

UNA CARACTERIZACIÓN DE LOS PROBLEMAS SOBRE EL TEOREMA DE BAYES EN LIBROS DE TEXTOS DEL NIVEL MEDIO SUPERIOR

Cristian Paredes-Cancino, Ricardo Cantoral

Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional, México
cristian.paredes@cinvestav.mx, rcantor@cinvestav.mx

Resumen. En el presente escrito se realiza un análisis sobre los problemas en libros de texto del nivel medio superior en México en relación con el Teorema de Bayes. Para dicho estudio se sigue la metodología del análisis de contenido. Como resultados preliminares se identifica una tendencia de los problemas bayesianos a la cuantificación de la probabilidad condicionada. La caracterización de los problemas resulta importante para orientar su rediseño atendiendo a la incorporación de aspectos epistemológicos y la toma de decisión.

Palabras claves: Teorema de Bayes, análisis de contenido, libros de texto.

Introducción

El objetivo de la presente es analizar la presentación del Teorema de Bayes en algunos libros de textos de la Educación Media Superior, con la intencionalidad de reconocer las características de los problemas, en tanto, las variables que componen el problema y la actividad matemática que pretenden promover en los estudiantes. Los resultados permiten plantear orientaciones para la enseñanza del Teorema de Bayes y elementos a considerar para el rediseño de los problemas.

A continuación, se presenta los fundamentos, la metodología, así como algunos resultados y reflexiones derivados de los avances de la investigación.

Fundamentos

La investigación sobre libros de textos de matemáticas en el campo de la Matemática Educativa ha sido variada desde sus propios objetivos. En particular, las investigaciones desde la Educación Estadística han tomado como contenido matemático de análisis a la probabilidad clásica, la probabilidad frecuencial, las gráficas estadísticas, en libros de textos del nivel básico.

Referente al Teorema de Bayes se identifica una orientación de la investigación a la documentación de falacias y al reconocimiento de aquellas variables que permiten tener éxito en la resolución de problemas bayesianos. Algunas problemáticas de carácter cognitivo son la falacia del eje temporal, la falacia de la condicional transpuesta y la falacia de la tasa base. Cada una de estas falacias obedece a la centración en un elemento en el marco de la resolución del problema bayesiano, ya sea el orden de los sucesos, el tipo de suceso o el uso de la información dada en el problema. Por otra parte, se reportan resultados que se relacionan con variables directas en el enunciado del problema, por ejemplo, el empleo de diversas representaciones (diagrama de árbol, tablas de doble entrada, etc.) que permiten aclarar las relaciones entre conjunto y subconjunto y el formato de presentación de la información, desde el cual se ha reportado que el empleo del formato frecuencia resulta más adecuado en el cálculo de probabilidades mediante el Teorema de Bayes.

Metodología

Hemos adoptado el nombre de problemas de acuerdo con Ponte (2004) para referirnos a las diversas tareas propuestas en los libros de textos sobre el Teorema de Bayes. Respecto al método de análisis, seguimos una metodología acorde al análisis de contenido (Fernández, 2002). Dicho análisis puede sintetizarse en cuatro momentos: (1) la identificación de unidades de análisis, (2) la conformación de unidades de contexto, (3) la construcción de un sistema de categoría de análisis y (4) la codificación.

Los textos analizados son algunos libros de referencia propuestos en planes y programas de estudio del nivel medio superior en México. Cabe destacar que a diferencia de la Educación Básica que cuenta con series de libros oficiales para cada uno de los grados, en el nivel medio superior no existen textos oficiales, por lo que los diversos subsistemas e instituciones hacen una serie de recomendaciones sobre los libros a considerar en las diversas asignaturas.

Algunas variables del análisis son las que se presentan en la Tabla 1, las primeras dos variables son de naturaleza didáctica y la tercera variable es de naturaleza epistemológica. Dichas categorías se han conformado de acuerdo con algunos resultados de investigación sobre el Teorema de Bayes.

Tabla 1. Variables para el análisis de los problemas.

Categorías	Indicador
Formato de presentación de la información	Frecuencias absolutas Porcentaje Decimales Razón
Tipo de organización de la información	Tabla de doble entrada Diagrama de árbol Diagrama de Venn
Contexto	Determinación de la probabilidad $P(A B)$ o $P(B A)$ Estimación de una proporción Evaluación de observaciones futuras

Fuente: Elaboración propia.

Resultados

A partir de la revisión de los libros de textos, se ha identificado un proceso invariante (implícito) en la resolución de los problemas asociados con el Teorema de Bayes. Este consiste en (1) identificar la naturaleza de la información proporcionada, (2) organizar la información mediante una representación, (3) determinar el valor de la probabilidad total, (4) sustituir los datos en la fórmula y (5) realizar las diversas operaciones para obtener el valor de la probabilidad condicionada solicitada (véase la Figura 1).

Ejemplo 2.65

Tres máquinas: A, B y C, producen respectivamente 40%, 25% y 35% de la producción total de una empresa, se ha detectado que 6%, 2% y 4% de celulares manufacturados por estas máquinas son defectuosos.



- Si se elige un máquina al azar, ¿cuál es la probabilidad de que produzca un celular defectuoso?
- Si se escoge un celular al azar y sale defectuoso, ¿cuál es la probabilidad de que haya sido producido por la máquina A?
- Si se elige un celular al azar y sale defectuoso, ¿cuál es la probabilidad de que haya sido producido por la máquina B?

Realicemos el diagrama de árbol correspondiente.

A (40%)	D (6%)	ND (94%)
B (25%)	D (2%)	ND (98%)
C (35%)	D (4%)	ND (96%)

Definimos los siguientes eventos:

- D el celular es defectuoso.
- ND el celular no es defectuoso.
- A que el celular proviene de la máquina A.

Utilicemos el teorema de Bayes:

a) La probabilidad de que un celular sea defectuoso, marca en color azul las ramas que correspondan:

$$P(D) = P(A)P(D|A) + P(B)P(D|B) + P(C)P(D|C)$$

$$= 0.4(0.06) + 0.25(0.02) + 0.35(0.04) = 0.043$$

b)

$$P(A|D) = \frac{P(A)P(D|A)}{P(A)P(D|A) + P(B)P(D|B) + P(C)P(D|C)}$$

Sustituyendo los valores:

$$P(A|D) = \frac{0.06(0.4)}{0.06(0.4) + 0.25(0.02) + 0.35(0.04)} = 0.558$$

c) Solución análoga al inciso b):

$$P(B|D) = \frac{P(B)P(D|B)}{P(A)P(D|A) + P(B)P(D|B) + P(C)P(D|C)}$$

$$P(B|D) = \frac{0.25(0.02)}{0.06(0.4) + 0.25(0.02) + 0.35(0.04)} = 0.116$$

Figura 1. Problema sobre el Teorema de Bayes. Fuente: Salazar, Bahena y Martínez (2011)

Si bien se identifica en los problemas una diversidad referente al formato de presentación de la información y el formato de la organización, no es así referente a la categoría contexto, en la cual hay una centración en el indicador determinación de la probabilidad $P(A|B)$ o $P(B|A)$.

Reflexiones finales

Los resultados hasta el momento dan evidencia de una tendencia de los problemas a la aritmetización de la probabilidad, es decir, problemas enfocados en la cuantificación de la probabilidad condicional sin un rol de dicha medida para la toma de decisiones. La incorporación de problemas en la línea de los otros contextos establecidos se considera pueden promover en los estudiantes el desarrollo de otras ideas asociadas al saber matemático, como es el papel de la inferencia y la naturaleza subjetiva del saber. Los problemas contenidos en los libros de texto pueden situarse en el desarrollo de la alfabetización probabilística, por lo que sería importante la integración de nuevos elementos que promuevan el razonamiento y el pensamiento probabilístico.

Referencias bibliográficas

Fernández Chaves, F. (2002). El análisis de contenido como ayuda metodológica para la investigación. *Revista de Ciencias Sociales*, 2(96), 35-53.

Ponte, J. P. (2004). Problemas e investigaciones en la actividad matemática de los alumnos. En J. Giménez, L. Santos, y J. P. Ponte (Eds.), *La actividad matemática en el aula* (pp. 25-34). Editorial Graó.

Salazar Guerrero, L., Bahena Román, H. y Martínez Sánchez, R. (2011). *Probabilidad y estadística*. Grupo Editorial Patria.