades de cálculo mental e escrito de acordo com o nível dos alunos (<i>graduação</i>). Os <i>problemas</i> exploram os <i>significados</i> de fração, parte-todo e quociente, ao relacioná-las a diferentes contextos (práticas socioculturais onde as escolas luteranas estavam inseridas).

Fonte: as autoras

CONSIDERAÇÕES FINAIS

A análise dos trabalhos apresentados no Enaphem contendo no título e ou palavras-chave a palavra “frações” ou “fração”, nos permitiu conhecer o que já foi produzido sobre a temática neste evento. Mobilizamos as categorias cunhadas de Morais, Bertini e Valente (2021) para verificar nos trabalhos recentes publicados no Encontro Nacional de História de Educação Matemática (Enaphem - Brasil) elementos para a caracterização de uma matemática do ensino de frações.

Embora os autores dos trabalhos, no momento da escrita, não tivessem por objetivo caracterizar a matemática do ensino de frações, os artigos analisados trazem elementos para esta caracterização: sequência, significado, graduação, exercícios e problemas, conforme apresentado no quadro síntese.

O elemento abordado em todos os trabalhos foi a graduação. Em três trabalhos a graduação estava associada ao uso de materiais concretos que auxiliassem na aprendizagem progressiva das frações por parte dos alunos, constituindo parte de um conjunto de saberes produzidos pela cultura escolar, uma matemática do ensino de frações.

REFERÊNCIAS

- CherVEL, A. (1990). História das disciplinas escolares: reflexões sobre um campo de pesquisa. *Teoria & educação*, 2(2), 177-229. Recuperado de https://edisciplinas.usp.br/pluginfile.php/3986904/mod_folder/content/0/CherVEL.pdf?forcedownload=1
- Jandrey, D.F., & Dias, L.S., & Santos, E.S.C. (2020). Saberes para ensinar frações no livro: o ensino de aritmética pela compreensão. In *Anais do ENAPHEM - Encontro Nacional De Pesquisa Em História Da Educação Matemática* - ISSN 2596-3228, n.5, (pp.1-5). Natal, RN: Universidade Federal do Rio Grande do Norte. Recuperado de <https://periodicos.ufms.br/index.php/ENAPHEM/article/view/11191>
- Julia, D. (2001). A cultura escolar como objeto histórico. *Revista Brasileira de Educação*. n. 1 jan./jun.2001. Recuperado de <https://periodicos.uem.br/ojs/index.php/rbhe/article/view/38749>
- Kuhn, M. C. (2019) As frações nas edições da segunda aritmética da série Concórdia. In *Anais do ENAPHEM - Encontro Nacional De Pesquisa Em História Da Educação Matemática* - ISSN 2596-3228, n.4, (pp.1-13). Campo Grande, MS: Universidade Federal do Mato Grosso do Sul. Recuperado de <https://periodicos.ufms.br/index.php/ENAPHEM/article/view/6366>.
- Morais, R. S., & Bertini, L.F., & Valente, W.R. (2021) *A matemática do ensino de frações: do século XIX à BNCC*. 1 ed. São Paulo: Livraria da Física.
- Novaes, B.W.D, Berticelli, D.G.D, Pinto, N. B. (2020) Transformações nos saberes para ensinar frações no curso primário, relacionadas ao uso de materiais didáticos, no período de (1930 a 1970). In *Anais do ENAPHEM - Encontro Nacional De Pesquisa Em História Da Educação Matemática* - ISSN 2596-3228, n.5, (pp.1-5). Natal, RN: Universidade Federal do Rio Grande do Norte. Recuperado de <https://periodicos.ufms.br/index.php/ENAPHEM/article/view/11150>
- Novaes, B. W. D; Nierri, A.M. (2020) A descoberta das frações equivalentes e o material Cuisenaire. In *Anais do ENAPHEM - Encontro Nacional De Pesquisa Em História Da Educação Matemática* - ISSN 2596-3228, n.5, (pp. 1-5) Natal, RN: Universidade Federal do Rio Grande do Norte. Recuperado de <https://periodicos.ufms.br/index.php/ENAPHEM/article/view/11210>
- Novaes, B., & Pinto, N. (2021). Estudos recentes sobre frações no campo da História da Educação Matemática: avanços e desafios. *Revista De Ensino De Ciências E Matemática*, 12(5), 1-20. <https://doi.org/10.26843/rencima.v12n5a09>
- Pesavento, S. J. (2005) *História & história cultural*. 2 ed. Belo Horizonte: Autêntica.
- Pinto, N. B. (2016). *Matrizes pedagógicas de manuais que ensinam a ensinar aritmética na escola primária em tempos de escola nova: aproximações e distanciamentos*. *Revista de História da Educação Matemática*, 2(1). Recuperado de <http://www.histemat.com.br/index.php/HISTEMAT/article/view/61>
- Pinto, N. B (2014). Da importância do I ENAPHEM. In: Valente, W. R. (org.) *História da educação matemática no Brasil: problemáticas de pesquisa, fontes, referências*

teórico-metodológicas e histórias elaboradas. São Paulo: Editora Livraria da Física,(pp.15-29).

Ramires, K; França, D.F; Santos E.S.C. (2020) Um "novo" olhar sobre as frações segundo o manual Primeira Lições de Coisas. In *Anais do ENAPHEM - Encontro Nacional De Pesquisa Em História Da Educação Matemática* - ISSN 2596-3228, n.5, (pp.1-5). Natal, RN: Universidade Federal do Rio Grande do Norte. Recuperado de <https://periodicos.ufms.br/index.php/ENAPHEM/article/view/10904>

Valente, W. R. (2020) A matemática do ensino e o ensino de matemática: as frações nos primeiros anos escolares. segunda metade do século XIX. *Historia de la Educación*, v.39, (pp. 31-44)