XIII CONFERÊNCIA INTERAMERICANA DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA
2011 CIAEM 50 anos do Comitê Interamericano de Educação Matemática
26 - 30 Junho, 2011
Recife, Brasil

Conhecimentos de Professores que ensinam Matemática sobre Problemas de Arranjo e Combinação[1,2]

Cristiane de Arimatéa **Rocha**
Mestre em Educação Matemática e Tecnológica, Universidade Federal de Pernambuco
Brasil
tiane_rocha@yahoo.com.br

Resumo

Nesse artigo temos objetivo de analisar quais conhecimentos os professores que ensinam matemática possuem dos problemas de arranjo e combinação. Nesse sentido, realizamos uma entrevista com seis professores (2 nos anos iniciais, 2 nos anos finais do Ensino Fundamental e 2 no Ensino Médio) que utilizavam problemas combinatórios (arranjo e combinação), além de protocolos de resolução de alunos sobre esses problemas selecionados da pesquisa de Pessoa e Borba (2010). Verificamos que existem dificuldades na diferenciação dos problemas de *arranjo* e *combinação* nos professores dos diferentes níveis tanto na leitura do enunciado, quanto em situação de correção da estratégia de resolução apresentada por um aluno. Essa dificuldade pode interferir na sugestão de práticas que propiciem a construção do raciocínio combinatório.

Palavras chave: Ensino de Combinatória; Conhecimentos do Conteúdo e Pedagógico; Ensino Fundamental e Médio;

Problemática

Documentos de organização curricular como o National Council of Teachers of Mathematics (NTCM, 1989) enfatizam a importância da Combinatória para a construção do raciocínio lógico nos alunos de diferentes níveis escolares. Parâmetros Curriculares Nacionais (BRASIL, 1997) indicam a necessidade do trabalho eu incentive a resolução de problemas combinatórios desde os anos iniciais.

Barreto e Borba (2010) verificam a presença de problemas combinatórios em coleções de

[1] Este artigo é parte integrante da dissertação Formação Docente e o Ensino de Problemas Combinatórios: diversos olhares e diferentes conhecimentos, desenvolvida no Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática e Tecnológica (EDUMATEC- UFPE) sob a orientação da Professora Dra. Rute Elisabete de Souza Rosa Borba.

[2] Esta pesquisa foi parcialmente financiada pela Fundação de Amparo à Ciência e Tecnologia do Estado de Pernambuco (Facepe – APQ 1095-7.08/08) e pelo Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (MCT/CNPq – 476665/2009-4)

livros didáticos dos anos iniciais do Ensino Fundamental. Do mesmo modo, Albuquerque e Silva (2010) identificam essa ocorrência nos livros didáticos dos anos finais do Ensino Fundamental. Essa incidência confirma, de certo modo, as orientações dos PCN e induz a necessidade de pesquisas que investiguem o ensino de Combinatória os diferentes níveis de ensino e não apenas no Ensino Médio, investigando entre outras possibilidades, o conhecimento dos alunos, dos professores para promover novas ideias e atitudes em relação a construção dos conceitos de Combinatória nesses diferentes níveis de ensino.

Vergnaud (1986) na Teoria dos Campos conceituais identifica que para a construção de conceitos matemáticos envolvidos em situações-problema três dimensões que influenciam nessa apreensão: significados envolvidos (explícitos ou implícitos), propriedades invariantes (relações conservadas) e representações simbólicas (diferentes modos de apresentar a solução de um problema).Pessoa e Borba (2009a) fundamentadas nessas dimensões, observaram para os problemas combinatórios simples, diferenças relativas as suas estruturas, identificando os significados de produto cartesiano, permutação, arranjo e combinação, apresentadas no Quadro 1.

Quadro 1: Estrutura dos problemas de arranjo e combinação fundamentadas na pesquisa de Pessoa e Borba (2010)

SIG	SITUAÇÃO– PROBLEMA	POSSÍVEL REPRESENTAÇÃO	INVARIANTES
ARRANJO	Para representante de turma da sala de aula se candidataram 3 pessoas (Joana, Mário e Vitória). De quantas maneiras diferentes poderão ser escolhidos o representante e o vice representante?	**Listagem** Pode ser considerada como a estratégia que deve ser valorizada porque promove a ideia de sistematização	Ordenação de elementos de um mesmo conjunto gera novas possibilidades; Há escolhas de subgrupo de elementos;
COMBINAÇÃO	Uma escola tem 9 professores (Cristiano, Isabel, Laura, Mateus, Nívea, Pedro, Roberto, Sandra e Vítor), dos quais 5 devem representar a escola em um congresso. Quantos grupos diferentes de 5 professores pode se formar?	**Divisão como um processo de redução de agrupamentos repetidos**.	Ordenação de elementos de um mesmo conjunto **não** gera novas possibilidades; Há escolhas de subgrupo de elementos

Pessoa e Borba (2010) identificaram que desde os anos iniciais do Ensino Fundamental, os alunos utilizam estratégias de listagem (enumeração sistemática) na resolução desses problemas e por meio delas algumas conseguem alcançar a percepção de generalização.

Em relação aos significados apresentados, os problemas de *arranjo* e *combinação* são os que necessitam a escolha de agrupamentos de um determinado conjunto, o que pode oferecer maior dificuldade para os alunos e professores. Sabemos que o invariante de ordenação é a principal diferença entre esses problemas, pois a consideração ou não, de sua presença nos agrupamentos dos elementos do subconjunto escolhido, é fator essencial no momento da resolução de situações de contagem.

Entender essas diferenças entre os problemas combinatórios pode auxiliar no planejamento de situações de aprendizagem nos diferentes níveis. Nesse contexto, consideramos a relevância de investigações que procurem analisar os conhecimentos de professores que ensinam matemática em relação Combinatória, um conteúdo específico de Matemática que permeia tanto o Ensino Fundamental como o Ensino Médio.

Fundamentação teórica

Algumas pesquisas advogam a necessidade de compreensão dos conhecimentos do professor que possibilite a ação de ensinar. Shulman (2005) em suas pesquisas define o *knowledge base*, a base do conhecimento sobre a qual identifica as categorias descritas a seguir:

> a) conhecimento do conteúdo; b) conhecimento didático geral, tendo em conta especialmente aqueles princípios e estratégias gerais de manejo e organização da classe que transcendem o âmbito da disciplina; c) conhecimento do currículo, com um especial domínio dos materiais e dos programas que servem como "ferramentas para o ofício" do docente; d) conhecimento didático do conteúdo: esse especial amalgama entre matéria e pedagogia que constitui uma esfera exclusiva dos professores, sua própria forma especial de compreensão profissional; e) conhecimento dos alunos e de suas características; f) conhecimento dos contextos educativos, que abarcam desde o funcionamento do grupo classe, a gestão e financiamento dos distritos escolares até o caráter das comunidades e culturas; e g) conhecimento dos objetivos, das finalidades e dos valores educativos, e de seus fundamentos filosóficos e históricos. (SHULMAN, 2005, p.11).

Shulman (2005) dentre essas características do conhecimento de base, o conhecimento didático do conteúdo deve ser foco de pesquisas. Esse conhecimento abrange a maneira de pensar do professor e reflete nas escolhas das ações para formular e apresentar a matéria, ou seja, refere-se ao ensino da disciplina.

Percebemos então a importância desse conhecimento para formação do exercício profissional do professor. Fundamentados nessa investigação, outros pesquisadores, como Ball (1991), traz diferentes olhares que contribuem para a complementaridade de questões a serem consideradas na formação de professores, especificamente em relação à disciplina de matemática.

Hill, Rowan e Ball (2005) explicitam o conhecimento matemático necessário ao professor que ensina matemática:

> ... neste trabalho de ensino inclui a explicação de termos e conceitos aos alunos, a interpretação de suas afirmações e soluções, analisar e corrigir a abordagem que os manuais trazem sobre determinado tópico, utilizar representações coerentes na aula, bem como proporcionar aos seus alunos exemplos de conceitos matemáticos, algoritmos e demonstrações (HILL, ROWAN, BALL, 2005, p.373)[3].

Essas pesquisas avançam na tentativa de descrever esse conhecimento como multidimensional, Ball et al (2008) indicam uma série de outros domínios de conhecimentos.

Portanto, o professor que ensina Matemática precisa se apropriar de conhecimentos de diferentes naturezas, tais como o conhecimento específico dos conteúdos a serem trabalhados em sala de aula – em termos de significados que os conceitos podem assumir, as relações e propriedades destes conceitos e as formas de representação simbólica que podem ser utilizadas

[3] Tradução nossa

para registro e operacionalização do conceito, o conhecimento de como um conceito se desenvolve e de fatores que podem influenciar este desenvolvimento.

O conhecimento do conteúdo e seu ensino representam a relação do conteúdo matemático em jogo com o conhecimento do ensino desse conteúdo. Nesse sentido, acreditamos que a relação entre o conhecimento de combinatória e seu ensino demanda para o professor dos diferentes níveis, um saber que possibilite a construção a partir do raciocínio dos alunos e as estratégias utilizadas por eles, de processos que possibilitem a superação de dificuldades desses alunos. Desse modo, os professores necessitam relacionar o conhecimento de combinatória com o conhecimento do ensino desse conteúdo; necessitam ainda entender o processo de construção do raciocínio dos alunos e verificar as estratégias de ensino dos mesmos para propor sugestões de superação. Assim, delimitamos como problema da pesquisa.

Quais conhecimentos professores que ensinam matemática no Ensino Fundamental e Médio são identificados, por meio de entrevista, sobre os problemas de arranjo e combinação?

Método

Nesta investigação analisamos o que dizem professores que ensinam Matemática no Ensino Fundamental e Médio, a partir da discussão sobre os problemas de arranjo e combinação e das análises individuais de protocolos de alunos que resolveram essas situações-problema. Para isso realizamos uma entrevista semi-estruturada com seis professores que ensinam matemática, sobre os quais apresentamos suas características sobre formação e atuação no Quadro2.

Quadro 2: *Caracterização dos Participantes da Pesquisa*

Prof.	**Formação**	**Anos de Ensino**	**Atuação**	**Preferência de Atuação**
PAI_1	Pedagogia; Especialização; Mestrado em andamento.	25 anos	Anos iniciais do Ensino Fundamental.	-----------
PAI_2	Pedagogia; Mestrado.	12 anos	Anos iniciais do Ensino Fundamental	----------
PAF_1	Licenciatura em Matemática; Especialização; Mestrado em Andamento	12 anos	4º e 5º anos, Anos finais do Ensino Fundamental e Ensino Médio	Ensino Fundamental
PAF_2	Licenciatura em Matemática; Especialização ; Mestrado em Andamento	10 anos	4º e 5º anos, Anos finais do Ensino Fundamental e Ensino Médio	Ensino Fundamental
PEM_1	Licenciatura em Matemática; Mestrado	8 anos	Anos finais do EF e Ensino Médio	Ensino Médio
PEM_2	Licenciatura em Matemática; Especialização Mestrado em Andamento	16 anos	Anos finais do EF e Ensino Médio	Ensino Médio

Como observamos os professores entrevistados participam ou participaram de Pós-graduação o que de certo modo, auxiliou o desenvolvimento da entrevista, pois compreendiam o objetivo de um trabalho de pesquisa. O instrumento de coleta utilizado se dividiu em três momentos: o primeiro pedimos a partir do enunciado identificassem semelhanças e diferenças nos problemas do Quadro 3 retirados de Pessoa e Borba (2010) no qual pedimos para que agrupassem por tipo de problema.

Quadro 3: *Caracterização dos Problemas retirado da pesquisa de Pessoa (2009)*

1. Maria tem 3 saias (uma azul, uma preta e uma verde) e 5 blusas (nas cores amarela, bege, branca, rosa e vermelha). Quantos trajes diferentes ela pode formar combinando todas as saias com todas as blusas? ***Produto cartesiano* (PCM)**	**5.** Para representante de turma da sala de aula se candidataram 3 pessoas (Joana, Mário e Vitória). De quantas maneiras diferentes poderão ser escolhidos o representante e o vice-representante? **Arranjo (Am)**
2. Quantas palavras diferentes (com ou sem sentido) poderei formar usando as letras da palavra AMOR? **Permutação (PM)**	**6.** Para a festa de São João da escola, tem 3 meninos (Pedro, Gabriel e João) e 4 meninas (Maria, Luíza, Clara e Beatriz) que querem dançar quadrilha. Se todos os meninos dançarem com todas as meninas, quantos pares diferentes poderão ser formados? ***Produto cartesiano* (PCm)**
3. As semifinais da Copa do Mundo serão disputadas pelas seguintes seleções: Brasil, França, Alemanha e Argentina. De quantas maneiras diferentes podemos ter os três primeiros colocados? **Arranjo (AM)**	**7.** Três alunos (Mário, Raul e Júnior) participam de um concurso em que serão sorteadas duas bicicletas. Quantos resultados diferentes podem ser obtidos no concurso? **Combinação (Cm)**
4. Uma escola tem 9 professores (Cristiano, Isabel, Laura, Mateus, Nívea, Pedro, Roberto, Sandra e Vítor), dos quais 5 devem representar a escola em um congresso. Quantos grupos diferentes de 5 professores pode se formar? **Combinação (CM)**	**8.** De quantas formas diferentes poderei arrumar as fotos de meu irmão, meu pai e minha mãe na estante, de modo que elas fiquem lado a lado? **Permutação (Pm)**

No segundo momento visamos verificar o quanto os docentes dos diferentes níveis de ensino distinguiam os problemas de *arranjo* dos de *combinação* a partir da resolução dos alunos. Para isso entregamos o protocolo do Aluno A (na época do teste cursava o 3º ano) retirado do estudo de Pessoa (2009). Assim, pedimos para o professor interpretar a compreensão desse aluno na resolução dos problemas e para falar da estratégia escolhida em relação a diferenças de estruturas apresentadas. O problema 5º problema (Am) é de *arranjo simples* enquanto que o problema 7º problema (Cm) pode ser considerado de *Combinação simples*, ambos com menor ordem de grandeza. Apresentamos na Figura 1 os protocolos de solução do Aluno A extraídos da pesquisa de Pessoa (2009) sobre problemas de *arranjo* e *combinação*, selecionados para entrevista.

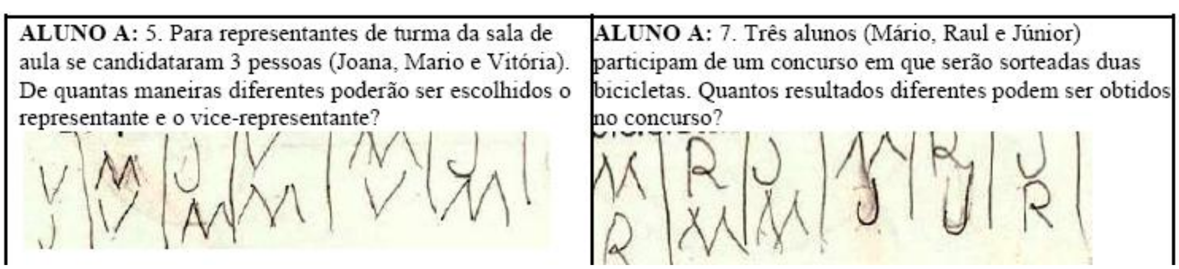

FIGURA 1: Protocolo para entrevista sobre problemas de arranjo e combinação retirado do estudo de Pessoa (2009)

Escolhemos esse protocolo por se tratar de uma estratégia de resolução simples que é a listagem que se apresenta em todos os níveis de escolaridade. Além disso, o aluno resolveu do mesmo modo as duas estruturas diferentes, não levando em consideração a importância, ou não, da ordem nos problemas.

No terceiro momento pedimos que os professores entrevistados, com base nas dificuldades apresentadas pelos alunos nas fases anteriores, propusessem situações que contribuíssem para a superação das mesmas. Observamos que os erros em relação ao procedimento apresentados pelo Aluno A seriam a *Cópia ou reprodução de possibilidades*, no qual o aluno A repete a mesma possibilidade durante a listagem e a questão da ordenação em relação ao significado de *combinação* utilizada por A.

Resultados

Os dados foram analisados de maneira predominantemente qualitativa, a partir das falas dos professores, na qual discutiram sobre diferentes tipos de problemas combinatórios, analisaram as estratégias de alunos na resolução desses problemas e sugeriram propostas de práticas para superação das dificuldades de compreensão desses alunos.

Diferenças entre problemas de arranjo e combinação, identificadas pelos professores nos enunciados dos problemas

Entregamos inicialmente os problemas dispostos no quadro 3 separados e pedimos que os professores agrupassem os problemas de acordo com a estrutura do problema. Apenas os professores PEM_1 e PAF_1 agruparam corretamente os problemas de arranjo e combinação nesse primeiro momento, aparentando considerar corretamente a presença ou não de ordenação nas diferentes situações.

O professor PAF_2 apresentou uma distribuição dos problemas diferente. No grupo denominado de *combinação em que a ordem é indiferente* ele agrupou os problemas (4(CM), 7(Cm) com repetição e o 6(PCm)), trazendo a questão da ordenação, no entanto os problemas selecionados apresentam duas estruturas diferentes a de *combinação* e a de *produto cartesiano.* O Problema 6 (PCm) abrange inicialmente dois conjuntos (meninos e meninas) para serem agrupados em pares, enquanto que a *combinação* trabalha apenas com um conjunto do qual serão escolhidos subconjuntos do mesmo.

Outro grupo foi nomeado de *combinação em que o elemento não pode se repetir*, no qual são agrupados problemas de três diferentes estruturas *arranjo*, *combinação* e *permutação* (2(PM), 3(AM), 5(Am), 7(Cm)). PAF_2 quando questionado a respeito do nome desse grupo, respondeu conforme o fragmento abaixo:

> ***PAF₂:*** *Eu não sei o nome técnico. Seria de arranjo só que eu não sei se tem um nome menos formal porque arranjo é um nome muito matemático. Seria uma situação de multiplicação, onde você teria que excluir o elemento anterior, alguma coisa desse tipo. <u>Excluir o elemento que já foi utilizado</u>. <u>Se eu tenho três opções para ser representante e vice e Cris já é um candidato então para o vice Cris não pode ser representante e vice, tem que ser feita a exclusão porque Cris não pode assumir as duas posições assim como, por exemplo, na classificação aqui (Problema 3) dos times também, Brasil, França, Argentina e Alemanha, se o Brasil for o primeiro ele não pode ser segundo</u>. Teria que diferenciar como o AMOR também. Se eu peguei a letra A e tenho só as opções de letras e todas diferentes, se o anagrama começa por A, então eu não vou usar nas outras posições. É questão da escolha do elemento já ter sido usado.*

A ideia de exclusão de elementos utilizada no Princípio Fundamental da Contagem foi bastante evidenciada por PAF_2, sendo a questão da ordenação, essencial na diferenciação de problemas de *arranjo* e *permutação* dos problemas de *combinação,* deixada em segundo plano por esse professor. A *repetição* ou não de elementos na mesma possibilidade foi destacada pelo mesmo para a separação dos problemas, mas percebe-se, contudo que o sentido que PAF_2 deu para o termo repetição não é o mesmo adotado nos manuais de ensino, ou na Teoria

Combinatória. Portanto, esse professor chamou atenção para um aspecto essencial a problemas de Combinatória (ordenação), mas preferiu agrupar os elementos de forma menos convencional.

Os professores dos anos iniciais agruparam os problemas pela semelhança de quantidades e características de enunciados, como observamos no extrato a seguir.

> **PAI$_2$:** *2(PM) e 8 (Pm) o sentido da pergunta, o nível da pergunta é mais elementar...ele não faz comparativo entre grupos que os outros fazem; 3(AM), 5(Am) e 7(Cm) todos eles dão uma quantidade específica de pessoas e de elementos e pede quantas maneiras diferentes esses elementos podem ser agrupados... Também como o outro não tem comparativos entre mais grupos dentro do problema. Sempre assim tantos elementos e de quantas formas diferentes podem ser agrupados; os três têm essa mesma característica; 7(Cm) e o 5(Am) estão até mais próximos que o 3(AM) na verdade, porque estão trabalhando com a mesma quantidade, mas a pergunta tem a mesma característica; 1(PCM), 6 (PCm) e 4 (CM); faz um comparativo entre grupos e a pergunta é mais elaborada.*

Portanto, parece não considerar a questão da ordenação. Já os professores dos anos finais se aproximaram da classificação convencional em alguns aspectos, mas não usaram a nomenclatura convencional e os professores do Ensino Médio agruparam os problemas pela classificação usual dos problemas combinatórios, utilizando a nomenclatura formal

Diferenças entre problemas de arranjo e combinação, identificadas pelos professores na avaliação dos protocolos de alunos

Nesse momento apresentamos aos professores os protocolos da Figura 1 para que os professores avaliassem as estratégias dos alunos. Corroborando com o resultado anterior, os professores dos anos iniciais do Ensino Fundamental, não parecem diferenciar os problemas pelos diferentes significados. Vejamos os fragmentos no momento em que perguntamos se a estratégia é válida para os dois tipos de problema:

> **PAI$_1$:** *Acho que no final os dois eles tem que refazer. Tem que organizar essa maneira de fazer. Não está legal não.*
> **PAI$_2$:** *Com certeza. É uma estratégia bem elaborada. Dessa forma o aluno ele conseguiu visualizar e fazer todos os agrupamentos. Facilita a não repetição. Na listagem isso é muito mais comum porque é difícil de visualização rápida*

Diferentemente, os professores dos anos finais fazem observações apenas sobre a estratégia do aluno, não se detendo as diferenças desses significados. Vejamos:

> **PAF$_1$:** *Eu vejo aqui no **5(Am)** que ele colocou JM, JM duas vezes ele tá repetindo. O que aconteceu com o primeiro lugar? Parece que ele confundiu na metade do caminho... Os três primeiros ele colocou representante e vice e nos três últimos ele trocou vice e representante. O **7º** problema **(Cm)** ele está utilizando a mesma estratégia. Só que ele não errou, ele conseguiu pensar direitinho. Ele pensou o primeiro sorteio e o segundo sorteio. Porque isso muda não é, a ordem eu ser o primeiro a ganhar bicicleta e você ser o segundo a ganhar bicicleta.*
> **PAF$_2$:** *O procedimento do Problema **5(Am)** é correto, ele compreendeu o problema...ele está numa fase inicial de compreensão desse problema, com o raciocínio manual. Só que a gente fica na dúvida. Será que ele realmente compreendeu o procedimento de resolução como uma multiplicação ou está só vendo as possibilidades?... No **7º** problema **(Cm)** conseguiu entender o enunciado. Só que ele entende o enunciado sem reposição. Porque você vê que em nenhuma situação ele coloca a mesma pessoa, nem na primeira bicicleta, nem na segunda, é sempre excluindo. Então se Mário ganhou então só falta agora Raul e Júnior, se Raul ganhou então Mário*

e assim por diante.[…]Sim, totalmente válida, mas não permite a gente, sem conhecer o aluno, sem entrevistar sem nada saber se ele compreendeu ou não a idéia de combinação ou não.

No Ensino Médio os professores identificam os problemas como significados diferentes como podemos observar nos fragmentos abaixo:

PEM$_1$: *A estratégia é válida, o que, a meu ver, deixou ele numa situação complicada, a título de um erro total foi o fato dele ter se perdido na primeira questão e repetido. E o Problema 7 é uma questão se o aluno não tiver cuidado da ordem importar até um aluno já de Ensino Médio que tenha trabalhado ele pode se complicar e dar 6 possíveis soluções.*
PEM$_2$: *Não é valida porque no Problema 5 se encaixa, mas no Problema 7 não. Veja que ele utilizou a mesma idéia, mas não percebeu, como eu inicialmente não tinha percebido que eram problemas de contextos diferentes que no caso agora, ele vai se juntar agora com o 4.*

Nas transcrições acima, observamos que excetuando PEM$_1$, os demais professores tiveram dificuldades em distinguir esses significados, tanto a partir do enunciado, quanto na etapa de correção da resolução desses problemas por alunos. A questão da ordenação pode oferecer distração, como se acredita ter acontecido com o professor PAF$_1$ que no primeiro momento separou corretamente esses dois problemas, no entanto, posteriormente quando pedido para corrigir o Aluno A no Problema 7(Cm), indicou, equivocadamente, a presença de ordenação. O professor PEM$_2$ no momento em que se depara com as resoluções do aluno A verifica que são problemas de natureza diferentes, o que anteriormente não o tinha feito. Muitas observações foram feitas em relação à estratégia escolhida pelo Aluno A para resolver as situações.

Os professores que atuam nos anos iniciais ao analisarem esses protocolos trouxeram olhares interessantes sobre a compreensão e a estratégia de resolução produzida por aluno A. O professor PAI$_1$ parece entender a ausência de ordenação no Problema 7(Cm) no entanto, quando justifica essa idéia não explicita a idéia de ordem e, sim, a noção de chance, como observado no extrato a seguir:

PAI$_1$: *Eu acho que ele fez uma estratégia mais difícil, porque ele pegaria Mario e fazer correspondência com os outros; depois pegava Raul e fazia também e ver o que não coincidia aqui. Parece que um deles vai ter mais chance de ganhar... é um resultado diferente, mas parece que Raul vai ter mais chance, porque ele aparece 4 vezes. [conta quantas vezes os outros aparecem] É tem a mesma chance. Se pegarmos os três primeiros, Mario vai ter mais chances e o coitado do Junior não. Já no final, ele vai ter mais chances. Então, não está bem distribuído não.*

Essa noção de chance pode ser explicada pelo Problema 7 (Cm) que traz como contexto um concurso, no qual a sorte (o acaso) pode ser considerada. No entanto, o enunciado pede apenas a questão da quantidade de possibilidades. Logo, podemos observar, mais uma vez, a proximidade que existe entre a Combinatória e a Probabilidade, indicada por diversos autores. Ressaltamos ainda que essa proximidade, se não bem trabalhada, refletem por vezes, na compreensão de professores. Nesse exemplo, notamos a confusão entre possibilidades e probabilidade, em especial a noção de chance.

O professor PAI$_2$ não parece distinguir os problemas. A principal diferença de olhar entre os dois professores dos anos iniciais ocorre quando existe a análise ou avaliação da estratégia utilizada pelo Aluno A. Enquanto o professor PAI$_1$ acredita que a estratégia de listagem não está bem organizada, o professor PAI$_2$ advoga

PAI$_2$: *Ele utilizou duas estratégias: uma foi usar as letras iniciais dos nomes para facilitar a relação e segunda fez em forma de, vamos dizer assim isso não é uma tabela não, de coluna... e eu*

> *acho uma criança para chegar a uma estratégia assim ... é um trabalho que eu já consigo desenvolver e inicialmente eles fazem tudo assim, ou escrevem o nome todo... aqui houve uma síntese, fez mais rápido do que um aluno que escreveria nome por nome ou desenharia bonequinhos.... já se deparou com essa atividade antes.. Eu acho que é impossível não ter se deparado. Só se ele for um aluno maior, mas pela letra não é um aluno grande...então de alguma forma o trabalho que a professora desenvolve, ela dispõe na questão espacial no quadro, ela mostra... pode ter contribuído para essas formas, a forma de síntese, a organização.*

Portanto, PAI_2 observa que o aluno construiu nessa estratégia uma organização, a escolha da letra inicial, a representação em colunas; compara com outros níveis de desempenho de alunos enfatizando o trabalho que o docente teve para auxiliar nessa sistematização. Parece transparecer o conhecimento do professor sobre os seus alunos, demonstrando algumas etapas e suas características na busca por uma organização na resolução desse problema.

Assim como os professores dos anos iniciais, os professores dos anos finais do Ensino Fundamental também observaram apenas o procedimento utilizado pelo Aluno A para resolver os problemas propostos e não se detém na questão da ordenação, principal diferença dos problemas de *arranjo* e *combinação*.

PAF_1 observou a repetição de alguns itens na listagem desenvolvida pelo aluno A no Problema 5, também observada por ambos os professores do Ensino Médio. O professor PAF_2 não se prende a repetição, por outro lado se preocupa com a compreensão demonstrada pelo Aluno A nesse procedimento. Analisa se a partir daí o aluno conseguiria entender a estrutura do problema de modo a fazê-la a partir de uma multiplicação.

Diferentemente dos demais professores, no Ensino Médio os professores apresentam a diferença entre os dois tipos de problema. O professor PEM_1 identifica desde o primeiro momento a questão da ordenação como se pode verificar no extrato a seguir:

> **PEM_1:** *O que eu vejo aqui no Problema 5 é o aluno tentar descrever todas as possíveis soluções; ele ordenou, acredito que isso está sendo importante para ele a título de ordem, o primeiro representante e o segundo vice, colocando as iniciais como sendo os nomes...Ele tentou fazer a exaustão de todas as possibilidades. O comando básico ele entendeu, porque se você tem 3 pessoas para escolher 2 então sempre tem uma que vai ficar de fora. No problema 7 também entendeu isso. Ele começou dessa vez com a preocupação em trocar logo com as duas pessoas... A meu ver já se percebe uma evolução no ordenamento da resolução nessa questão em relação à anterior...um cuidado maior do aluno.*

Constatamos nas falas desse professor a preocupação evidente com a ordenação no tratamento desses problemas, durante o processo de listagem do aluno A. O professor PEM_2 parece entender os problemas e seus significados diferentes, no entanto, na sua justificativa esse professor evoca a possível repetição de elementos e não a ordenação.

Assim, no contexto apresentado, verificamos que há lacunas no conhecimento dos professores em relação a diferença dos problemas de *arranjo* e *combinação*, tanto a partir do enunciado, como no momento de avaliar as estratégias dos alunos. Apesar de apresentarem certas dificuldades em diferenciar os significados dos problemas, os professores evidenciam, a partir dos diálogos, elementos interessantes sobre o *conhecimento pedagógico de combinatória*, como podemos verificar a seguir.

Conhecimento Pedagógico dos professores sobre os problemas de arranjo e combinação

Nesse momento perguntamos aos professores sugestões sobre estratégias de superação das dificuldades do Aluno A. Esse aluno apresentou dois equívocos: o primeiro em relação ao Problema 5, no qual reproduziu elementos da listagem em relação aos alunos que evidenciam nas suas estratégias de resolução alguma dificuldade. O segundo em relação a não ordenação do Problema 7, pois pode ser entendido como um problema de *combinação*, no qual a ordem não gera novas possibilidades. Vejamos os comentários dos professores sobre o Aluno A, em relação a reprodução de possibilidades. Observamos na transcrição da entrevista que os professores PAI_2 e PAF_2 não observam a repetição de possibilidades do Aluno A. Os demais professores observam a repetição, mas apenas PAF_1 e PEM_1 propõem sugestões. O professor PAF_1 recomenda o procedimento a seguir:

> **PAF_1:** *Tentar perguntar a ele como foi que ele fez. Porque foi que ele repetiu. Se ele tinha esquecido aquele outro. Porque no final ele achou as possibilidades todas. Só que ai se a gente for contar isso ai ele tem possibilidades repetidas e tem uma que está em excesso que é o MV e VM que ele colocou mais de uma vez. Eu iria tentar fazer isso aqui pelo diagrama de flechas*.

Logo, sugere buscar do aluno a descrição do processo adotado, o que pode permitir a discussão e socialização de diferentes estratégias em sala. No entanto, ele não menciona essa prática. Indica outra estratégia, o *diagrama em flechas.* Percebemos, entretanto, que apesar de ser possível de responder utilizando essa estratégia e auxiliar a sistematização de uma estratégia de listagem, algumas considerações em relação a estrutura do problema de arranjo evidenciada.

Esse problema indica a seleção dos elementos de um mesmo conjunto, em subconjuntos ordenados, ou seja, dado o conjunto inicial de alunos da sala (Joana, Mario e Vitória) devemos quantificar os pares ordenados (representante, vice-representante) que podemos identificar. O diagrama de flechas sugere a utilização de dois conjuntos nos quais serão distribuídos os elementos entre eles, e não a seleção de subconjuntos ordenados. Uma estratégia de resolução mais natural utilizaria o *diagrama de árvores*:

Verificamos ainda que a partir desse tipo de estratégia pode haver a sistematização e possível discussão do Princípio Fundamental da Contagem. Também observamos que a exclusão dos Constatamos que apesar de ter inicialmente diferenciado os tipos de problemas combinatórios, mesmo assim sugere uma estratégia que pode confundir ou não os alunos nessa diferenciação. Vejamos a sugestão do professor PEM_1.

> **PEM_1:** *Aparentemente ele esta diferenciando. Na verdade tem resposta que tá se repetindo, não sei se foi algum equívoco ... Ele repetiu. Não sei se o aluno se confundiu, não teve a preocupação de retomar para vê se realmente não tem respostas iguais. Ele aparentemente foi listando, sem observar se a resposta que colocou não foi algo que tinha escrito anteriormente. Ele compreendeu que de 3 pessoas ele escolhe 2, ele entendeu isso. Ele tentou fazer a exaustão de todas as possibilidades. O comando básico entendeu, porque se você tem 3 pessoas pra escolher 2 então sempre tem uma que vai ficar de fora.*

O cuidado para retomar ao final da listagem pode auxiliar o aluno no processo de sistematização. Essa estratégia de revisar a solução de um problema é defendida por muitos pesquisadores, em especial, Batanero et al (1996) quando explicita no currículo de matemática da Espanha, as atitudes necessárias ao bloco de *número e operações*. Dentre elas destaca "disposição favorável a revisão e melhora do resultado de qualquer contagem" (BATANERO et al, 1996, p.81). Contrapondo-se a essa atitude, para o professor PAI_2, está o aluno, quando adota a postura que descreve:

> **PAI_2:** *O aluno tem a mania de querer terminar logo as coisas. Não tem esse cuidado de retomar o que foi feito.*

O professor PAF_2 avalia a compreensão do Aluno A e ressalta a relação entre estratégia de listagem evidenciada e a percepção de uma multiplicação. Observamos o extrato abaixo:

> **PAF_2***: Essa estratégia é totalmente válida diante das possibilidades, mas assim não consigo perceber aqui se ele consegue ligar isso aqui com uma multiplicação***. E:** *Como é que a gente podia fazer isso ele chegar a uma multiplicação?*
> **PAF_2**: *Essa estratégia para ele sair listando. Ele compreendeu o problema, uma estratégia correta de resolução, mas acho que depois daqui você poderia buscar: - Vamos resolver de outro jeito? Ou você poderia até forçar mesmo a barra, colocar assim 30 pessoas, imagine a turma com 30 alunos na sala e vou escolher um representante e um vice, quantas opções você teria? E talvez ele começasse a fazer e perceber que o trabalho fica muito cansativo...discutir com ele outras estratégias menos trabalhosas, criar outras situações para que percebesse que isso é uma multiplicação, precisaria colocar outras situações, você não poderia chegar direto e dizer, olhe isso é uma multiplicação o que perderia a graça da percepção*.

Observamos a importância do planejamento do professor para atividade de ensino. A exploração de situações similares e ainda a preferência pela a construção do aluno. O aumento do número de possibilidades pode restringir a utilização da estratégia de listagem, entretanto destacamos que a utilização da estratégia de listagem de maneira sistemática pode facilitar a generalização, a exemplo do Aluno E, possibilitando a relação com a multiplicação.

Ressaltamos, as sugestões de prática em relação a presença ou não de ordenação. Como verificamos os professores dos anos iniciais e finais do Ensino Fundamental não observam os erros a partir da ordenação, portanto não sugerem atividades de superação. Entretanto, em relação à temática de ordenação PAF_2 exemplifica:

> **PAF_2:** *são aqueles em que a ordem não vai fazer diferença, Então acho que nesse caso seria pegar essas situações de exemplo como de representante de classe, que tanto faz ser Maria e João como João e Maria poderia começar com essa idéia deixar evidente que a ordem não vai influenciar e pegar também situações em que a ordem influencia. Por exemplo, a disputa de um campeonato de futebol Palmeiras em primeiro e Corinthians em segundo, é uma situação que vai se alterar: uma coisa é ser o primeiro, outra coisa é ser diferente*.

Observamos a proposta de discutir por meio de situações-problema de Combinatória a propriedade de ser ou não ordenada. Embora a resolução de problemas ser característica do fazer matemática, o professor deve refletir sobre a escolha das situações que possibilitem a aprendizagem. Em relação aos contextos propostos notamos que tanto a ideia de representantes de classe, quanto a disputa de um campeonato em 1º e 2º lugares são situações que representam a propriedade de ordenação. O professor do Ensino Médio que diferenciou os problemas discute:

> **PEM_1:** *O problema 7 (Cm) se ele, por exemplo, dissesse assim a primeira pessoa recebesse a bicicleta azul; e a segunda pessoa uma bicicleta verde ai já teria ao meu ver um problema de arranjo. Se Mario recebe primeiro e Raul recebe depois seria a mesma coisa de Raul receber primeiro e Mario depois. Então não posso contar como sendo situações diferentes e sim a mesma situação. Isso é o que eu comento com meus alunos que a principal diferença entre problemas de arranjo e combinação é se a ordem importa ou não.*

Desse modo, ele propõe a discussão do problema diferenciando a partir do enunciado a propriedade da ordenação, exemplificando quando as diferenças entre os problemas de arranjo e combinação. No entanto, advertimos para considerar a autonomia do aluno na criação de suas próprias estratégias individualmente ou em grupos, socializar as estratégias em sala, construindo e incentivando aos alunos a fazer matemática.

Considerações

Contatamos a evidência de dificuldades em professores dos diferentes níveis de ensino na diferenciação dos problemas de *arranjo* e *combinação.* Essas dificuldades podem ser justificadas por lacunas de conhecimento específico na formação de professores, como também da experiência de ensino. Notamos ainda que as lacunas no conhecimento específico do conteúdo, interfere na avaliação das estratégias evidenciadas pelo Aluno A, principalmente no que diz respeito a compreensão sobre as dificuldades dos alunos.

Observamos ainda algumas propostas de prática para o trabalho com esses problemas. O professor PAI_2 propôs uma análise das estratégias de listagens, entendendo a necessidade do acompanhamento dos professores nas etapas de organização e de finalização. PAF_2 indicou uma possível relação da estratégia de listagem com uma multiplicação, na percepção da generalização. Os professores do Ensino Médio propuseram práticas geralmente diretivas, o que pode não auxiliar na autonomia do aluno.

Com base no exposto defendemos a necessidade de novas propostas de formação continuada que abordem aspectos como os diferentes significados dos problemas combinatórios e outras possíveis representações – diagrama de árvores, listagem, princípio fundamental da contagem (PESSOA e BORBA, 2010), além de refletir sobre possibilidades de recursos didáticos como softwares ou objetos de aprendizagem, jogos matemáticos a fim de promover o desenvolvimento do raciocínio combinatório nos diferentes níveis de ensino.

Referências

Albuquerque, A.G.; Silva, J.V.G.(2010) Analisando questões em livros didáticos de Matemática de séries finais do Ensino Fundamental, acerca do raciocínio combinatório. In: *Anais do X Encontro Nacional de Educação Matemática*: Salvador.

Barreto, F.S. e Borba, R (2010). Como o raciocínio combinatório tem sido apresentado em livros didáticos de anos iniciais In: *Anais do X Encontro Nacional de Educação Matemática*: Salvador.

Batanero,C.; Godino, J. & Navarro-Pelayo, V. (1996). *Razonamiento combinatorio*. Madri: Ed. Sintesis.

Brasil. (1997). Ministério da Educação. Secretaria de Educação Média e Tecnológica. *Parâmetros Curriculares Nacionais*, 3 Matemática. Brasília: 1997.

Pessoa, C. (2009) Quem dança com quem: o desenvolvimento do Raciocínio Combinatório do 2º ano do Ensino Fundamental ao 3º ano do Ensino Médio. *Tese.* Pós-graduação em Educação da UFPE. Recife:UFPE.

Pessoa, C. & Borba, R. (2010) O raciocínio combinatório do início do Ensino Fundamental ao término do Ensino Médio. *Anais do X Encontro Nacional de Educação Matemática*, Salvador.

Shulman, L.S.(2005) Conocimiento y enseñanza: fundamentos de la nueva reforma. In: *Profesorado*. Revista de currículum y formación del profesorado. V 9,2. pp.1-30.

Sztajin, P. (2002) O que precisa saber um professor de matemática? Uma revisão da literatura americana dos anos 90. *Educação Matemática em Revista* – Revista da Sociedade Brasileira de Educação Matemática, nº 11A – Edição Especial