Conhecimentos de Professores de Pedagogia e Matemática sobre Problemas Combinatórios[1]

Cristiane de Arimatéa **Rocha**
Mestranda em Educação Matemática e Tecnológica, Universidade Federal de Pernambuco
Brasil
tiane_rocha@yahoo.com.br

Martha Cornélio **Ferraz**
Escola Estadual Paula Frassinetti, SEDUC-PE
Brasil
marthacferraz@yahoo.com.br

Resumo

Nesse trabalho procuramos analisar as estratégias de resolução de problemas combinatórios de 29 professores de formação em Pedagogia (13) e Matemática (16). Para isso, aplicamos o teste de problemas combinatórios produzido por Pessoa e Borba (2010) composto por 8 problemas o). Para análise, fizemos uso do programa SPSS elegendo como variáveis: Curso; Significados dos problemas combinatórios (arranjo, combinação, permutação e *produto cartesiano*) e Ordem de grandeza dos números que levam a maiores/menores possibilidade de resultados. Verificamos que os professores de Matemática privilegiaram o princípio multiplicativo, seguido por uso de fórmulas, enquanto que professores de Pedagogia utilizaram a listagem. Observamos que quando à ordem de grandeza dos números envolvidos nos problemas é menor não existe diferença significativa nas médias de acertos entre os professores de Pedagogia ou Matemática. Entretanto torna-se significativa quando a ordem de grandeza aumenta.

Palavras chave: Professores com formação em Pedagogia e Matemática, problemas combinatórios, estratégias de resolução.

Problemática e fundamentação teórica

National Council of Teachers of Mathematics (NCTM), desde 1989, sugere a integração da Combinatória no Currículo de Matemática devido a importância deste ramo no desenvolvimento do raciocínio lógico dos alunos nos diferentes níveis de escolarização. Corroborando com essa inserção os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) dos anos iniciais e finais do Ensino

[1] Pesquisa desenvolvida como requisito para disciplina Tópicos de Educação Estatística do Curso de Mestrado do Programa de Pós-Graduação EDUMATEC-UFPE sob a orientação das Professoras Dra. Rute Borba e Dra. Gilda Guimarães

Fundamental recomendam para esses níveis de ensino a resolução de situações-problema de Combinatória (combinações, arranjos, permutações e, especialmente, o princípio multiplicativo da contagem).

Em relação à importância da Combinatória, as orientações curriculares do Ensino Médio advertem para o crescimento das questões mundiais que priorizam as noções de “descrever e analisar um grande número de dados, realizar inferências e fazer predições com base numa amostra de população, aplicar as idéias de Probabilidade e Combinatória a fenômenos naturais e do cotidiano” (BRASIL, 2006, p.44).

Pessoa e Borba (2010) classificam os problemas combinatórios simples em *produto cartesiano, permutação*, *arranjo* e *combinação*, introduzindo na Combinatória o tipo de problema (*produto cartesiano*) que o PCN (BRASIL, 1997) nomeia de problemas com “ideia de combinatória”. Nessa pesquisa aplicaram um teste composto de 8 problemas em alunos dos anos iniciais do Ensino Fundamental e observaram que estes utilizam na resolução desses problemas estratégias de enumeração sistemática e percepção de generalização.

As autoras advogam a necessidade de investigar o conhecimento prévio dos alunos – desenvolvido desde os anos iniciais de escolarização – a fim de propor novas maneiras de abordar e ampliar esse modo de pensar que auxilia na compreensão de conhecimentos diversos – da Matemática e de outras áreas do conhecimento.

Barreto, Amaral e Borba (2007) identificam a presença de problemas dessa natureza em livros didáticos de matemática dos anos iniciais do Ensino Fundamental apresentando maior concentração de problemas de *Combinação,* seguidos por *Produto cartesiano, Permutação* e por fim os problemas de *Arranjo*. Observaram também que a utilização de representações simbólicas se mostrou bastante diversificada, com a utilização de desenhos, tabelas e até mesmo a presença em alguns livros do diagrama de árvores de possibilidades, mas a maior incidência ainda é somente de enunciados de problema.

Portanto, estas pesquisas apontam que a Combinatória se apresenta nas orientações curriculares, em livros didáticos e ainda que alunos dos anos iniciais utilizam estratégias interessantes de resolução desde esse nível de ensino. Dessa maneira, tem-se defendido que antes do ensino de Combinatória ser formalizado, o que geralmente acontece no Ensino Médio, outras práticas devam ser integradas ao Ensino Fundamental para que haja uma melhor compreensão dessa temática por alunos e professores.

Apesar destas recomendações, as propostas que propostas que lidam com o ensino de Combinatória nos cursos de formação inicial ainda são poucas, ou começam a vislumbrar pequenas iniciativas nas práticas individuais de alguns professores formadores.

Nesse contexto, precisamos refletir sobre os aspectos da formação dos professores que ensinam matemática no Ensino Fundamental e Médio. Batanero et al(1996) reflete sobre a importância do professor nas mudanças curriculares pois são eles quem decidem que conhecimentos devem enfatizar e como.

Contribuindo para verificar como os professores se relacionam com diversos aspectos de ensinar Matemática, especialmente Combinatória, pesquisadores propõem modelos para entender os saberes do professor. Ball (1991), de acordo com Sztajin (2002), defende que o conhecimento de Matemática que o professor possui se relaciona com seus pressupostos e suas crenças sobre ensino-aprendizagem, alunos e o contexto da sala de aula, diferenciando assim a maneira como cada professor ensina matemática.

Ball (1991 apud Sztajin, 2002) advoga que o saber disciplinar de Matemática apresenta três dimensões: *o conhecimento substantivo*, relativo às proposições, conceitos e procedimentos utilizado em matemática; *o conhecimento da natureza da matemática e do discurso matemático*, referente ao fazer matemática, sua organização como ciência e como área de conhecimento; e *o conhecimento de suas atitudes perante o assunto*, que diz respeito às ações pessoais, as respostas emocionais que a pessoa tem diante da Matemática e sua percepção sobre tais ações.

Compreender essas dimensões e suas especificidades proporciona ao professor assumir posturas que apresentem a matemática como *algo mais* que um conjunto de regras e fórmulas prontas e acabadas. Além desse saber disciplinar o professor que ensina essa disciplina deve estabelecer conexões, o que Ball (1991 apud Sztajin, 2002) define como *falar matemática*, ou seja, ir além das expressões utilizadas nos teoremas, proposições e definições estabelecendo um diálogo com relações e finalidade.

Desse modo, professores de formação em Pedagogia e Matemática possuem especificidades em relação ao saber disciplinar de Matemática e ainda em relação ao níveis de atuação, implicando conhecimentos de diferentes fontes, tais como o conhecimento específico dos conteúdos a serem trabalhados em sala de aula. Em relação a Combinatória, especificamente, necessitam compreender os diferentes significados dos problemas (arranjo, combinação, permutação e *produto cartesiano*), as relações e propriedades destes conceitos e as formas de representação simbólica que podem ser utilizadas para registro e operacionalização do conceito, o conhecimento de como um conceito se desenvolve e de fatores que podem influenciar este desenvolvimento.

Nesse sentido, alguns questionamentos permeiam nossos pensamentos: Que contribuições as experiências de ensino vivenciadas trazem para esse objetivo? Quais estratégias de resolução desses problemas são valorizadas pelos professores para minimizar tais dificuldades? Como esses saberes são constituídos pelos professores se não acontecem práticas formadoras específicas para esses objetivos? Que dificuldades os professores têm no ensino desse conteúdo?

Tais considerações nos fizeram refletir e definir a seguinte questão de investigação, foco da presente pesquisa:

Que estratégias de resolução dos problemas combinatórios são utilizadas por professores de diferentes formações (Pedagogia e Matemática)?

Para delimitar essa questão objetivamos:

- Identificar o desempenho de professores de diferentes formações na resolução de problemas combinatórios;
- Verificar o desempenho desses professores nos diferentes tipos de problemas combinatórios;
- Analisar as estratégias de resolução que são privilegiadas na resolução desses problemas;
- Comparar os desempenhos e as estratégias desses professores.

Método

Nessa pesquisa aplicamos o teste elaborado por Pessoa e Borba (2010) em 29 participantes, sendo eles 13 professores com formação em Pedagogia (codificados em P_1 a P_{13}, respectivamente) e 16 deles com formação em Licenciatura em Matemática (codificados em M_1

a M_{16}). Esses professores foram escolhidos pela disponibilidade que demonstravam para resolver o teste proposto. Não foi estipulado tempo para a resolução dos problemas

A análise descritiva dos dados coletados foi realizada por meio do software *Statistical Package for the Social Sciences* (SPSS) e verificou-se o desempenho dos professores a partir das variáveis: *Curso* (Pedagogia e Matemática); *Significados de Combinatória dos problemas* (*produto cartesiano*, arranjo, combinação e permutação); *Ordem de grandeza dos números* (que levavam a maiores ou a menores possibilidades nos resultados).

Além disso, foi feita uma análise qualitativa das estratégias e tipos de respostas apresentados professores, com alguns exemplos.

O teste aplicado com suas respectivas classificações de acordo com Pessoa e Borba (2010) foi apresentado a seguir:

Quadro 1: Teste proposto para Professores de Pedagogia e Matemática retirado da pesquisa de Pessoa e Borba (2010)

1. Maria tem 3 saias (uma azul, uma preta e uma verde) e 5 blusas (nas cores amarela, bege, branca, rosa e vermelha). Quantos trajes diferentes ela pode formar combinando todas as saias com todas as blusas? ***Produto cartesiano* – Maior ordem de grandeza (PCM)** **2.** Quantas palavras diferentes (com ou sem sentido) poderei formar usando as letras da palavra AMOR? **Permutação – Maior ordem de grandeza (PM)** **3.** As semifinais da Copa do Mundo serão disputadas pelas seguintes seleções: Brasil, França, Alemanha e Argentina. De quantas maneiras diferentes podemos ter os três primeiros colocados? **Arranjo – Maior ordem de grandeza (AM)** **4.** Uma escola tem 9 professores (Cristiano, Isabel, Laura, Mateus, Nívea, Pedro, Roberto, Sandra e Vítor), dos quais 5 devem representar a escola em um congresso. Quantos grupos diferentes de 5 professores pode se formar? **Combinação – Maior ordem de grandeza (CM)**	**5.** Para representante de turma da sala de aula se candidataram 3 pessoas (Joana, Mário e Vitória). De quantas maneiras diferentes poderão ser escolhidos o representante e o vice representante? **Arranjo – menor ordem de grandeza (Am)** **6.** Para a festa de São João da escola, tem 3 meninos (Pedro, Gabriel e João) e 4 meninas (Maria, Luíza, Clara e Beatriz) que querem dançar quadrilha. Se todos os meninos dançarem com todas as meninas, quantos pares diferentes poderão ser formados? ***Produto cartesiano* – menor ordem de grandeza (PCm)** **7.** Três alunos (Mário, Raul e Júnior) participam de um concurso em que serão sorteadas duas bicicletas. Quantos resultados diferentes podem ser obtidos no concurso? **Combinação – menor ordem de grandeza (Cm)** **8.** De quantas formas diferentes poderei arrumar as fotos de meu irmão, meu pai e minha mãe na estante, de modo que elas fiquem lado a lado? **Permutação – menor ordem de grandeza (Pm)**

Apresentação e Análise dos Resultados

Na busca de caracterizar os participantes da pesquisa observamos que 23 dos professores atuam na rede pública do Recife, o restante apenas na rede particular de ensino. Outro elemento observado foi em relação ao tempo de experiência dos participantes sobre o qual verificamos que 23 professores possuem mais de 5 anos de experiência de ensino, mas não foram variáveis tidas como significativas no desempenho dos professores.

Para analisarmos o desempenho dos professores nesse teste pontuamos cada problema com 1,25 e obtivemos o valor de 6,19 referente a média de Acerto Total dos participantes. A média de acertos por curso em Pedagogia alcançou média de 4,77 enquanto que os professores de Matemática alcançaram a média de 7,34.

Observamos ainda que 69% dos professores de Pedagogia (9) se encontram abaixo da média do acerto total, enquanto apenas 3 professores de matemática encontram-se abaixo dessa média. O teste de amostras independentes T indica que esta variável é estatisticamente significativa.

Em relação aos professores de Pedagogia notamos que o problema de maior dificuldade foi o de *combinação maior ordem de grandeza* (Problema 4) pois não houveram acertos e o de menor foi o de *produto cartesiano de maior ordem de grandeza* (problema 1), no qual todos os professores acertaram (Problema 1). A dificuldade apresentada no problema de *combinação* descrito pode ser pelo fato de se tratar de um número de possibilidade que ultrapassa 100, dificultando o processo de listagem e exigindo, a nosso ver a utilização de fórmulas.

Nos professores de Matemática o problema de maior dificuldade foi *combinação menor ordem de grandeza* (Problema 7). Ao analisarmos as médias de acertos por problema a partir do Teste de amostras independentes T, notamos que apenas os problemas de Arranjo Maior [T(27)= - 6,725; p < 0,0001], Permutação Maior [T (27)= - 5,409; p < 0,0001] e Combinação Maior [T (27)= - 5,160; p < 0,0001] são estatisticamente significativas. Os problemas do tipo *Produto cartesiano* não oferecem diferenças de desempenho entre os professores de diferentes formações, como podemos observar na Figura 1 que apresenta a média de acertos por tipo de problemas combinatórios.

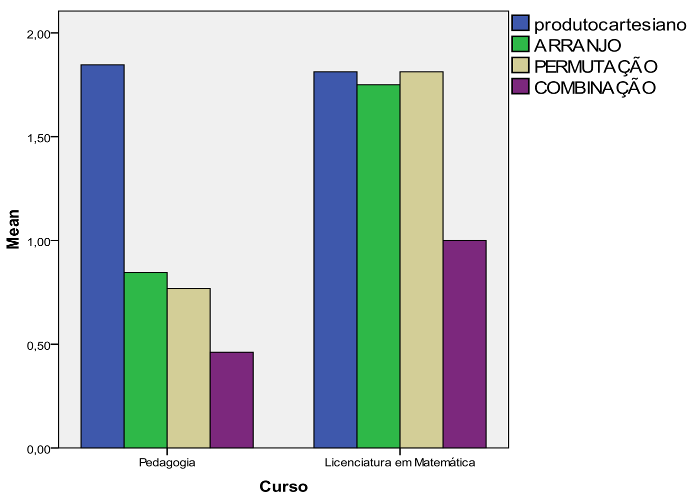


Figura 1: Média de acertos por significado dos problemas combinatórios pela formação inicial

Comparando com o estudo de Pessoa (2009) tanto os alunos dos anos iniciais quanto os professores de Pedagogia possuem maior numero de acertos nos problemas do tipo de *Produto cartesiano*. Esse fato pode se justificar por ser um tipo de problema trabalhado explicitamente nos anos iniciais, a partir do ensino da operação de multiplicação.

No entanto, o tipo de problema que possui menor desempenho se diferencia. Em relação aos professores de Pedagogia é o de *combinação* e em relação aos alunos desse nível de ensino o menor desempenho é em *permutação*. Podemos ainda observar que essa dificuldade existe nos dois tipos de problemas. No caso específico dos professores de matemática, a dificuldade dos alunos em relação aos problemas combinatórios, de acordo com Pessoa (2009), se configura na mesma organização disposta na Figura 1 (*produto cartesiano, arranjo, permutação* e *combinação*).

Outro desempenho analisado foi em relação a ordem de grandeza dos problemas combinatórios. Foram propostos problemas com números menores e números maiores para serem resolvidos pelos professores. Observamos que os professores de Pedagogia obtiveram maior média de acertos nos problemas de Menor Ordem de Grandeza, já os professores de Matemática apresentaram maior média de acertos em problemas de Maior Ordem de Grandeza. Após ser feito o teste T de análise de amostras independentes verificamos que as diferenças das médias entre os problemas de ordem menor pelo curso não são significativas. Já com problemas de maior ordem de grandeza existe uma diferença significativa entre a média dos acertos dos professores. Esse fato caracteriza que quando um problema possui menor ordem de grandeza e não precisa necessariamente da utilização de fórmulas para resolvê-los, os professores de Pedagogia são capazes de elaborar estratégias diferentes para sua resolução.

Pessoa (2009) observou que quando o número de possibilidades resultantes nas situações era maior, os estudantes demonstravam menor desempenho. Isso contraria de certo modo, o desempenho obtido pelos professores de Matemática, que obtiveram maior média de acertos quando o problema possuía uma ordem de grandeza maior. No entanto, se adéqua ao desempenho dos professores de Pedagogia. É importante lembrar que as análises realizadas estão considerando acerto apenas a finalização total do problema, com a resposta correta. No entanto, níveis intermediários de acerto ocorrem a partir das estratégias evidenciadas na solução dos problemas. Em seguida apresentamos uma breve análise das estratégias escolhidas pelos professores e que os levaram ao acerto dos tipos de problemas.

Estratégias evidenciadas pelos professores

Para analisar a estratégia evidenciada pelos professores utilizamos o quadro de estratégias elaborado por Pessoa (2009), no qual apresentamos apenas aquelas que foram evidenciadas pelos participantes e que explicitamos no quadro 2.

Quadro 2.: Estratégias utilizadas na resolução de problemas combinatórios

1. Não explicitou estratégia	Quando o professor apenas forneceu a resposta, correta ou incorreta.
4. Desenho	O professor desenhou as possibilidades, utilizando-se dos dados.
5. Árvore de possibilidades	O professor construiu uma árvore de possibilidades
6. Quadro / diagrama	O professor construiu um quadro ou um diagrama para representar o processo de solução.
7. Listagem de possibilidades	O professor listou as possibilidades de forma escrita, com os nomes ou com símbolos
10. Multiplicação inadequada	O professor relacionou o problema a um produto, entretanto, em situações nas quais ela não se aplica. A resposta é *incorreta sem relação*.
11. Multiplicação adequada	O professor relacionou o problema a um produto, com a possibilidade correta de seu uso.
12. Princ.Fund.Contagem	Quando o professor utilizou o PFC para resolver o problema
13. Uso inadequado de fórmulas	Quando o professor utilizou uma fórmula que não é adequada ao problema proposto.
14. Uso adequado de fórmulas	Quando o professor utilizou uma fórmula adequada ao que o problema solicita.
15. Percepção ou busca de regularidade	Quando iniciou a resolução através de uma estratégia qualquer, e, no decorrer desta, percebeu a generalização nas descobertas iniciais para outros casos.

Apresentamos o percentual das estratégias escolhidas em relação ao tipo de problema combinatório e a formação inicial dos professores no quadro 3. A presença de estratégias *não explicitadas* nesse quadro dificulta a análise da preferência dos professores na resolução, principalmente em relação aos professores de formação em Pedagogia.

Quadro 3: Percentual de tipo de estratégia por Curso e por tipo de problema

			Não explicitou estratégia	Desenho	Árvore de possibilidades	Quadro / Diagrama	Listagem	Multiplicação inadequada	Multiplicação adequada	PFC	Uso inadequado de fórmula	Uso adequado de fórmula	Percepção de regularidade
PEDAGOGIA	Ar	NG	61,5			7,7	30,8						
		NP	53,8			7.7	38,5						
	Comb	NG	61,5	7,7		7,7	15,4	7,7					
		NP	38,5	7,7	7,7		46,2						
	Perm	NG	46,1	7,7			38,5	7,7					
		NP	38,5				61,5						
	PC	NG	46,1	23,1		7,7			23,1				
		NP	46,1		30,8	7,7	15,4						
LICENCIATURA EM MATEMATICA	Ar	NG	6,25	6,25			6,25	6,25		56,25		18,75	
		NP	6,25		6,25	6,25			6,25	50	12,5	12,5	
	Comb	NG	18,75					6,25		18,75		56,25	
		NP	18,75		6,25		12,5		6,25	25	18,75	12,5	
	Perm	NG	6,25					12,5		37,5		37,5	6,25
		NP	12,5				18,75	6,25		43,75		18,75	
	PC	NG	6,25		31,25				62,5				
		NP	6,25		18,75		6,25	12,5	37.5	18,75			

Obs.1: PC= *produto cartesiano*; Perm. = permutação; Ar = arranjo; Comb. = combinação. NG = números grandes; NP= números pequenos.

Verificamos ainda que as estratégias adotadas pelos professores de Pedagogia estão na ordem de preferência que segue: listagem, desenho, árvore de possibilidade, quadro/diagrama, e por fim multiplicação adequada.

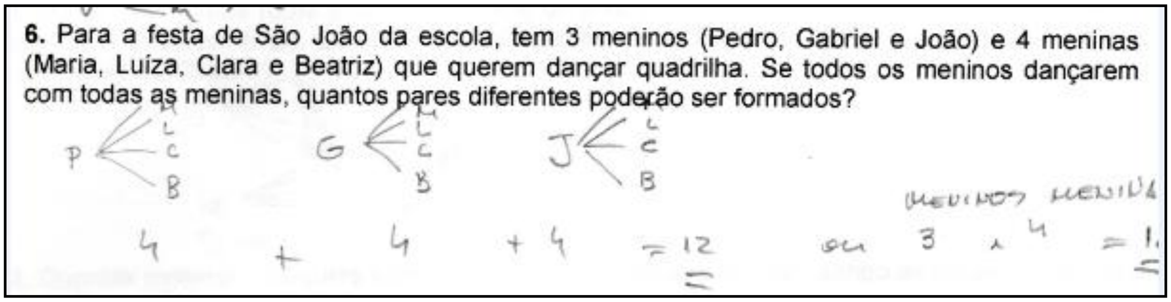
Observando as características dos professores de Matemática, verificam-se as estratégias adotadas por ordem de freqüência em que ocorrem: *princípio fundamental da contagem, uso adequado de formulas, multiplicação adequada, árvore de possibilidades, listagens*.

Acreditamos que as escolhas das estratégias são influencias direta da formação dos professores. A partir daqui faremos uma discussão sobre as escolhas das estratégias por tipo de problema combinatório.

Produto cartesiano

Observamos que as estratégias privilegiadas pelos professores de Pedagogia, após a *não explicitada* foi a á*rvore de possibilidades*, seguida pela estratégia de *desenho.* Acreditamos que um dos motivos para que as estratégias não explicitadas sejam as mais freqüentes por causa do resultado ser possível de se calcular mentalmente.

Em relação aos professores de matemática as estratégias privilegiadas foram a *árvore de possibilidades* e a *multiplicação adequada*. Todos os professores acertaram o problema de *produto cartesiano de maior ordem de grandeza* (PCM). Nesse tipo de problema os professores de Pedagogia obtiveram um maior numero de acertos que os de matemática.



6. Para a festa de São João da escola, tem 3 meninos (Pedro, Gabriel e João) e 4 meninas (Maria, Luiza, Clara e Beatriz) que querem dançar quadrilha. Se todos os meninos dançarem com todas as meninas, quantos pares diferentes poderão ser formados?

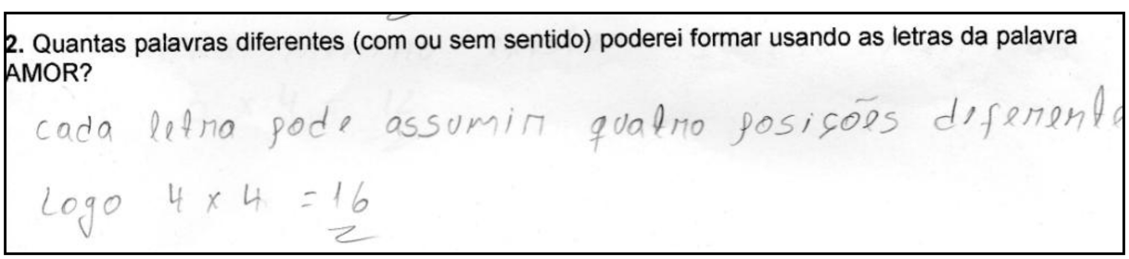
Figura 2: Protocolo (M1), com tipo de resposta correta com explicitação de estratégia, árvore de possibilidades.

Observamos ainda que alguns professores apresentam em seu protocolo mais de uma estratégia. Nesse caso (M1), a *árvore de possibilidades*, a *adição de parcelas repetidas* e a *multiplicação adequada*. No estudo de Pessoa (2009) a estratégia de desenho foi a privilegiada pelos alunos dos anos iniciais, após a não explicitada; seguida da listagem e da árvore de possibilidades. Segundo Pessoa (2009) nos anos finais e no Ensino Médio a estratégia privilegiada pelos alunos foi *multiplicação adequada*.

Alguns dos erros apresentados nesse tipo de problema (6) foram por causa da interpretação dada ao enunciado da questão, originando formas não sistemáticas de elaborar a contagem dos elementos desse conjunto.

Permutação

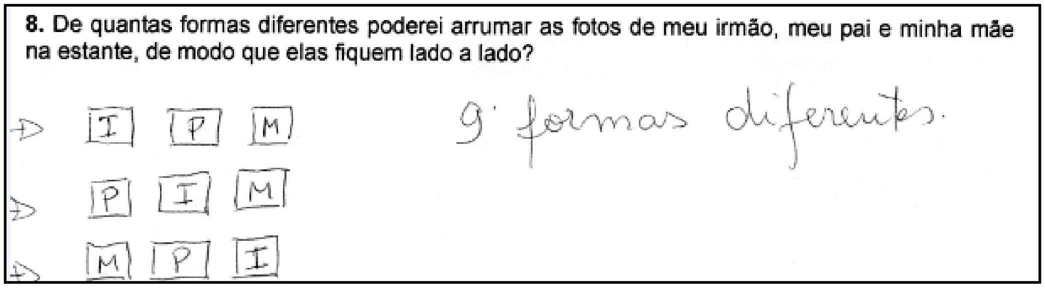
Para a *permutação* as estratégias escolhidas pelos professores de Pedagogia é a *listagem*, enquanto que professores de Matemática escolheram a utilização do *princípio fundamental da contagem,* seguida pelo *uso adequado de fórmulas*, *listagem* e *multiplicação inadequada*.



2. Quantas palavras diferentes (com ou sem sentido) poderei formar usando as letras da palavra AMOR?

Figura 3: Protocolo (M5), com tipo de resposta incorreta com explicitação de estratégia, Multiplicação inadequada.

A resposta 16 aparece algumas vezes nesse problema, mais sem explicitação da estratégia. Analisando esse protocolo explicitado pelo professor M5, entendemos que faz relação com o problema de *produto cartesiano*, no qual relaciona apenas com dois conjuntos um para quantidade de letras (4 letras) e outro com relação aos lugares (4 lugares), o que de fato não ocorre. Esse professor não considera a questão da ordenação das letras, imprescindível para o problema de *permutação.*


8. De quantas formas diferentes poderei arrumar as fotos de meu irmão, meu pai e minha mãe na estante, de modo que elas fiquem lado a lado?

I P M

P I M

M P I

9 formas diferentes.

Figura 4: Protocolo (P5), com tipo de resposta incorreta com explicitação de estratégia, Listagem.

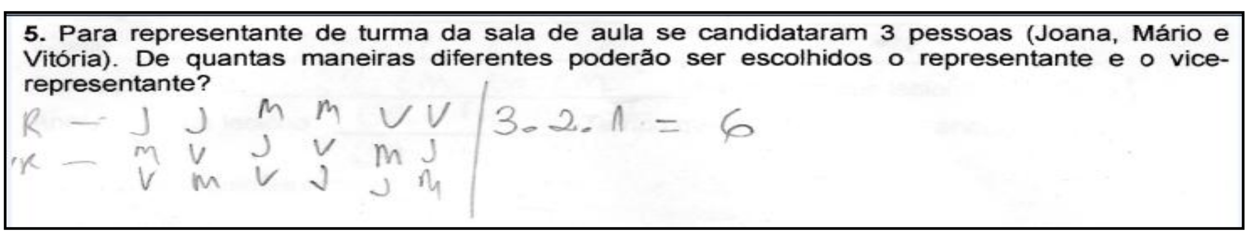
Nesse protocolo o professor P5 não compreende o que deve ser contado, não parece compreender a noção de possibilidades, ou seja, as possibilidades evidenciadas equivalem a disposição das fotos e não de cada foto sozinha.

Arranjo

Para esse tipo de problema os professores de Pedagogia elegeram a listagem como principal tipo de estratégia, enquanto que professores de Matemática escolheram a utilização do *princípio fundamental da contagem* na sua resolução.

Esse tipo de problema para ser resolvido necessita uma maior sistematização na *listagem* dos elementos que o problema do tipo *produto cartesiano*, pois além da escolha dos elementos de um conjunto, ainda necessita da ordenação desses elementos.

Da mesma forma que professores de Pedagogia, os alunos dos anos iniciais também escolherem a *listagem* como estratégia para resolução desses problemas (PESSOA, 2009). No entanto, o número de estratégias não explicitadas é a primeira estratégia adotada tanto nesse nível de ensino como nos outros. Os alunos dos anos finais e do Ensino Médio escolheram também a *listagem*, seguidos pela *multiplicação adequada*.


5. Para representante de turma da sala de aula se candidataram 3 pessoas (Joana, Mário e Vitória). De quantas maneiras diferentes poderão ser escolhidos o representante e o vice-representante?

R — J J M M V V

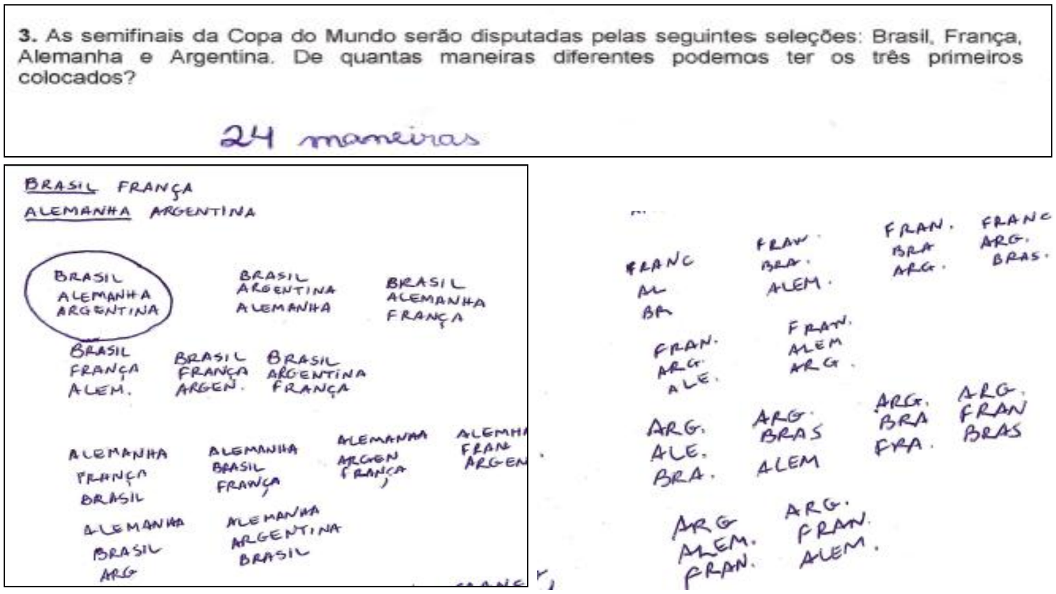
VR — M V J V M J

V M V J J M

3.2.1 = 6

Figura 5: Protocolo (M10), com tipo de resposta correta com explicitação de estratégia, listagem e/ou Princípio Fundamental da Contagem

Na Figura 5 o professor apresenta uma *listagem* dos elementos (ou enumeração) o que representa apenas a ordenação do conjunto (*permutação*) e não a escolha de dois. O mesmo se reflete na utilização do *princípio fundamental da contagem*, que ordena e escolhe três elementos e, não dois, como requerido no enunciado da questão. No entanto a resposta está correta, mas a representação não se adéqua completamente a estrutura do problema. Observamos ainda que nessa estratégia há a preocupação de enumeração de forma sistemática. Na Figura 6 apresentamos estratégias de *listagem* produzidas pelo professor P12 de Pedagogia.


3. As semifinais da Copa do Mundo serão disputadas pelas seguintes seleções: Brasil, França, Alemanha e Argentina. De quantas maneiras diferentes podemos ter os três primeiros colocados?

24 maneiras

BRASIL FRANÇA
ALEMANHA ARGENTINA

BRASIL ALEMANHA ARGENTINA
BRASIL ARGENTINA ALEMANHA
BRASIL ALEMANHA FRANÇA
BRASIL FRANÇA ALEM.
BRASIL FRANÇA ARGEN.
BRASIL ARGENTINA FRANÇA

ALEMANHA FRANÇA BRASIL
ALEMANHA BRASIL FRANÇA
ALEMANHA ARGEN FRANÇA
ALEMANHA BRASIL ARG
ALEMANHA ARGENTINA BRASIL

FRANC AL BR
FRAN BRA ALEM.
FRAN. BRA ARG.
FRANC ARG. BRAS.
FRAN. ARG. ALE.
FRAN. ALEM ARG.

ARG. ALE. BRA.
ARG. BRAS ALEM
ARG. BRA FRA.
ARG. FRAN BRAS
ARG ALEM. FRAN.
ARG. FRAN. ALEM.

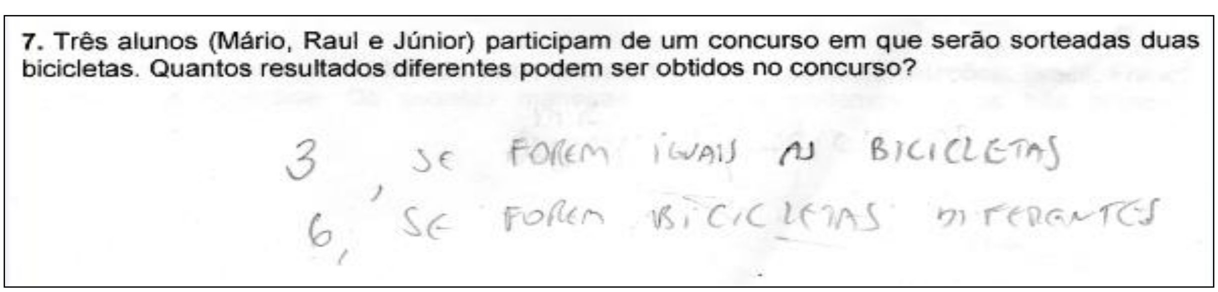
Figura 6: Protocolo (P12), com tipo de resposta correta com explicitação de estratégia, listagem.

Observamos a estratégia de *listagem* com sistematização dos elementos, no caso escolhe o time que será o primeiro colocado e faz todas as possibilidades, ordenando os demais times, e repete o procedimento para todos os times que disputam as semifinais. Existe inicialmente a escolha do time que será o primeiro colocado e depois uma ordenação dos demais times.

Combinação

Na combinação as estratégias escolhidas pelos professores de Pedagogia foram a *listagem* e *desenho*. Os professores de Matemática escolheram o *uso adequado de fórmulas* na sua resolução seguida pelo *princípio fundamental da contagem,* e ainda o *uso inadequado de fórmulas* e a *listagem*.

Na resolução do problema 7 de *combinação com menor ordem de grandeza* há variação de interpretações do enunciado deste problema. Observamos que professores de Matemática resolvem a questão analisando diferentes invariantes, posicionando-se criticamente em relação ao enunciado do problema. Na Figura 7, o professor interpreta corretamente as possibilidades desse tipo de problema ser de *combinação* (quando as bicicletas são iguais) ou de *arranjo* (quando as bicicletas diferentes), considerando a propriedade de ordenação que diferencia esses tipos de problema. Ou seja, a ordenação dos elementos, no caso bicicleta, produz novas possibilidades no problema de *arranjo* e não gera novas possibilidades no problema de *combinação*.


7. Três alunos (Mário, Raul e Júnior) participam de um concurso em que serão sorteadas duas bicicletas. Quantos resultados diferentes podem ser obtidos no concurso?

3, SE FOREM IGUAIS AS BICICLETAS,
6, SE FOREM BICICLETAS DIFERENTES

Figura 7: Protocolo (M10), com tipo de resposta correta sem explicitação de estratégia

Na Figura 8, o professor considera as bicicletas diferentes, ordenando as possibilidades, ou seja, compreendendo o problema como de *arranjo*. No entanto, apresenta outra possibilidade de interpretação do enunciado do problema considerando a propriedade de repetição das pessoas que concorrem ao sorteio.

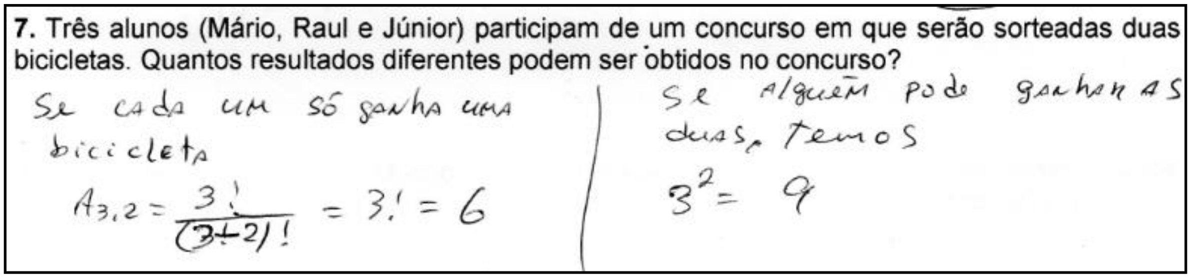


Figura 8: Protocolo (M2), com explicitação de estratégia, uso de fórmula

Essas possibilidades de entender o enunciado do problema 7 pode ser um indicativo da média de acertos nesse problema. No entanto, a discussão gerada a partir do enunciado desse problema pode permitir novas aprendizagens em relação aos invariantes do conceito de problemas combinatórios.

No problema 4 de *combinação com maior ordem de grandeza* a estratégia vitoriosa utilizada foi o *uso adequado de fórmula*, somente demonstrada pelos professores de Matemática, devido a formação dos mesmos. O professor P1 de formação em Pedagogia tentou listar de maneira sistematizada, no entanto, como o número de escolhas é da ordem de 100 possibilidades fica difícil de observar uma generalização.

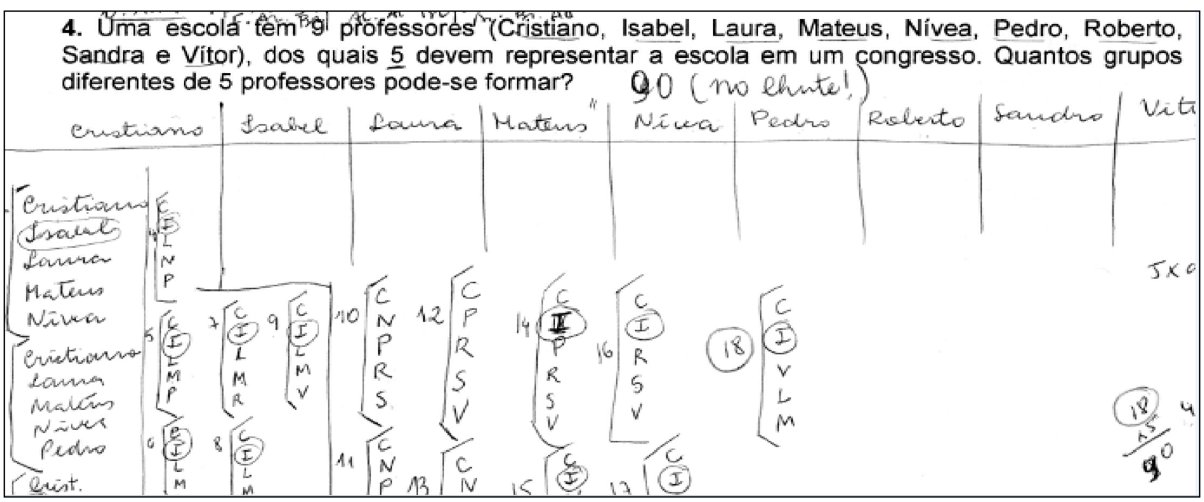


Figura 9: Protocolo (P1), com tipo de resposta incorreta com explicitação de estratégia, Listagem

Considerações

Notamos a partir da análise e comparação dos resultados que a dificuldade dos professores nos problemas do tipo Combinação é maior, assim como nos alunos do Ensino Fundamental e Médio do estudo de Pessoa (2009). E os problemas do tipo de *Produto cartesiano* é o que apresenta menor dificuldade.

A variável *tipo de escola* não foi estatisticamente significativa em relação a diferença entre a média de acertos dos problemas combinatórios, diferente do que foi apresentado na pesquisa de Pessoa e Borba (2010). O mesmo acontece com a variável *experiência de ensino*, que também não foi considerada estatisticamente significativa em relação aos acertos. Isso pode ser devido ao número reduzido de participantes da pesquisa em cada um dos grupos dessa variável.

Verificou-se ainda que quando a ordem de grandezas dos números envolvidos nos problemas é menor não existe diferença significativa entre as médias de acertos entre professores de Formação em Pedagogia ou Licenciatura em Matemática. Entretanto torna-se significativa quando a ordem de grandeza aumenta.

As estratégias privilegiadas pelos professores de Licenciatura em Matemática foram o Princípio Fundamental da Contagem, seguido por uso adequado de fórmulas, enquanto que professores de Pedagogia evidenciaram estratégia de listagem.

Referências

Barreto, F.; Amaral, F. & Borba, R. (2007) Como o raciocínio combinatório tem sido apresentado em livros didáticos de séries iniciais. *Caderno de Trabalhos de Conclusão de Curso de Pedagogia*. Recife: UFPE.v. 2, p. 1-21.

Batanero,C.; Godino, J. & Navarro-Pelayo, V. (1996).*Razonamiento combinatorio*. Madri: Ed. Sintesis.

Brasil. (1997) Ministério da Educação. Secretaria de Educação Média e Tecnológica. *Parâmetros Curriculares Nacionais,* 3 Matemática. Brasília.

____. (2006)Ministério da Educação, Secretaria da Educação Básica. *Orientações Curriculares para o Ensino Médio*: Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias, Vol 2, Brasília: SEF/MEC.

Pessoa, C. (2009) Quem dança com quem: o desenvolvimento do Raciocínio Combinatório do 2º ano do Ensino Fundamental ao 3º ano do Ensino Médio. *Tese.* Pós-graduação em Educação da UFPE. Recife:UFPE.

Pessoa, Cristiane & Borba, Rute. (2010) O raciocínio combinatório do início do Ensino Fundamental ao término do Ensino Médio. *Anais do X Encontro Nacional de Educação Matemática*, Salvador.

Sztajin, P. (2002) O que precisa saber um professor de matemática? Uma revisão da literatura americana dos anos 90. *Educação Matemática em Revista* – Revista da Sociedade Brasileira de Educação Matemática, nº 11A – Edição Especial