

## LOS MODOS DE PENSAMIENTO EN LA COMPRESIÓN DE SUPERFICIES CUADRÁTICAS

Felipe de Jesús Jacobo Alfaro, María Guadalupe Vera Soria, Marcela Parraguez González  
Universidad de Guadalajara, Pontificia Universidad Católica de Valparaíso, México, Chile  
felipe.jacobo2948@alumnos.udg.mx, guadalupe.vera@academicos.udg.mx,  
marcela.parraguez@pucv.cl

**Resumen.** Se presentan los avances de una tesis de maestría cuyo objetivo es explorar el proceso de comprensión de superficies cuadráticas en estudiantes de tercer semestre de Ingeniería que desarrollan una secuencia didáctica con el empleo del programa *GeoGebra*. El análisis de datos utiliza el modelo de la comprensión en matemáticas y los modos de pensamiento de Sierpinska. Se trata de una investigación cualitativa de corte interpretativo, en la que se aborda la evidencia extraída de entrevistas y grupos de enfoque para evaluar la construcción de superficies cuadráticas, a través de la valoración de las distintas formas de percibir su significado.

**Palabras clave:** Modos de pensamiento, Estudio interpretativo, Superficies Cuadráticas.

### Introducción

Se presenta el avance de un proyecto de tesis de maestría en el que se pretende estudiar la comprensión de superficies cuadráticas por parte de estudiantes de tercer semestre de Ingeniería Mecánica Eléctrica del Centro Universitario de Ciencias Exactas e Ingenierías (CUCEI) de la Universidad de Guadalajara; quienes desarrollan una secuencia didáctica que incluye actividades en el entorno geométrico-algebraico del *GeoGebra*. La propuesta de actividades en la secuencia, tiene fundamento en dos modelos teóricos: la comprensión en matemáticas de Sierpinska (1994) y los modos de pensamiento sintético-geométrico, analítico-aritmético y analítico-estructural (Sierpinska, 2000). Estas perspectivas teóricas complementarias, establecen que un objeto matemático se construye mediante actos de comprensión relacionados en un proceso de interpretación, que se desarrolla cuando se articulan diferentes modos de pensar dicho objeto.

Los estudios que anteceden a este trabajo, dan cuenta de las dificultades que los estudiantes enfrentan en el aprendizaje de superficies cuadráticas, y aquellos que describen la implementación de propuestas para la enseñanza de superficies cuadráticas con base en algún marco teórico. Por ejemplo, Trigueros y Martínez-Planell (2007) realizaron una investigación sobre la visualización y abstracción de gráficas de funciones de dos variables en estudiantes de nivel superior de una universidad particular, tomando como fundamento el marco teórico de las acciones, procesos, objetos y esquemas (APOE) de Dubinsky y el modelo de visualización de Zazkis, Dubinsky y Dautermann (1996, citado por Trigueros y Martínez-Planell, 2007).

En este trabajo, los autores desarrollaron una descomposición genética para analizar las ideas sobre la representación de funciones de dos variables en el espacio tridimensional y condujeron siete entrevistas a estudiantes que habían tomado el equivalente a un curso de cálculo multivariable, para estudiar las construcciones previstas en la descomposición genética. En estas entrevistas, se utilizó un modelo o herramienta física llamada Kit 3D, que permite la representación de puntos, líneas y planos en el espacio de tres dimensiones.

Los resultados reportados señalaron que aunque la mayoría de los estudiantes dieron evidencia de coordinar la noción intuitiva de espacio tridimensional con el plano cartesiano de dos dimensiones y los números reales, para localizar puntos y dibujar planos paralelos a los ejes; ellos tuvieron dificultad para coordinar las diferentes representaciones de la intersección de planos fundamentales con superficies cuadráticas y con las proyecciones de esas intersecciones en un plano bidimensional, debido a problemas de visualización. Trigueros y Martínez-Planell (2007) concluyen señalando la importancia realizar las conexiones necesarias entre el esquema de subconjuntos de  $R^3$  y la noción intuitiva de espacio tridimensional, y considerar el uso de herramientas físicas como el Kit 3D para evocar la visualización de estas conexiones.

En el presente proyecto de investigación, la mediación del programa *GeoGebra* tiene la intención de brindar a los estudiantes un ambiente que permita el desarrollo de los esquemas tridimensionales de subconjuntos señalados en el trabajo de Trigueros y Martínez-Planell (2007), para los cuales ellos utilizaron materiales concretos como el Kit 3D, pero que resultan poco accesibles en contextos distintos a los de instituciones particulares en las que ellos llevaron a cabo sus experimentaciones. El objetivo de la investigación es describir el proceso de comprensión de superficies cuadráticas que estudiantes de tercer semestre de Ingeniería Mecánica Eléctrica del CUCEI, desarrollan a partir de los modos de pensamiento que identifican mediante la aplicación de una secuencia didáctica que emplea el programa *GeoGebra*.

### **Marco teórico**

El planteamiento desde el cual se examina la comprensión de las superficies cuadráticas, toma en consideración el proceso de construcción del concepto y el papel de los modos de pensamiento Sintético–Geométrico (SG), Analítico–Aritmético (AA) y Analítico–Estructural (AE) (Sierpinska, 1994 y 2000), como elementos de análisis para describir la comprensión conceptual en términos de las siguientes nociones centrales: Para Sierpinska (1994) la comprensión es un “acto” relacionado con un proceso de interpretación que se desarrolla conforme se validan ciertas suposiciones mediante la abstracción de objetos matemáticos. Las componentes que conforman un acto de comprensión son:

Existe, por supuesto ‘el sujeto de la comprensión’ (P) – la persona que comprende. Está aquello que P intenta comprender – ‘el objeto de la comprensión’ (X). Está aquello que el pensamiento de P se dirige o pretende en el acto de comprensión: ‘la base de la comprensión’ (Y). Y está la operación mental que liga el objeto de comprensión con su base (Sierpinska, 1994, p.29).

En un acto de comprensión los objetos matemáticos encuentran sentido en varias otras cosas consideradas como base de la comprensión, que pueden ser una representación o una percepción y en cuanto a las operaciones mentales, se puede decir que para que un objeto matemático se entienda, éste debe ser identificado, discriminado, generalizado y sintetizado. En cuanto a los modos de pensamiento (Sierpinska, 2000) son formas de ver y entender los objetos matemáticos que al interactuar entre ellos producen comprensión. En el modo de pensamiento SG los objetos son descritos directamente mediante visualización y se abstraen a través de sus características geométricas, mientras que en el modo de pensamiento AA los objetos se construyen de manera indirecta mediante la percepción de relaciones por medio de operaciones y procedimientos. Y en cuanto al modo de pensamiento AE, los objetos matemáticos se explican a partir de sus propiedades y características más generales.

## Metodología

El proyecto de investigación es de corte cualitativo con la estrategia específica del método interpretativo básico (Martínez, 2006), y se desarrolla en tres etapas:

1. En la primera fase se revisa la literatura del tema y los modelos teóricos para realizar el protocolo de investigación y diseñar las actividades de la secuencia didáctica, así como los instrumentos de evaluación.
2. Posteriormente, en la segunda etapa se implementan las actividades de la secuencia didáctica en un grupo de 40 estudiantes de tercer semestre de ingeniería, inscritos en un curso de Cálculo Avanzado en el CUCEI, y se aplica un cuestionario para verificar la comprensión del tema. Así mismo, se conducen seis entrevistas semiestructuradas con estudiantes que desarrollaron las actividades propuestas en la secuencia y grupos de enfoque con tres integrantes, a fin de ahondar en el significado de las superficies cuadráticas que pudieron interpretar a partir de las actividades en la secuencia.
3. Y finalmente, en la tercera fase del estudio, se realiza el análisis de las respuestas de los estudiantes en las actividades de la secuencia y las transcripciones de las entrevistas y grupos de enfoque, para describir en los resultados de la investigación, la evidencia sobre cuáles son los modos de pensamiento que los estudiantes incorporaron en el proceso de comprensión de las superficies cuadráticas.

## Avance de resultados

Actualmente la investigación va a comenzar la tercera etapa y ya se han implementado las actividades de la secuencia didáctica y el cuestionario final. En la presentación que se llevará a cabo en la XXIV Escuela de Invierno en Matemática Educativa, se van a exponer las actividades de la secuencia didáctica que incluyen el uso del programa *GeoGebra*, así como el avance en la estrategia de reducción y análisis de los datos que permitan dar cuenta del significado del concepto que los estudiantes reconocieron según el nivel de abstracciones logrado (identificación, discriminación, generalización o síntesis), y que son indicativos de la articulación de los modos de pensamiento implicados en el proceso de comprensión de las superficies cuadráticas.

## Referencias bibliográficas

- Martínez, M. (2006). *Ciencia y arte en la metodología cualitativa*. Trillas.
- Sierpinska, A. (1994). *Understanding in Mathematics*. London: The Falmer Press. Recuperado de la base de datos Ebrary (10096967).
- Sierpinska, A. (2000). On Some Aspects of Students' Thinking in Linear Algebra. In: J.L. Dorier (Eds.) *On the Teaching of Linear Algebra*, 23, 209-246. Dordrecht: Springer. doi: 10.1007/0-306-47224-4\_8
- Trigueros, M., & Martínez-Planell, R. (2007). Visualization and abstraction: Geometric representation of functions of two variables. In T. Lamberg & L. R. Wiest (Eds.), *Proceedings of the 29th Annual Conference of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, 100-107.