



Uma Constatação e Várias Questões sobre o Ensino de Análise

Rosa Lúcia Sverzut **Baroni**
Docente do PPGEM, UNESP.
Brasil

rbaroni@rc.unesp.br

Sílvio César **Otero-Garcia**
Doutorando do PPGEM, UNESP.
Brasil

silvioce@gmail.com

Resumo

Este trabalho apresenta o resultado de uma pesquisa inserida num projeto maior que tenta responder a várias questões que têm surgido a respeito do papel da disciplina de análise em cursos de licenciatura em matemática, dentre as quais destacamos: como a Análise se constituiu como disciplina no Brasil; como a aritmetização da Análise tem sido trabalhada à luz da história da matemática; que conteúdos podem ser caracterizados como componentes da estrutura da disciplina; como as licenciaturas têm trabalhado com ela; qual o movimento existente na busca de sua separação nos cursos de licenciatura e bacharelado. Já a constatação que trazemos é: a disciplina de análise não tem sofrido mudanças substanciais em termos de objetivos, conteúdos ou bibliografia há pelo menos quarenta anos. Essa constatação nos leva a mais uma questão: já não é hora de se repensar a respeito dessa disciplina em cursos de formação de professores?

Palavras chave: ensino de análise, formação matemática do professor, educação matemática no ensino superior, história de processos pedagógicos.

Introdução

A experiência de muitos anos da primeira autora, em salas de aulas de cursos de licenciatura em matemática, levou-a a sérias reflexões a respeito da disciplina de análise, isso porque a observação a respeito das dificuldades dos alunos nessa disciplina despertou sua curiosidade em saber se esse era um caso específico do curso em que atuava ou se acontecia o mesmo em outros. A partir dessa inquietação inicial, da troca de idéias com colegas professores de análise e do próprio ambiente de um programa de pós-graduação em educação matemática, é que a pesquisadora concluiu que o problema citado merecia mais atenção, cuidado e respostas. Foi essa, por assim dizer, a gênese conceitual do atual projeto por ela coordenado: *A Disciplina*

de Análise em Cursos de Formação de Professores de Matemática.

A sua idéia a respeito dessa disciplina pode ser bem posta à maneira como aparece em Baroni, Teixeira e Nobre (2004): “concebe-se a Análise Matemática não apenas como uma tentativa de fornecer rigor e fundamento ao Cálculo, mas como um conjunto de objetos histórico-matemáticos, que criaram necessidades que não existiam, e para elas dispensaram esforços que culminaram em uma crise de fundamentos e no estabelecimento de novas concepções” (p. 181).

Com essa concepção em mente, os autores do presente trabalho passaram a pesquisar o que outros pesquisadores tinham a dizer sobre o tema, o que se tornou, sob alguns aspectos, a fundamentação teórica dos resultados da pesquisa que aqui apresentamos.

Uma vez que o conceito-chave da Análise é o de número real, o trabalho de Pasquini (2007) apresenta um estudo e uma proposta de introduzir os números reais via medição. Sua proposta se baseia principalmente no texto de Baroni e Nascimento (2005) cujo objetivo é

propor, seguindo sugestão de Henri Lebesgue (1875-1941), a retomada da idéia de medição de segmentos como forma primeira de se introduzir números reais positivos, num curso que forma professores de Matemática. Essa abordagem pode ser utilizada para motivar a apresentação de alguns conceitos matemáticos importantes tais como seqüências convergentes, seqüências de Cauchy e completude, que, por sua vez, viabilizam a criação de um novo modelo para os números reais (p.1).

Antes da introdução dos números reais, Baroni e Nascimento apresentam a noção de proporcionalidade no sentido de comensurabilidade, em concordância com o desenvolvimento histórico do conceito. É importante destacar, e Lebesgue salienta isso, que o processo de medição permite introduzir tanto os números que serão ditos racionais quanto aqueles que serão ditos irracionais; e também permite estabelecer claramente a relação entre proporcionalidade e racionalidade.

Vários outros aspectos referentes à disciplina de análise foram, também, alvo de investigações por pesquisadores brasileiros tais como Reis (2001), Pinto (2001), Ávila (2002), Bolognezi (2003), Bortoloti (2003), Souza (2003), Moreira, Cury e Vianna (2005), Batarce (2006), Lima (2006), Ciani, Ribeiro e Junior (2006) e Pinto (2009)¹. A maioria desses trabalhos apresenta resultados que diagnosticam e apontam as dificuldades dos alunos com a disciplina, mas, em geral não se percebe propostas explícitas para enfrentar os problemas detectados. Falaremos de alguns deles.

Reis (2001) questiona a forma como os cursos de análise geralmente são ministrados, afirmando que em boa parte dos mesmos há um excesso de formalismo e rigor na exposição dos temas, e sugere que o primeiro passo para melhor adequar a disciplina de análise à formação de professores seria “desenvolver um curso de Análise de acordo com as condições intelectuais dos alunos e seus conhecimentos prévios” (p. 200). O autor também ressalta a necessidade de superar a abordagem excessivamente rigorosa do ensino tradicional universitário como meio de desenvolver uma melhor formação do professor de matemática.

A disciplina de análise também motivou o estudo de Pinto (2001, 2009), que caracterizou o período de transição do cálculo para a análise como um momento de grande impacto e que acaba gerando tensão e ansiedade para os alunos; propõe, assim, uma discussão acerca da dicotomia

¹ Em Otero-Garcia (2011) há uma análise mais detalhada sobre esses e outros trabalhos relativos ao ensino de análise.

existente na universidade: primeiramente, quando os alunos ingressam, deparam-se com um trabalho desenvolvido para atentar aos objetivos do cálculo e ao perfil de entrada dos estudantes; posteriormente, o que encontram é uma preocupação dos departamentos em manter o padrão de excelência das disciplinas que desenvolvem os aspectos formais em matemática. A autora considera que essa dicotomia reforça o impacto causado na transição do cálculo para a análise, e apresenta a necessidade de “se investir em investigar meios de atenuar a transição do Cálculo para a Análise Real” (p. 144).

Outra vertente de discussões atenta mais especificamente para a importância da disciplina de análise na formação do professor de matemática. Ciani, Ribeiro e Júnior (2006) observam que aquelas disciplinas que compõem a grade curricular da graduação com as quais os egressos que atuam na educação básica não conseguem estabelecer vínculos diretos com a atuação profissional, não têm razão de permanecer nos currículos de licenciatura em matemática; dentre elas, é citada pelos estudantes a disciplina de análise.

Contrapondo-se a esse resultado, os estudos realizados por Moreira, Cury e Vianna (2005) indicam que os matemáticos consideram a disciplina de análise importante para o curso de formação de professores de matemática.

Assim, em síntese, as pesquisas, de modo geral, apontam para a necessidade de se rever os currículos de licenciatura no país, particularmente no tocante da disciplina de análise. Apontam também para a dificuldade que os futuros professores encontram em significar o aprendizado dessa disciplina. Além disso, parece haver um consenso de que uma das tarefas mais importantes do curso de formação de professores deveria ser a articular os conteúdos matemáticos ensinados com a prática docente do professor da escola básica.

A partir dos trabalhos apresentados, podemos observar que uma discussão sobre o papel da disciplina de análise em cursos de formação de professores de matemática é complexa e necessária. Pretendemos avançar fazendo um estudo sobre essa questão, abordando vários aspectos dela na tentativa de responder: por que análise na licenciatura?

Antes ainda, podemos questionar: é suficiente dizer que tal disciplina não é importante porque os egressos não a vêm contribuindo em sua atuação profissional? Essa problemática teria relação com a falta de conexão entre cálculo e análise? Que conteúdos deveriam ser contemplados numa disciplina de análise para licenciandos? Seria apenas uma questão de conteúdos? A maior dificuldade do aluno na disciplina está diretamente ligada ao trabalho pouco esclarecedor em relação à mesma em sua formação?

Acreditamos que para obter algumas dessas respostas deveremos lançar um olhar histórico sobre a disciplina, buscando entender, por exemplo:

- como a Análise se constituiu como disciplina no Brasil;
- se (e como) a aritmetização da Análise tem sido trabalhada à luz da história da matemática;
- que conteúdos podem ser caracterizados como componentes da estrutura da disciplina;
- qual a contribuição de matemáticos para o desenvolvimento da Análise;
- qual o movimento existente na busca da separação dessa disciplina nos cursos de licenciatura e bacharelado

Na tentativa de compor um quadro que possa nos dar respostas às questões acima, várias investigações serão necessárias; uma delas é a que apresentamos aqui e que é tratada com pormenores na dissertação de mestrado do segundo autor, Otero-Garcia (2011).

A Disciplina de Análise nos Cursos de Licenciatura em Matemática da UNESP de Rio Claro e na USP de São Paulo

Nessa pesquisa é traçada uma trajetória da disciplina de análise, com relação principalmente aos seus *objetivos, conteúdo e bibliografia*, em dois cursos de licenciatura em matemática: o da Faculdade de Filosofia, Ciências e Letras (FFCL) da USP, posteriormente transferido para o Instituto de Matemática e Estatística (IME), e o da Faculdade de Filosofia, Ciências e Letras de Rio Claro, posteriormente sob responsabilidade do Instituto de Geociências e Ciências Exatas (IGCE) da UNESP.

Em termos metodológicos, pode ser identificada com a modalidade denominada pesquisa qualitativa. A obtenção de dados foi feita por meio de análise de documentos, constituída, em síntese, de duas etapas: obtenção dos dados e análise dos resultados. Tais procedimentos metodológicos estão baseados principalmente em Bogdan e Byklen (1994), Tuckman (2002), Quivy e Campenhoudt (2003), Flores (1994), Bell (1993), Cohen e Manion (1994), Miles e Huberman (1994) e Lüdke e André (1986).

A coleta de dados foi iniciada junto ao arquivo do curso de matemática da UNESP de Rio Claro. Como era esperado, nem todas as grades curriculares ou programas de disciplinas foram encontrados, e para contornar esse problema, coletou-se também diários de classe elaborados por professores. Foram obtidos programas oficiais das disciplinas de análise desde 1959 (ano em que iniciou o curso de matemática) até 2009, com exceção dos anos de 1971, 1990 e 1991. Para esse anos, assim, tomou-se por base os diários de classe de que se falou antes.

A coleta de dados do curso de matemática da USP foi realizada junto aos arquivos do Centro de Apoio à Pesquisa em História (CAPH) da Faculdade de Filosofia, Letras e Ciências Humanas (FFLCH) e da Assistência Acadêmica do IME. Para o período em que o curso funcionava na FFCL (1934 a 1970), foram coletados guias, anuários e programas. Da mesma forma como aconteceu com a UNESP, também não foi possível obter todos os documentos oficiais para todos os anos². Nesse caso, porém, não encontramos diários de classe para cobrir as lacunas. Já a partir de 1970, quando houve a reforma universitária, a FFCL foi extinta e o curso de matemática ficou a cargo do recém criado IME, não se encontrou as dificuldades anteriormente relatadas, pois o IME publica, anualmente, desde 1971, catálogos de graduação onde é possível encontrar o elenco das disciplinas do curso desse instituto, bem como as suas ementas.

Com relação à *análise dos resultados*, foram seguidas as etapas de *redução, apresentação e conclusões*. Primeiramente, não houve dificuldades no processo de *redução* dos dados, uma vez que este estudo documental é bastante dirigido e o foco da pesquisa está nas grades curriculares e nos programas da disciplina de análise, ou em outros documentos que trouxessem as informações procuradas. Desse modo, os documentos pesquisados por si só já foram os elementos que nos permitiram estabelecer as relações e obter as conclusões desejadas. Com relação a *apresentação* dos dados, realizou-se uma análise da informação disponível e forneceu-se uma visão de conjunto, já que o interesse nessa etapa era unicamente descritivo. As *conclusões* foram obtidas durante todo processo de obtenção dos dados, redução e apresentação dos mesmos, uma vez que essas tarefas permitem que progressivamente se avance do descritivo

² Não encontramos os programas dos seguintes anos: 1939, 1940, 1941, 1943, 1944, 1945, 1946, 1948, 1949, 1950, 1952, 1955, 1957, 1958, 1961, 1963, 1969, 1970.

para o explicativo e do concreto para o abstrato.

É necessário observar que tanto no caso da UNESP quanto no da USP, coletou-se material não só sobre as disciplinas que hoje chamaríamos de análise, mas também sobre aquelas cujos nomes trouxessem em seus títulos a palavra *análise*, ou ainda outras que trabalhassem com conceitos da área de Análise. Essa decisão foi tomada porque já desconfiávamos de antemão que durante um bom período a disciplina de análise estava atrelada a outras como cálculo e topologia.

Da análise dos resultados é possível dizer que tanto na FFCL de Rio Claro, quanto na FFCL da USP, as primeiras disciplinas de *Análise Matemática*, como eram chamadas, funcionavam como uma espécie de eixo condutor do curso de matemática. Presentes em três anos do curso, tratavam de conceitos de conjuntos numéricos, funções de uma a várias variáveis, variáveis complexas, equações diferenciais e até espaços métricos e topologia.

A essa época não existiam cursos de análise e cursos de cálculo separadamente, essas disciplinas, assim, deviam cumprir tanto a parte rigorosa quanto a algorítmica. Entretanto, a ênfase aparentemente dada era a analítica que, pouco a pouco foi se perdendo, migrando num primeiro momento para as disciplinas optativas, até ser incorporado novamente ao curso, num segundo momento, já em disciplinas específicas da análise. Paralelamente a isso, as antigas disciplinas de análise foram se aproximando das atuais de cálculo.

Também, o movimento da disciplina nas duas instituições seguiu basicamente a mesma linha, a menos de questões pontuais e temporais, em geral, as modificações primeiro aconteciam no curso da USP para depois aparecerem no de Rio Claro, salvo pequenas exceções. Em ambos, houve a separação do cálculo e da análise na década de setenta e, em seguida, a análise da topologia. Essa última ocorreu mais cedo em Rio Claro que na USP, constituindo uma dessas exceções.

Esse movimento de separação das três disciplinas (análise, cálculo e topologia) parece ter relação com o próprio processo de institucionalização da Análise Matemática no Brasil, conforme descrito por Toledo (2008). Em seu estudo, o pesquisador aponta que até meados da década de setenta, o campo de investigação em Análise no país não estava dissociado das pesquisas matemáticas em geral. O caráter mais específico dessa área se daria apenas nas décadas de sessenta e setenta. Podemos, assim, notar uma coincidência de tempos que pode indicar uma espécie de processo dinâmico onde a especialização da área de Análise se reflete no ensino dessa, com conseqüências claras para as disciplinas que tratam dela.

É interessante, ainda, destacar uma diferença fundamental entre os dois cursos depois do processo de especialização do ensino de análise. Enquanto que no curso da UNESP as disciplinas de análise mantiveram um núcleo comum com o bacharelado (*Análise Matemática I* e *Análise Matemática II*), no curso da USP essa separação já era completa desde os primeiros anos do IME: a licenciatura tinha *Introdução à Análise* e o bacharelado *Análise Matemática I* e *Análise Matemática II*, independentes dessa primeira.

Retomando algumas considerações que já feitas no início deste ítem, os resultados obtidos também mostram que embora o ensino de análise já estivesse presente desde o início do curso da USP em 1934, o que entendemos por uma disciplina de análise hoje em dia só começa a ganhar forma na década de 1940 e se torna uma disciplina autônoma na década de sessenta. Quase que da mesma forma, no curso da UNESP não havia disciplinas específicas de análise ou cálculo nas

décadas de 1950 e 1960, tendo sido essa separação efetivada após a década de setenta.

Como explicitado anteriormente, a análise de resultados está centrada em três pontos: *objetivos*, *conteúdo* e *bibliografia* da disciplina. Assim, é cabível destacar esses três itens com relação aos demais resultados mais gerais.

Em relação aos *objetivos* das disciplinas, nossa preocupação era verificar se havia alguma referência ao papel que essa disciplina teria na formação do professor, entretanto, os *objetivos* nem sempre estiveram presentes nos programas das disciplinas, e mesmo quando presentes, quase nunca destacavam o aspecto da formação do licenciando. Além disso, os pontos destacados nesses objetivos praticamente não mudaram, sempre falando da questão da formação do matemático e da retomada com mais rigor de conceitos do cálculo.

De modo geral, no que diz respeito aos *conteúdos*, os resultados obtidos mostraram que, em ambos os cursos, os conteúdos trabalhados nas atuais disciplinas de análise, bem como sua seqüência, foram herdados daquelas primeiras *Análise Matemática* que indistintamente tratavam do cálculo e análise e não sofreram maiores transformações ao longo dos anos. Também, uma vez estabelecidas as disciplinas específicas de análise na década de setenta, sua estrutura geral pouco mudou até os dias de hoje.

Da mesma forma, a relativa inércia que observamos com relação aos *objetivos* e *conteúdos* também pode ser notada com a *bibliografia*. Muitas das referências utilizadas nos primeiros anos do curso ainda podem ser encontradas em ementas atuais. As obras mais comuns hoje em dia como as de Bartle, Rudin, Ávila, Elon e Djairo, começaram a ser adotadas logo quando tiveram suas primeiras edições publicadas, pelo começo da década de setenta, e de lá para cá, mantiveram-se presentes nos programas das disciplinas de análise.

Considerações Finais

Trouxemos aqui, conforme pretendíamos, muitas questões que motivaram o surgimento do projeto *A Disciplina de Análise em Cursos de Formação de Professores de Matemática* e a constatação do trabalho de Otero-Garcia (2011) que é parte desse projeto maior: a disciplina de análise está cristalizada; uma vez estabelecidas as disciplinas específicas de análise na década de setenta, sua estrutura geral, conteúdos e bibliografia não se alteraram profundamente até os dias de hoje, apesar das modificações políticas e filosóficas que passaram os cursos de formação de professores de matemática nesse período de quase quarenta anos. Esse resultado naturalmente nos impele a refletir se já não é hora de se repensar a respeito dessa disciplina em cursos de formação de professores.

É evidente que ainda muitos pontos estão em aberto. Há muito mais o que se pesquisar para responder àquela pergunta fundamental: por que análise na licenciatura? Entretanto, acreditamos que já demos mais um passo na direção de sua resposta (mais um, visto que nos trabalhos de outros pesquisadores que citamos alguns já foram dados).

Referências

- ÁVILA, G. (2002). O Ensino do Cálculo e da Análise. *Revista Matemática Universitária*, 33, 83-95.
- BARONI, R. L. S., TEIXEIRA, M. V., & NOBRE, S. R. (2004). A Investigação Científica em História da Matemática e suas Relações com o Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática. In: BICUDO, M. A. V., & BORBA, M. C. (Ed.), *Educação Matemática: Pesquisa em Movimento*. São Paulo: Cortez Editora, 164-185.

- BARONI, R. L. S., & NASCIMENTO, V. (2005). *Um Tratamento, Via Medição, para os Números Reais*. Rio Claro: SBHMat.
- BATARCE, M. S. (2003). *Um Contexto Histórico para Análise Matemática para uma Educação Matemática*. Dissertação de Mestrado, Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, Rio Claro, São Paulo, Brasil.
- BELL, J. (1993). *Como Realizar um Projecto de Investigação*. Lisboa: Gradiva.
- BOGDAN, R., & BIKLEN, S. (1994). *Investigação Qualitativa em Educação: Uma Introdução à Teoria e aos Métodos*. Porto: Porto Editora.
- BOLOGNEZI, R. A. L. (2006). *A Disciplina de Análise Matemática na Formação de Professores de Matemática para o Ensino Médio*. Dissertação de Mestrado, Pontifícia Universidade Católica do Paraná, Curitiba, Paraná, Brasil.
- BORTOLOTTI, R. D. M. (2003). *Emoções que Emergem da Prática Avaliativa em Matemática*. Dissertação de Mestrado, Universidade Federal do Espírito Santo, Vitória, Espírito Santo, Brasil.
- CIANI, A. B., RIBEIRO, D. M., & JÚNIOR, M. A. G. (2006). Formação de Professores de Matemática: um Ponto de Vista de Egressos. *Proceedings of IX Encontro Gaúcho de Educação Matemática*, Brasil, Caxias do Sul: Universidade de Caxias do Sul
- COHEN, L., & MANION, L. (1994). *Research Methods in Education* (4th ed.). Londres: Routledge.
- FLORES, J. (1994). *Análisis de Datos Cualitativos: Aplicaciones a la Investigación Educativa*. Barcelona: PPU.
- LIMA, E. B. (2006). *Dos Infinitésimos aos Limites: A Contribuição de Omar Catunda para a Modernização da Análise Matemática no Brasil*. Dissertação de Mestrado, Universidade Federal da Bahia e Universidade Estadual de Feira de Santana, Salvador, Bahia, Brasil.
- LÜDKE, M., & ANDRÉ, M. E. D. A. (1986). *Pesquisa em Educação: Abordagens Qualitativas*. São Paulo: EPU.
- MILES, H., & HUBERMAN, M. (1994). *Qualitative Data Analysis: An Expanded Sourcebook*. Londres: Sage.
- MOREIRA, P. C., CURY, H. N., & VIANNA, C. R. (2005). Por que Análise Real na Licenciatura? *Zetetiké*, 23, 11-42.
- OTERO-GARCIA, S. C. (2011). *Uma Trajetória da Disciplina de Análise e um Estado do Conhecimento sobre seu Ensino*. Dissertação de Mestrado, Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, Rio Claro, São Paulo, Brasil.
- PASQUINI, R. C. G. (2007). *Um Tratamento para os Números Reais via Medição de Segmentos: Uma Proposta, Uma Investigação*. Tese de Doutorado, Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, Rio Claro, São Paulo, Brasil.
- PINTO, M. M. F. (2001). Discutindo a Transição dos Cálculos para a Análise Real. In: LAUDARES, J. B., & LACHINI, J. (Ed.), *A Prática Educativa sob o Olhar de Professores de Cálculo*. Belo Horizonte: Fumarc, 123-145.
- PINTO, M. M. F. (2009). Re-visitando uma Teoria: O Desenvolvimento Matemático de Estudantes em um Primeiro Curso de Análise Real. In: FROTA, M. C. R., & NASSER, L. (Ed.), *Educação Matemática no Ensino Superior: Pesquisas e Debates*. Recife: SBEM, 27-42.
- QUIVY, R., & CAMPENHOUDT, L. (2008). *Manual de Investigação em Ciências Sociais* (5th ed.). Lisboa: Gradiva.

REIS, F. S. (2001). *A Tensão entre Rigor e Intuição no Ensino de Cálculo e Análise: A Visão de Professores-Pesquisadores e Autores de Livros Didáticos*. Tese de Doutorado, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, São Paulo, Brasil.

SOUZA, L. G. S. (2003). *Como Alunos do Curso de Licenciatura em Matemática que já Cursaram Uma Vez a Disciplina de Cálculo Diferencial e Integral Lidam com Alguns Conceitos Matemáticos Básicos*. Dissertação de Mestrado, Universidade Estadual de Londrina, Londrina, Paraná, Brasil.

TOLEDO, B. (2008). *Uma História do Processo de Institucionalização da Área da Análise Matemática no Brasil*. Tese de Doutorado, Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, Rio Claro, São Paulo, Brasil.

TUCKMAN, B. (2002). *Manual de Investigação em Educação*. Lisboa: Fundação Colouste Gulbenkian.