

## **DISEÑO DE ACTIVIDADES EN PLATAFORMA DIGITAL BASADAS EN LA TEORÍA APOE PARA EL LÍMITE DE UNA FUNCIÓN**

Mariana Morales López, Lidia Aurora Hernández Rebollar  
Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, México  
mariana.moralesl@alumno.buap.mx, lidia.hernandez@correo.buap.mx

**Resumen.** Se presenta el avance de una investigación cuyo objetivo es diseñar actividades en plataformas digitales y basadas en Teoría APOE para el aprendizaje del concepto de límite de una función en estudiantes de nivel medio superior. Se trata de un estudio cualitativo con actividades pensadas a partir de una descomposición genética del concepto de límite y adaptadas a GeoGebra. El concepto de límite presenta dificultades para la mayoría de los estudiantes de nivel medio superior, pero el uso de herramientas digitales en actividades fundamentadas en la Teoría APOE justifica teóricamente para contribuir en la construcción de este concepto.

**Palabras claves:** Límite, Teoría APOE, plataformas digitales.

### **Introducción**

Los estudiantes de nivel medio superior se enfrentan por primera vez al estudio del Cálculo, lo cual representa una ruptura con lo aprendido previamente en el Álgebra (Neira, 2013), se introducen nuevos elementos como cuantificadores y signos que pese a ser ya conocidos se usan ahora en contextos diferentes. En particular, el concepto de límite presenta muchas dificultades en los estudiantes como se ha descrito ampliamente en la literatura, dichas dificultades pueden ser epistemológicas (Sierpiska, 1987) o hasta de lenguaje por el uso común que solemos darle a la palabra límite (Artigue et al., 1995).

La teoría APOE (acrónimo de Acción, Proceso, Objeto y Esquema) estudia cómo se aprenden los conceptos matemáticos (Arnon et al., 2014) y brinda el sustento teórico a la investigación que se presenta. Asimismo, se ha estudiado ampliamente el uso de computadoras, programación o herramientas digitales para mejorar el aprendizaje de conceptos matemáticos. Desde la década de los ochenta se ha usado programación para la enseñanza de inducción matemática y el uso de dichas herramientas se estudió formalmente (Dubinsky, 1989). Posteriormente, se han realizado trabajos de investigación sobre las mejoras en el aprendizaje por el uso de computadoras en el Álgebra (Tall y Thomas, 1991). La suspensión presencial de actividades escolares por la pandemia de Covid-19 obligó a las y los docentes a buscar nuevas formas de enseñar matemáticas, es por ello, que las actividades propuestas en esta investigación se implementarán en ambiente digital.

La búsqueda de estrategias para contribuir al aprendizaje del concepto de límite fundamentadas en la Teoría APOE se ha abordado por varios investigadores, quienes parten de un análisis teórico (descomposición genética) que consiste en una descripción de las estructuras mentales que deben construirse para entender el concepto. En particular, existe una descomposición genética del concepto de límite que usó algunas actividades de codificación en computadora para probarla en estudiantes (Cottrill et al., 1996). Después, dicha descomposición genética fue sometida a análisis empírico y se refinó a partir del estudio de las respuestas a actividades de

estudiantes (Swinyard y Larsen, 2012). En esta investigación se usará la descomposición genética del límite de una función  $f$  cuando  $x \rightarrow a$  en su concepción dinámica de Hernández et al. (2021). Publicaciones más recientes dan cuenta de trabajos que se han realizado con estudiantes de pregrado como en la investigación de Afgani que usa la teoría APOE en un análisis descriptivo cualitativo con cuatro ítems de prueba para el aprendizaje de límite (Afgani et al., 2017) o el trabajo de Marsitin y Sesanti que usa el software matemático “Maple” y la teoría APOE con la misma finalidad (Marsitin y Sesanti, 2018).

Los estudiantes de nivel medio superior presentan dificultades con el aprendizaje del concepto de límite que es indispensable para las materias de Cálculo. Como lo mencionan Guerrero y Hernández (2020) se puede cambiar la forma tradicional de enseñar límites en el nivel medio superior usando actividades basadas en la Teoría APOE para construir estructuras mentales más completas. Asimismo, la pandemia de Covid-19 obligó a suspender las actividades presenciales en las escuelas y modificó la forma de trabajo al trasladar los aprendizajes a entornos y plataformas virtuales. Es por ello, que surge una necesidad apremiante de adaptar actividades fundamentadas en la teoría APOE a estas nuevas herramientas digitales y de probarlas empíricamente.

El objetivo de la presente investigación es diseñar y evaluar el resultado de la implementación de una secuencia didáctica, en plataforma digital, que esté basada en una descomposición genética de la Teoría APOE para favorecer el aprendizaje del concepto de límite en estudiantes de nivel medio superior.

De acuerdo con Arnon et al. (2014) “una vez que se definen los constructos de una teoría, los modelos son los que muestran cómo se relacionan y desarrollan. Los modelos sirven como base para que las teorías se prueben experimentalmente. En APOE, la descomposición genética hace eso” (p. 27). Así, los constructos de la teoría APOE son las estructuras mentales de Acción, Proceso, Objeto y Esquema y los mecanismos mentales de interiorización, coordinación, inversión, encapsulación y tematización.

Se trata de una investigación cualitativa ya que se busca justificar el diseño de actividades basadas en la Teoría APOE e implementadas en GeoGebra (Fraenkel et al., 2012). Inicialmente, las actividades fueron diseñadas por Morante (2020) y serán adaptadas a un ambiente digital. La justificación del diseño se realizará mediante un análisis de contenido respaldado en la Teoría APOE de la descomposición genética de Hernández et al. (2021) observando la correspondencia entre las actividades y los pasos de la descomposición genética.

Las actividades diseñadas buscan que el estudiante construya las estructuras mentales descritas en la descomposición genética al trabajar con representaciones numéricas y gráficas de algunas funciones. GeoGebra brinda herramientas que permiten que los estudiantes puedan acercarse (hacer zoom) en las gráficas, deslizar puntos sobre los ejes o sobre la curva de la gráfica, en la parte algebraica permite evaluar múltiples valores y tabularlos para observar su comportamiento. En un inicio, se espera que el estudiante realice actividades con algunas funciones y que posteriormente, guiado por algunas preguntas y ejercicios, reflexione sobre lo que ocurre y al interiorizar lo que responde pueda ir coordinando el proceso realizado en el dominio con el proceso realizado en el rango a través de la función para construir, en este punto, la concepción

métrica del concepto al tratarse de estudiantes de nivel medio superior y su primer acercamiento al concepto de límite.

### Referencias bibliográficas

- Arnon, I., Cottrill, J., Dubinsky, E., Oktac, A., Roa-Fuentes, S., Trigueros, M., & Weller, K. (2014). *APOS Theory A framework for research and curriculum development in mathematics education*. New York: Springer Science+Business Media.
- Artigue, M., Douady, R., & Gómez, P. (1995). Ingeniería didáctica en educación matemática. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 9(3), 281-308.
- Cottrill, J., Dubinsky, E., Nichols, D., Schwingendorf, K., Thomas, K., & Vidakovic, D. (1996). Understanding the limit concept: a research paradigm. *The Journal of Mathematical Behavior*, 15, 167–192
- Dubinsky, E. (1989). Teaching mathematical induction II. 7. *The Journal of Mathematical Behavior*, 8, 285–304
- Fraenkel, J., Wallen, N., & Hyun, H. (2012). How to design and evaluate research in education.
- Guerrero, J. J., & Hernández, L. A. (2020). Análisis de actividades didácticas para el estudio del límite de una función por medio de la teoría APOE. 2020, 1–19.
- Hernández, L.A., Ruiz, H. y Juárez, E. (2021). Descomposición genética de la concepción dinámica del límite de una función real. En prensa.
- Marsitin, R., & Sesanti, N. R. (2018). Limit Learning With Apos Theory and Maple to Develop Mathematical Communication And Critical Thinking. 160(Incomed 2017), 54–59.
- Morante, J. D. (2020). Una secuencia didáctica para la construcción de la definición formal del límite basada en teoría APOE.
- Neira, G. I. (2013). Dificultades detectadas al pasar del álgebra al cálculo en educación matemática. *Infancias Imágenes*, 12(1), 44–50. <https://doi.org/10.14483/16579089.4919>
- Sierpinska, A. (1987). Humanities students and epistemological obstacles related to limits. 18, 371–397. *Educational Studies in Mathematics*, 18, 371–397.
- Swinyard, C., & Larsen, S. (2012). Coming to understand the formal definition of limit: Insights gained from engaging students in reinvention. *Journal for Research in Mathematics Education*, 43(4), 465-493. *Education*, 43(4), 465–493. <https://doi.org/10.5951/jresmetheduc.43.4.0465>
- Tall, D., & Thomas, M. (1991). Encouraging versatile thinking in algebra using the computer. *Educational Studies in Mathematics*, 22(2), 125–147. <https://doi.org/10.1007/BF00555720>