

Sucesiones y la dimensión fractal

Luis Manuel Hernández Gallardo

Facultad de Ciencias, UNAM

México

lmhg@ciencias.unam.mx

Resumen

En este taller se tiene pensado plantear, discutir y resolver una serie de problemas, en algunos de los cuales están involucrados procesos infinitos, en consecuencia en forma natural se llega a la idea de sucesión y límite de una sucesión.

Por otro lado, el desarrollo de algunos de los problemas nos lleva a objetos geométricos con ciertas propiedades especiales que nos permite hacer una "presentación" de los objetos geométricos conocidos como " fractales autosemejantes ". Una de las propiedades características de un fractal es su dimensión, por lo que se introduce el concepto de dimensión fractal.

Palabras clave: Infinito, sucesión, límite, autosemejanza, fractal, dimensión.

Contenido. El concepto de sucesión y la idea de límite de una sucesión, que es uno de los tantos procesos infinitos que se estudian en Matemáticas.

Justificación. Como usualmente la enseñanza de algunos temas de las matemáticas se hace en forma bastante abstracta, la búsqueda es mostrar que algunas veces se puede, al menos empezar algunos de ellos, en una forma más " natural".

Método de trabajo y estrategias de enseñanza. Se plantea cada uno de los problemas a los asistentes, en la búsqueda no sólo de buscar su solución entre todos, sino de generar una posible discusión alrededor de la importancia que este tipo de problemas puede tener en la motivación para quienes se inician en el estudio de algunas áreas de la ciencia matemática, en particular en el estudio del Cálculo Diferencial e Integral.

Problemas

Problema 1. *Las torres de Hanoi.*

Este es un problema que a veces se rodea de historias impregnadas de misticismo (véase [Ga] y [Ka]), pero que en realidad es un problema planteado por el matemático francés Édouard Anatole Lucas alrededor de 1880 y se formula en los términos siguientes:

Se tienen tres "postes" (*fig. 1*); en uno de ellos se coloca una pila de n discos y el tamaño de cada uno de ellos decrece conforme crece el número de discos.



Figura 1. Torres de Hanoi.

¿Cuál es el número mínimo de movimientos de discos que se debe realizar, para trasladar la torre con n discos a uno de los otros dos postes, si el tercer poste se usa como auxiliar?

El proceso se debe realizar bajo las reglas siguientes:

1. En cada movimiento sólo se debe mover un disco.

2. Un disco de cierto tamaño no debe colocarse encima de uno de menor tamaño. Se deduce que el número mínimo de movimientos queda expresado por la fórmula

$$N(n) = 2^n - 1$$

donde n es el número de discos. Si consideramos que n pueda tomar cualquier valor natural, se tiene una sucesión $\{N(n)\}$, cuyo término general es

$$N(n) = 2^n - 1$$

Problema 2. (Véase [Vi]) En la figura 2 aparecen los primeros triángulos de un conjunto infinito de triángulos anidados. ¿Cuánto vale la suma p de los perímetros de "todos" los triángulos?

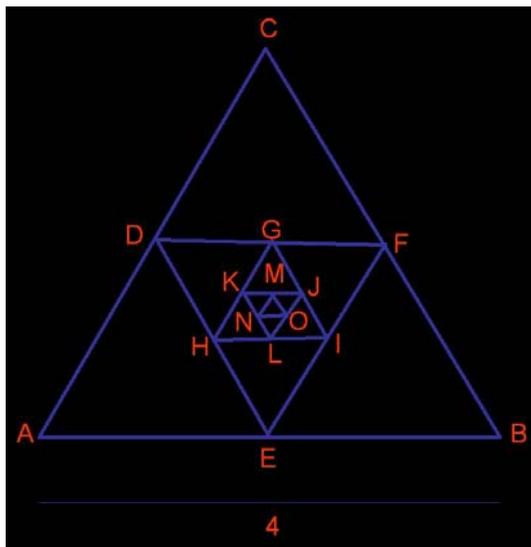


Figura 2. Triángulos anidados.

Se obtiene que $p = 21 + \frac{3}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} l_n$, donde $l_n = 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \dots + \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$. La sucesión $\{l_n\}$ tiene como término general la suma de una progresión geométrica.

Problema 3. (Véase [Vi]) En la figura 3 se dibujaron los primeros cuadrados de un conjunto infinito de cuadrados anidados.

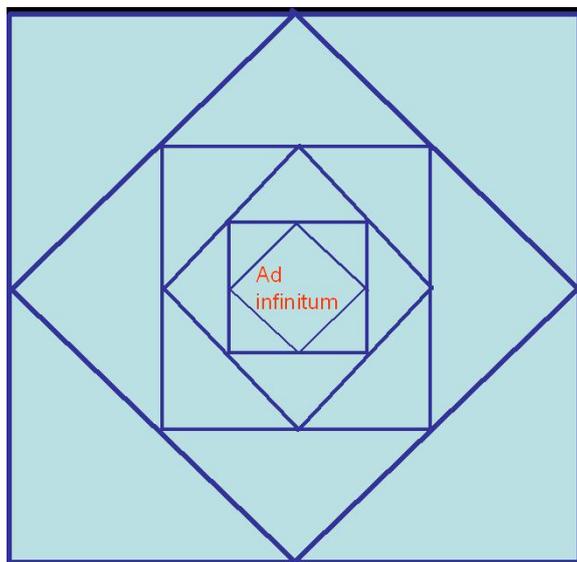


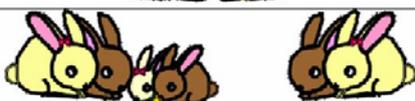
Figura 3. Cuadrados anidados.

¿Cuál es la suma A de las áreas de "todos" los cuadrados si el área del más grande es 4?

Se deduce que la suma de "todas" las áreas es $A = \lim_{n \rightarrow \infty} (A_1 + A_2 + \dots + A_n)$, donde $A_n = \frac{1}{2^{n-3}}$.

Problema 4. En la obra "Liber abacci" escrita en 1202 por el matemático italiano Leonardo de Pisa, mejor conocido como Fibonacci aparecen muchos problemas matemáticos, entre los que se encuentra el siguiente: "¿Cuántas parejas de conejos se obtienen a partir de una pareja inicial en el transcurso de un año?" (Véase [Vo]). Se supone que:

1. Una pareja de conejos se reproduce por primera vez a los dos meses y engendra una nueva pareja.
2. A partir de que una pareja se reproduce por primera vez, se vuelve a reproducir mensualmente, y cada vez engendra una nueva pareja.

		Pares de conejos 1
1 mes		1
2° mes		2
3° mes		3
4° mes		5
5° mes		8

En forma inmediata se obtiene que el número de parejas en el mes n está dado por una expresión del tipo $F_n = F_{n-2} + F_{n-1}$, para $n \geq 2$, con $F_0 = 1$ y $F_1 = 1$, luego la respuesta al problema es el valor de F_n , cuando $n=12$. Al extrapolar el problema para todo n , la expresión obtenida define una sucesión recurrente.

A los números F_n se les conoce como números de Fibonacci, los cuales tienen propiedades muy interesantes desde el punto de vista de la teoría de los números, pero también existe una relación muy estrecha entre los números de Fibonacci y la proporción

áurea $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, donde destaca el hecho sorprendente de que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F_{n+1}}{F_n} = \varphi$$

A la sucesión $\{F_n\}$ se le llama sucesión de Fibonacci.

Problema 5. (Véase [Vo]). Consideremos una cantidad de dinero D_0 que arroja un interés anual de 100%.

¿Cuál es la cantidad de dinero D al final de un año, si se considera que la reinversión es instantánea?

Si se considera que el dinero se reinvierte n veces en el año, entonces se obtiene

$$D_n = D_0 \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

Por lo tanto si la reinversión es instantánea se tiene que $D = D_0 \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$.

De nuevo aquí aparece también una sucesión, en este caso $\{D_n\}$, donde el término general de la sucesión es $D_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$.

Como

$$\lim_{n \rightarrow \infty} D_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e \approx 2.7182818284590452354$$

(donde este número, es uno de los números más importantes dentro de la ciencia y que en particular es irracional y trascendente), entonces $D = D_0 e$.

Problema 6. (Véase [St]) En la figura 4 aparecen los primeros pasos de de un proceso infinito de construcción de una curva que se conoce como curva de Koch en honor del matemático Helgue Von Koch, y en la figura 5 las primeras etapas de la construcción de una curva llamada curva copo de nieve, por su forma característica o también conocida como isla de Koch.

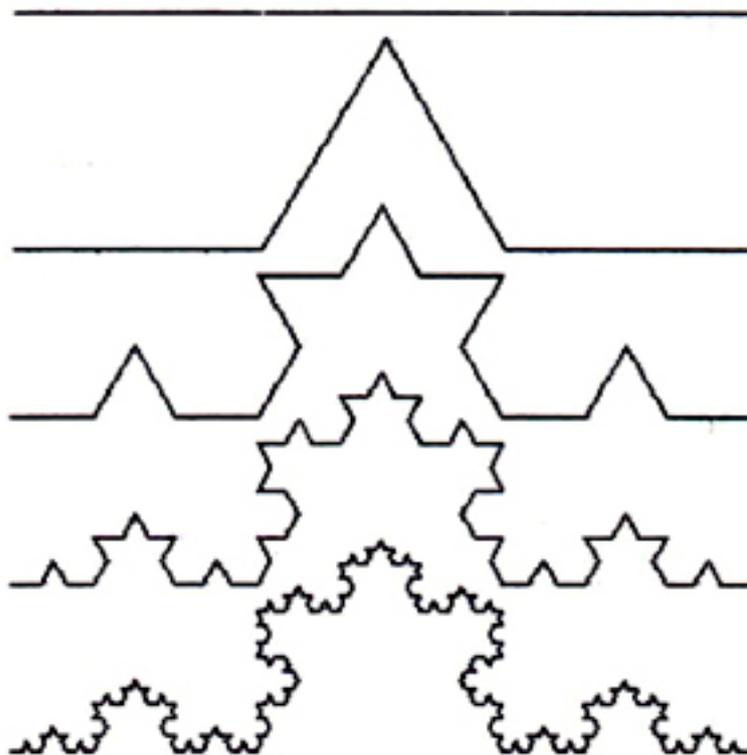


Figura 4. Curva de Koch.

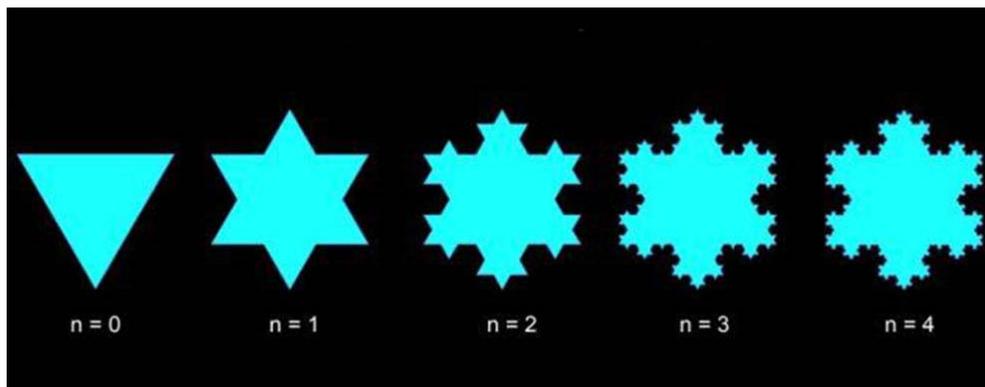


Figura 5. Curva de copo de nieve.

¿Cuál es la longitud de la curva de Koch? ¿Cuál es el área encerrada por la curva copo de nieve?

Para la curva de Koch se deduce que su longitud es $l = l_0 \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{4}{3}\right)^n = "+\infty"$, donde l_0 es la longitud de segmento inicial, mientras que para el área encerrada por la curva copo de nieve se obtiene

$$A = A_0 \left(1 + \frac{3}{9} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{4}{9} + \left(\frac{4}{9}\right)^2 \cdots + \left(\frac{4}{9}\right)^{n-1} \right) \right) = \frac{8}{5} A_0$$

donde A_0 es el área del triángulo inicial.

Problema 7. (Véase [Pe]) En la figura 6 están los primeros pasos del proceso infinito de construcción del llamado triángulo de Sierpinski (Waclaw Sierpinski, matemático polaco (1882-1969)), cuya construcción se "hace" quitando sucesivamente el triángulo central de los triángulos negros, a partir de un triángulo dado.

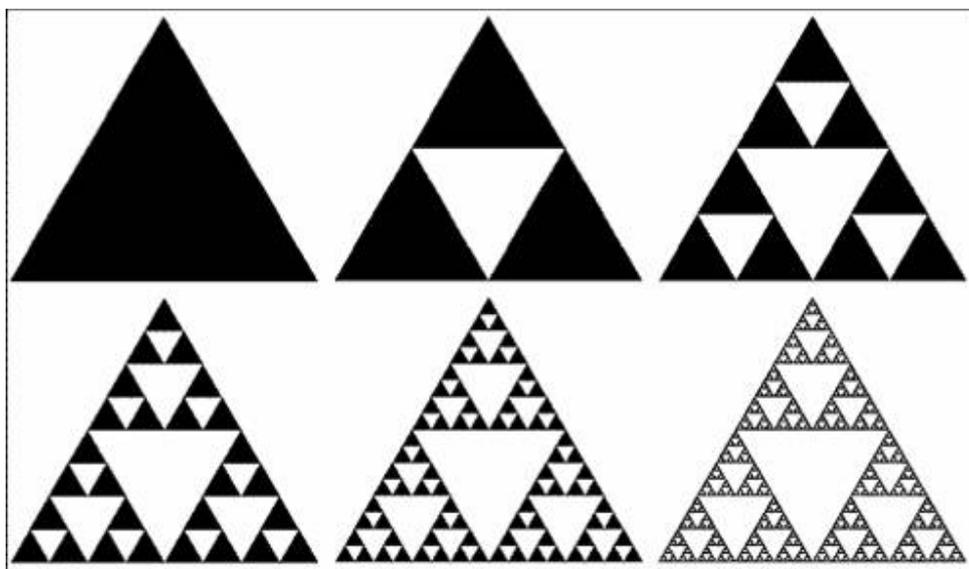


Figura6. Triángulo de Sierpinski.

¿Cuál es el área encerrada por el triángulo de Sierpinski si el triángulo inicial tiene área 1?

Se deduce que

$$A = 1 - \frac{1}{4} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{3}{4} + \left(\frac{3}{4}\right)^2 + \dots + \left(\frac{3}{4}\right)^{n-1} \right) = 0.$$

Problema 8. (Véase [Pe]) En la figura 7 están los primeros pasos de un proceso infinito de construcción del llamado tapete de Sierpinski, cuya construcción se "hace" quitando sucesivamente el cuadrado central de los cuadrados negros, a partir de un cuadrado inicial.

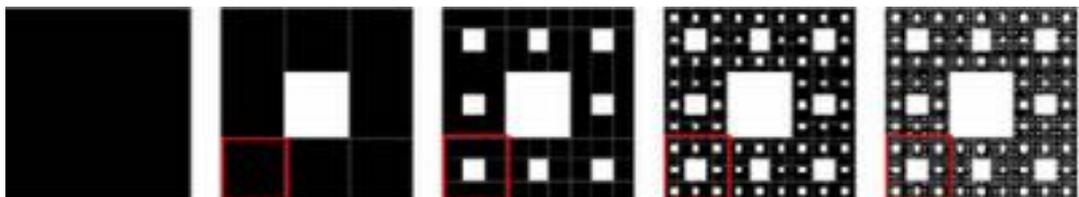


Figura 7. Tapete de Sierpinski.

¿Cuál es el área del tapete de Sierpinski, si el área del cuadrado inicial es 1?

En este caso se deduce que

$$A = 1 - \frac{1}{9} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{8}{9} + \left(\frac{8}{9}\right)^2 + \dots + \left(\frac{8}{9}\right)^{n-1} \right) = 0$$

Problema 9. (Véase [St]) En la figura 8 se ilustran los primeros pasos de un proceso infinito de construcción de la llamada esponja de Menger (Karl Menger 1840-1921, matemático austriaco), cuya construcción se "hace" quitando sucesivamente el bloque central de cubos respecto de cada cara, a partir de un cubo inicial.

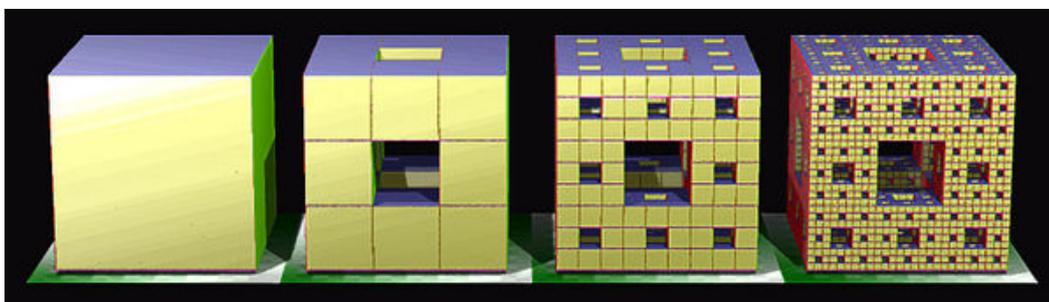


Figura 8. Esponja de Menger.

¿Cuál es el volumen de la esponja de Menger si el volumen del cubo inicial es 1?

En este caso se obtiene

$$V = 1 - \frac{7}{27} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{20}{27} + \left(\frac{20}{27}\right)^2 + \dots + \left(\frac{20}{27}\right)^{n-1} \right) = 0.$$

Problema 10. (Véase [Hi]) En la figura 9 aparecen los primeros pasos del proceso infinito de construcción de un conjunto que se conoce como conjunto de Cantor, en honor del matemático alemán George Cantor (1845-1918), cuya construcción se "hace" quitando el segmento central sin sus extremos de los tres que resultan al dividir un segmento dado en tres partes iguales y después sucesivamente se aplica el mismo procedimiento con los segmentos que van sobreviviendo.

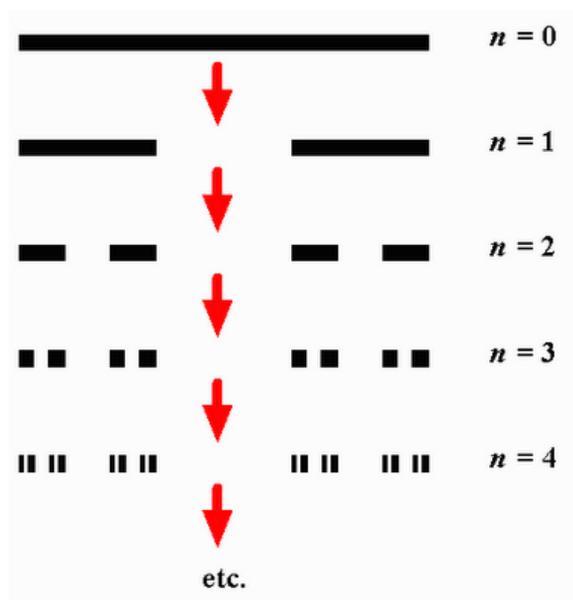


Figura 9 Conjunto de Cantor.

¿Cuál es la longitud del conjunto de Cantor si la longitud del segmento original es 1?

Se obtiene que la longitud del conjunto de Cantor es

$$l = 1 - \frac{1}{3} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{3} + \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \dots + \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} \right) = 0.$$

En los cinco problemas finales aparecen objetos que a todas las escalas posibles se ven idénticos al objeto más grande, es decir, a diferentes escalas y en cualquier punto del objeto aparecen una y otra vez copias del objeto. Este tipo de entes geométricos, que entre otras, tienen la propiedad de que su dimensión no necesariamente es un número entero, se conocen como *fractales autosemejantes*.

Dimensión fractal.

En la figura 10 aparecen elementos característicos (un segmento, un área y un volumen) de los espacios topológicos de dimensión 1, 2 y 3 respectivamente.

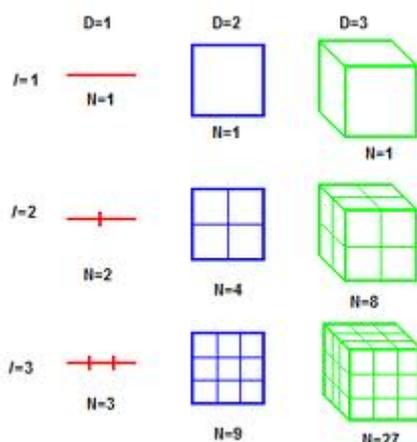


Figura 10. Dimensión topológica.

Si los segmentos en cada una de las dimensiones $D=1$, $D=2$ y $D=3$ se dividen en un número i de partes iguales, el número N de figuras iguales (segmentos, cuadrados o cubos) que se obtiene en cada caso es

$$N = i^D.$$

De la expresión anterior se deduce en forma inmediata que

$$D = \frac{\ln N}{\ln i}$$

Motivado por este hecho se generaliza el concepto de dimensión de autosemejanza o dimensión fractal para objetos como los que se obtienen en los últimos cinco problemas, a través de la fórmula

$$D = \frac{\ln N}{\ln i}$$

Para cada uno de los fractales autosemejantes obtenidos en los cinco problemas últimos, después de identificar en cada caso cual es el valor de i y de N se obtiene:

1. Para la **curva de Koch** se tiene que $i = 3$ y $N = 4$, por lo que su dimensión es

$$D = \frac{\ln 4}{\ln 3} \approx 1.2619$$

2. En el **triángulo de Sierpinski**, los valores correspondientes son $i = 2$ y $N = 3$, en consecuencia su dimensión es

$$D = \frac{\ln 3}{\ln 2} \approx 1.5850$$

3. En el **tapete de Sierpinski** los valores son $i = 3$ y $N = 8$, por lo tanto su dimensión es

$$D = \frac{\ln 8}{\ln 3} \approx 1.8928$$

4. Para la **esponja de Menger** se tiene que $i = 3$ y $N = 20$, por lo tanto el valor que se obtiene para su dimensión es

$$D = \frac{\ln 20}{\ln 3} \approx 2.7268$$

5. Mientras que para el **conjunto de Cantor**, como $i = 3$ y $N = 2$, en consecuencia su dimensión es

$$D = \frac{\ln 2}{\ln 3} \approx 0.6309$$

Bibliografía:

1. [Bo] Boyce William E., DiPrima Richard C. (1983). Ecuaciones Diferenciales y problemas con valores en la frontera, Editorial Limusa, México.
2. [Ga] Gamow George. (1969). Uno dos tres ... infinito, Espasa Calpe, Madrid.
3. [Hi] Morris W. Hirsch, Stephen Smale, Robert L. Devaney. (2004). Differential equations, dynamical systems, and an introduction to chaos, San Diego California, Academic
4. [Ka] Kasner Edward, Newman James. (2001). Mathematic and Imagination, Mineola, New York, Dover.

5. [Pe] Peitgen Heinz-Otto., Jurgens Hartmut, Saupe Dietmar. (2000). Chaos and Fractals: New Frontiers of Science, Springer-Verlag, New York.
6. [St] Stewart Ian. (1995) Does God Play Dice?: The Mathematics of Chaos. Penguin books.
7. [Vi] Vilenkin Alexander. (1985). Matemáticas 11 (en ruso), Vyshya Shkola, Moscú.
8. [Vo] Vorobiov N. N. (1978). Lecciones Populares de Matemáticas. Números de Fibonacci. Editorial Mir, Moscú.