XIII CONFERENCIA INTERAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA
CIAEM 2011
26 - 30 Junio, 2011
Recife, Brasil
50 años del Comité Interamericano de Educación Matemática

Los paradigmas geométricos en la formación inicial de profesores de Matemática

Elizabeth **Montoya** Delgadillo
Instituto de Matemática, Pontificia Universidad Católica de Valparaíso
Chile
emontoya@ucv.cl

Resumen

La presente investigación se interesa en la formación de profesores de matemática de liceo en Chile y en la transición de un saber aprendido a un saber enseñado que debe hacer presente un profesor en la enseñanza, para ello, consideramos la demostración en geometría.

En el curriculum universitario el aprendizaje de la demostración no aparece como objetivo explícito de enseñanza, sin embargo, los alumnos tienen que saber utilizarla para tener éxito en sus cursos de matemática. Por otro lado, en el curriculum del liceo, el aprendizaje de la demostración aparece como objetivo explícito de enseñanza. Consideramos que existe una ruptura epistemológica, didáctica y cognitiva en la enseñanza de la geometría.

Nuestra investigación nos ha permitido dar cuenta del razonamiento geométrico a nivel de la formación inicial docente en Chile, entregando elementos de la concepción geométrica y la carencia de transposiciones frente al *proceso de prueba* en geometría.

Palabras clave: espacio de trabajo geométrico, proceso de prueba, didáctica de la geometría.

Introducción

En esta investigación nos preocupamos de la problemática del doble pasaje y doble rol estudainte-profesor entre dos instituciones escolares, liceo y universidad. Particularmente, nos centramos en la demostración en geometría; su lugar y estatus en el curriculum. Analizamos como un profesor toma en cuenta este saber en su formación inicial y más precisamente en aquellos que realizan la práctica profesional.

Problemáticas asociadas a la argumentación y demostración han sido objeto de estudio por diferentes grupos de investigación (Duval, Balacheff, Boero, Perelman, Toulmin, Ducrot, et al) con perspectivas cognitivas, lingüísticas como también epistemológicas. La revista en línea "La letra de la prueba" y tesis doctorales muestran el interés en esta temática. Por otro lado, el congreso ICMI Study 19: Proof and Proving in Mathematics Education fue totalmente consagrado al estudio de las demostración y las pruebas en Matemáticas. Se aprecia en este congreso una variedad de trabajos en cuanto a la enseñanza de la demostración en el curriculum escolar, y en desarrollar una cultura frente a la demostración en el aula en todos los niveles educativos.

Por otro lado, podemos observar que la concepción de demostración ha variado en el tiempo como en la historia de la matemática y en la actualidad, podemos apreciar que las palabras demuestre, pruebe y justifique parecieran tener un mismo significado pero no siempre han sido sinónimos en la historia de la matemática (Arsac, 1987). Crespo en su investigación realizada acerca de las concepciones sobre las demostraciones que tienen un grupo de docentes y estudiantes de último año de pedagogía, señala: “Ciertas ideas aparecen desdibujadas: no se distinguen claramente las diferencias entre la matemática, el saber matemático y el aprendizaje de la matemática en relación con las argumentaciones, (…) no reconocen los distintos niveles existentes entre qué es demostrar, qué es saber demostrar y qué es aprender a demostrar” (Crespo, 2005, p.85).

Nuestra investigación, tiene como objetivo estudiar la articulación que realiza un profesor debutante en torno al objetivo de enseñanza en términos de un saber enseñado. Naturalmente, en nuestro caso, esta transposición de saberes la debería realizar un estudiante de pedagogía en matemática que fue sometido a una formación inicial en Chile. Es por ello que estudiamos la formación recibida en este país y el pasaje « natural » que sufre al cambiar de rol cuando un alumno egresa de las instituciones antes mencionadas, esto es:

i) el pasaje de un alumno de liceo a estudiante de pedagogía en matemática y
ii) el pasaje de un estudiante de pedagogía en matemática a profesor de liceo

Tanto los pasajes (nombrados anteriormente) como la transición del saber entorno a la enseñanza y el aprendizaje del proceso de prueba tienen rupturas en particular en geometría, las que postulamos que son causadas por obstáculos que son necesarios identificar y estudiar, lo que produce discontinuidades entre estas instituciones. Luego tendremos que abordar la noción de obstáculo y analizar en forma separada el obstáculo didáctico, epistemológico y el cognitivo.

Planteamiento del problema

Para abordar la demostración en la universidad y en el liceo, consideraremos el lugar que ocupa la demostración en el curriculum de ambas instituciones; para ello nos inspiraremos en la clasificación que hace el estudio TIMSS en cuanto al estudio del curriculum, esto es: considerar el *curriculum que se espera* y el *curriculum en la obra,* entendido este último como lo que realmente se realiza entorno a la enseñanza del proceso de prueba en geometría en el aula.

Si consideramos el lugar y estatus[1] de la demostración en el curriculum esperado en la universidad, podemos observar que el aprendizaje de ella no aparece como objetivo explícito de enseñanza; sin embargo, los alumnos tienen que saber utilizarla para tener éxito en sus cursos de matemática. Consideramos la demostración es una es un noción paramatemática y que su aprendizaje a nivel del curriculum es un aprendizaje ignorado, y no existe la necesidad explícita de una evolución en el aprendizaje, como lo señala Castela no existe “*la necesidad de una progresión en el encadenamiento del aprendizaje*” (Castela, 2004b, p.124).

En la universidad, es posible considerar la demostración como una práctica, un savoir-faire y como lo señala Chevallard (1985, p. 49), la noción demostración es una *noción paramatemática*

[1] Nos referimos tanto a la ubicación en el curriculum como al estatus que se otorga a la demostración, en francés se utiliza la palabra “place”

y no constituyen objetos de enseñanza, sino que son objetos de saberes “auxiliares” para la enseñanza-aprendizaje de saberes matemáticos (noción matemática). Las “nociones paramatemáticas” son aprendidos por mostración (“monstration”), esto es, deben ser aprendidos, conocidos pero que no son enseñados explícitamente como lo son las nociones matemáticas.

Podríamos generar diversas hipótesis para justificar por qué la enseñanza de la demostración y del proceso de prueba en general no está presente (explícitamente) en el curriculum universitario; un profesor universitario puede pensar que el dominio en la elaboración de pruebas (y en particular demostrar) por parte de sus estudiantes será adquirido a medida que el estudiante tenga mayor conocimiento en matemáticas y experiencia en la escritura; es decir, que lo aprenderá con “la práctica” como si se tratara de generar experiencia y formalismo en la escritura. Otra postura natural es que el estudiante, apoyado en un cuerpo de conocimientos adquiere conocimientos para probar y que la “técnica de demostrar” es algo que aprendió en algún otro curso (universitarios o inclusive en la Enseñanza Media). Sin embargo, esto es una realidad presente en la formación del profesor – particularmente en el eje de geometría– y sobre todo cuando el futuro docente deberá transponer este saber como un objetivo de enseñanza en el liceo.

Que un profesor “exhiba” cómo se demuestra, no es suficiente para decir que el profesor ha ensañado a demostrar. Por un lado, el estudiante debutante en su formación de matemática, debe responder ante exigencias en la elaboración de pruebas que serán “mostradas” por su profesor, siguiendo pasos y desarrollando el “buen camino” de deducción. Ambos actores (profesor y estudiante) comparten un contrato didáctico donde la imitación sería parte del contrato, como una manera de hacer: el estudiante debe observar a su profesor y el profesor mostrar como se demuestra, “yo te muestro cómo se hace y tú repites lo que hice”, o “haz como yo”, mientras el estudiante va aprendiendo y nutriéndose de un cuerpo teórico. Este contrato es implícito, como suele ser el contrato didáctico.

Diversas investigaciones muestran las dificultades de los estudiantes de primer año universitario en las demostraciones en matemática (Gueudet, 2007), las dificultades han sido estudiadas y clasificadas por Moore (1994) en: “méconnaissance des définitions, difficulté à élaborer des exemples nême simples, dificultes à débuter une preuve, difficulté relative au langage” (ver Gueudet, 2007, p. 166). Los estudiantes se encuentran en otra cultura escolar enfrentando otro contrato didáctico, donde no hay criterios explícitos en la validación de un argumento que conforma una demostración. El contrato didáctico entorno al proceso de prueba en el nivel superior es poco claro, no sólo por la ausencia de un contrato claro en cuanto a las exigencias en torno a las pruebas, sino también en la ausencia de criterios válidos en la conformación de una demostración.

La exigencia institucional estipulada por el Ministerio de Educación en Chile (MINEDUC) señala que un profesor debe hacer y enseñar demostraciones a partir de primer año del liceo (14-15 años). A través de sus programas, reconoce que la geometría es un lugar propicio para desarrollar el razonamiento de las hipótesis y de las deducciones. Esto queda explícito en el programa de Segundo Medio: “Interesa que los alumnos y alumnas dispongan de formas de pensar que les permita generalizar, sintetizar información, presentar con claridad los casos que satisfacen determinadas condiciones. La geometría es un terreno propicio para cultivar ese tipo de pensamiento.” (Mineduc, Programa Segundo Medio, p. 78).

Sin embargo, existe la posibilidad que no todos los estudiantes enfrenten el razonamiento antes descrito, al menos en geometría, puesto que la enseñanza de la geometría ha presentado debilidades en el liceo. Al respecto, podemos citar la investigación realizada en el marco del Proyecto Ecos (Guzmán Kuzniak, et al, 2004), en el cual se compara el sistema educativo de

Chile y Francia en torno al eje de geometría. Se desprende de esta investigación, que la práctica de la demostración es débil en el sentido que por ejemplo es está permitida la medición como una forma de demostrar.

El estudio realizado por Araya (2008), que caracterizó los saberes pedagógicos y el conocimiento de la disciplina de profesores de Enseñanza Básica (segundo ciclo) y de Enseñanza Media, mediante el análisis de 720 videos (de voluntarios de clases de matemáticas de profesores que se sometieron a la evaluación docente[2] del año 2005) evidencia que no se hacen demostraciones matemáticas ni razonamiento deductivo en las clases.

La situación es compleja no sólo en el ámbito de la demostración en el liceo. El informe de evaluación nacional SIMCE, ha revelado que efectivamente existen dificultades de los alumnos en el eje temático de Geometría (y también en el de Probabilidades). Esto podría deberse a que según el mismo estudio sólo un 33% de los profesores declara una alta cobertura curricular en estos ejes temáticos (y un 40% en cualquier contenido de matemáticas). (MINEDUC, 2003, p.24). Los contenidos menos cubiertos coinciden con las materias donde los docentes declaran sentirse menos preparados (MINEDUC, 2003, p.18). Estos fueron los mismos para todos los grupos socioeconómicos. Al respecto, el 33% de los profesores declaró no haber enseñado Geometría y Probabilidades. Los porcentajes fueron los siguientes: Criterios de semejanza en figuras planas (31 %); Reconocimiento de figuras semejantes: (38 %); Resolución de problemas aplicando el Teorema de Tales (36 %); Ángulos en la circunferencia (29%).

Se debe hacer notar, que en cada uno de estos contenidos hay involucrados teoremas que al ser enseñados hay argumentaciones involucradas y pruebas que podrían hacerse efectiva en la sala de clase, pero que no son abordados por todos los docentes, y por contraparte, tampoco estos saberes son solicitados en esta evaluación nacional.

Los resultados de la encuesta realizada a profesores de 2º Medio que trabajaron con los alumnos que rindieron el SIMCE en el año 2003, muestran que en los sectores socio económico medio bajo y bajo, sólo un 33% de los docentes está en un nivel de alta cobertura. Y los grupos escolares medio alto y alto, este porcentaje aumenta a 48% y 52%. En términos relativos como se aprecia en el informe (Ibid, p. 24) los docente del grupo escolar socio económico alto que declara una alta cobertura en contenido curricular casi duplica a los docentes del grupo socio económico bajo. Además, los docentes que afirman tener baja cobertura curricular difieren en prácticamente seis veces (29% en el bajo y 6% en el alto). A continuación adjuntamos en la tabla 1 un resumen extraído del citado informe:

Tabla1

"Porcentaje de docentes por nivel de cobertura curricular en Matemática según grupo socioeconómico"

(En porcentaje) **Grupo Socioeconómico**						
Cobertura Curricular	**Bajo**	**Medio Bajo**	**Medio**	**Medio Alto**	**Alto**	**Total**
Baja Cobertura Curricular	29	28	16	10	6	22
Media Cobertura Curricular	38	39	36	38	32	38
Alta Cobertura Curricular	33	33	48	52	62	40
Total	100	100	100	100	100	100

MINEDUC, 2003b, Resultados SIMCE Segundo Año Medio, Carpeta de Prensa, p.18

[2] Sistema de Evaluación del Desempeño Profesional Docente, Ley 19.961 promulgada el año 2004.

Luego teniendo esta realidad de los actuales profesores[3], nos preguntamos cuál es el discurso del futuro profesor frente a la enseñanza de la demostración en el iceo, y qué tipos de pruebas realizará (si es que la hace) en relación a su concepción geométrica. El estudiante-profesor, al momento de enseñar el proceso de prueba, tiene que responder a varias exigencias institucionales que están sujetas al contrato didáctico de la institución universidad y a la institución liceo. Él debe satisfacer simultáneamente las exigencias que son producto de su formación y las del pasaje entre las instituciones escolares. En definitiva, el estudiante-profesor debe ir respondiendo –a medida que va logrando experiencia como profesional– a una gran variedad de desafíos de acuerdo a los distintos roles que debe asumir, tales que estudiante-profesor.

Postulamos tres rupturas –que son los ejes de nuestra investigación– relativas a la enseñanza y aprendizaje de la geometría, en particular en lo que se refieren a las pruebas privilegiadas en dos instituciones escolares, por ello es que queremos saber *¿cuáles son las posibles consecuencias de esta ruptura?* en el sistema educativo chileno. Hemos mencionado e identificado el doble pasaje del estudiante-profesor, que lo convierte en un profesor y en un estudiante en el liceo y en la universidad respectivamente, este doble rol nos es propicio para conocer el estatus que le da a las pruebas que se exigen y elaboran en geometría.
Es así que formulamos la siguiente pregunta: ¿Cómo un futuro profesor considera las pruebas en geometría, es decir, qué argumentos le son válidos en diferentes roles e instituciones?.

Fundamentos Teóricos

El cuerpo teórico que sustenta nuestro trabajo está compuesto por los Paradigmas Geométricos y el Espacio de Trabajo Geométrico (ETG) desarrollado por Houdement y Kuzniak aportándonos un marco teórico entorno a la enseñanza y aprendizaje de la geometría, en el que se toma en cuenta la naturaleza del trabajo geométrico cuando un géometra[4] se enfrenta a un problema en geometría. Además consideramos la Tipología de Prueba de Balacheff confrontándola con la noción de razonamiento y demostración desarrollada por Duval, estas teorías nos permiten hablar del proceso de prueba involucrado en el ETG del individuo como en el de las instituciones escolares involucradas.

Los *Paradigmas y Espacios de trabajo geométrico* (Kuzniak, 2004) y (Houdement, Kuzniak, 1998-1999, 2006). Houdement y Kuzniak nos invitan a replantear la enseñanza y el aprendizaje de la geometría, pues ofrecen elementos para que el alumno (y el profesor) construya un espacio de trabajo apropiado para enfrentar un problema geométrico: la interpretación de los problemas, la forma de abordarlos y la reflexión en torno a ellos. Es así, que se podemos definir un *paradigma geométrico* considerando tres ejes: las creencias de la comunidad (filosófico), los modos de pensamiento –intuitivo, deductivo, experimental– (cognitivo) y la evolución misma de la geometría (epistemológico).

Los paradigmas geométricos

Los autores plantean la existencia de tres tipos de geometrías o *paradigmas geométricos,* a saber, *Geometría natural* (GI), Geometría axiomática natural (GII) y Geometría axiomática formalista (GIII), provistos cada uno, de un *espacio de trabajo geométrico (ETG),* ellos son:

[3] Se ocupó el Informe Simce 2003 y no el 2007 porque el primer informe hay información más en el detalle. A groso modo, los resultados de un período y de otro no ha mostrado las mejoras esperadas por las autoridades del MINEDUC.

[4] Se entiende por geómetra a la persona que enfrenta una tarea en geometría; investigador, profesor, estudiante.

Geometría natural (GI). Hay una relación con la realidad, es así que los objetos están definidos por el modelo geométrico pero en correspondencia con la realidad espacial y local del individuo. Los medios de prueba son de tipo material, se utilizan artefactos para la representación del objeto (no son objetos abstractos sino que objetos concretos). El modelo geométrico subyacente es la idea que el individuo tiene y se forja de la Geometría Euclidiana.
Geometría axiomática natural (GII). La geometría es concebida como el esquema de la realidad. El razonamiento de validación se funda sobre las leyes hipotéticas deductivas del sistema axiomático en juego (propiedades, definiciones, etc.). El modelo geométrico no es el euclidiano, puesto que los problemas para ser resueltos no requieren de la presencia de todos los axiomas.
Geometría axiomática formalista (GIII). Los objetos geométricos en esta geometría provienen de una axiomática elegida con toda la rigurosidad y formalismo del modelo geométrico elegido. El razonamiento de validación se realiza exclusivamente a través del sistema formal de axiomas del modelo geométrico subyacente. Se dice que GIII surge con la aparición de las geometrías no-euclidianas, y la euclidiana es parte de este paradigma.

El espacio de trabajo geométrico

El *Espacio de Trabajo Geométrico (ETG)* es un ambiente donde se concibe la reflexión como el fruto de una interacción entre un individuo y los problemas geométricos, es un *ambiente organizado por y para el geómetra*[5] mediante la articulación de tres componentes, a saber: el modelo geométrico, el espacio local y real y los artefactos.

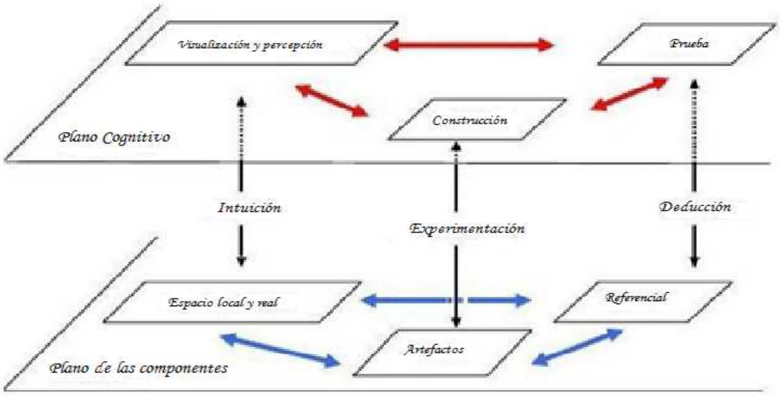
Dependiendo de la función y de la reflexión del geómetra cuando se enfrenta a un problema geométrico, existen tres tipos de ETG, a saber, en torno a la relación con el saber, en torno a cómo enseñar este saber, o simplemente cómo es enfrentado el problema por el geómetra. Estos son el ETG de *Referencia, el ETG Idóneo y el ETG Personal.*
ETG de referencia. Se refiere al espacio de trabajo definido de manera ideal en función de criterios matemáticos. Se dice que el utilizador es un experto epistémico. Se puede considerar como el ETG *institucional de la comunidad de los matemáticos* (Ibid, 2006, p.15)
ETG idóneo: Se refiere al espacio definido en términos didácticos, es decir, en este espacio se concibe la reflexión sobre la reorganización didáctica de las componentes del espacio de trabajo geométrico. Un utilizador de este ETG es el profesor.
ETG personal: Se refiere al espacio definido por un geómetra, fruto de la reflexión entre los conocimientos aprendidos y los puestos en práctica, de acuerdo a sus conocimientos matemáticos y capacidades cognitivas.

Componentes cognitivas al *ETG*

Desde el punto de vista cognitivo, existen ciertos procesos que están asociados al ETG, como lo son el proceso de: *visualización, construcción y prueba*, las cuales se relacionan con las componentes del ETG conformando un espacio de trabajo dinámico y cognitivo. La noción del *proceso* cognitivo asociado al ETG es introducida por R.Duval. (ver Kuzniak, 2004)

Se debe entender que las componentes del plano cognitivo no son exclusivos de las componentes del *ETG*, a saber, en el proceso de construcción requiere de la componente artefacto (instrumentos geométricos), pero se construyen elementos del espacio local y real, es decir objetos geométricos y éstos se visualizan y prueban de acuerdo al conocimiento del geómetra del referencial teórico. En el siguiente esquema (ver esquema 1) se puede observar la relación de los procesos cognitivos –conformando el plano cognitivo- asociado al plano de las componentes del ETG.

[5] Individuo que trabaja un problema geométrico, puede ser un estudiante, profesor o investigador.



Esquema 1: Plano cognitivo y Plano de las componentes del ETG

El razonamiento y la tipología de prueba

Por otro lado, analizamos las fuentes de validación al momento de realizar una prueba y articulamos esto con *la tipología de prueba* (Balacheff, 1997). La palabra prueba es a menudo empleada en matemáticas y también en el medio escolar en forma tan sinónima como la palabra demostración. Para Balacheff, la palabra "prueba" designa sobre todo una justificación donde la validez puede ser modificable con arreglo a la experiencia de la comunidad y del tiempo (un contexto social).

La concepción de demostración desarrollada por Balacheff es compatible con la noción de demostración desarrollada por Duval. Una diferencia importante en cuanto a razonamiento de trata, es que para Balacheff (1987) una *explicación* es un argumento considerado como un razonamiento, mientras que para Duval (1992-1993), una explicación no es un razonamiento y las diferencia el rol que juega el valor epistémico del argumento en las proposiciones donde intervienen.

Balacheff distingue dos tipos (o grupos) de pruebas: las pruebas para decidir, que les llama ppragmáticas o prácticas y las pruebas para saber, llamadas intelectuales o conceptuales.
Las *pruebas pragmáticas* están ligadas a la acción y a la experiencia, hay una presencia de saberes prácticos, las justificaciones son realizadas a través de objetos materiales concretos o de representación del objeto. En este grupo se distingue: *empirismo ingenuo*, *experiencia crucial*, *ejemplo genérico.* Las *pruebas intelectuales* provienen de una forma particular de razonar, donde se articulan argumentos, cadenas de argumentos, con una clara producción en una lengua simbólica, hay un pasaje a lo algebraico, se dejan de lado los objetos materiales y su relación con la experiencia material. En este grupo se distingue: *experiencia mental, demostración y cálculo sobre el enunciado.*

La articulación de estas herramientas teóricas nos permite conformar el marco teórico que nos permite abordar nuestra investigación que se ha centrado en profesores en formación.

Metodología

En la fase de experimentación de nuestra investigación, se realizó un cuestionario a diez y nueve (19) estudiantes en práctica profesional (final), a los cuales les hemos llamado *estudiante-profesor* y una encuesta a veinte y cinco (25) estudiantes de primer año del curso de geometría. Además, hemos realizado entrevistas a profesores universitarios responsables de estas prácticas docentes, como a la vez, a profesores responsables de la formación en geometría. Todo esto, inmerso en un análisis de programas curriculares en geometría tanto en la universidad como en el liceo para aproximarnos al ETG de referencia, ETG idóneo y ETG personal de la formación inicial del profesor.

Para aproximarnos al ETG de referencia de las instituciones escolares: universidad y liceo, estudiaremos las exigencias institucionales (*contraintes institutionnelles)*, para ello hemos elegido estudiar en la universidad: el programa de geometría, el curso de geometría Euclidiana, a través del cuaderno del estudiante, talleres y evaluaciones durante cuatro años. Mientras que en la institución liceo, nos centraremos en estudiar el programa de geometría centrados en el proceso de prueba y en los textos escolares.

En cuanto a las entrevistas, realizamos cuatro entrevistas realizadas a profesores formadores de la universidad, una a un profesor formador del liceo y la última a un profesor-ayudante (profesor debutante), todos ellos fueron elegidos principalmente por la experiencia que tienen en sus respectivas instituciones escolares.

Algunos resultados

Una aproximación al ETG idóneo: las evaluaciones

Se analizaron evaluaciones las cuales nos permiten estudiar las pruebas exigidas (solicitadas) a los estudiantes de primer año en el curso de geometría. La articulación de las componentes cognitivas asociadas al ETG nos permiten conocer en forma más integra lo que espera el docente (formador en geometría) de sus estudiantes a nivel del curriculum en la obra. En particular, en la componente razonamiento asociado al Referente Teórico del ETG, se pudo observar en los exámenes que la prueba privilegiada es la demostración, es más, tiene un estatus importante puesto que es la tarea más solicitada en las evaluaciones de los cuatro años analizados, a saber, de un total de 29 preguntas se encontraron 23 preguntas donde se le solicitaba al estudiante hacerla, poniendo en juego el referencial teórico que domina[6] al final del curso de geometría de primer año universitario.

En la tabla se consideran cinco evaluaciones que corresponden a exámenes de distintos años (2003, 2004, 2005 y 2006). Consideramos los exámenes pues nos parece que en ellas aparecen los contenidos y exigencias no por unidad sino como un todo que muestra las exigencias de los conocimientos que se esperan hayan sido aprendidos. En la tabla se resume la descripción, consideramos el año, el número de preguntas, la tarea solicitada –que la describiremos con la consigna del verbo de acción– .

Tabla 2

Año / **Tareas**	2003	2004	2005	2006	2006	Frecuencia
Conjeture	1	1	--	--	--	2
Verifique	1	--	--	--	--	1
Justifique	--	--	--	--	--	0
Demuestre	3	7	5	6	2	23
Construya	1	--	--	--	--	1
Represente	--	--	--	--	1	1

[6] Contenidos geométricos que se esperan sean parte de sus conocimientos adquiridos (en francés maîtriser)

Calcule	--	--	--	--	1	1
Nº Preguntas	**6**	**8 (*)**	**5**	**6 (*)**[7]	**4 (**)**	**29**

Examen a estudiantes de primer año del curso de geometría

Las producciones de los estudiantes en los exámenes, se observa que el concepto de demostración es transado (o adaptado) por el formador, efectivamente uno puede observar que la producción del estudiante es más bien una prueba pragmática del tipo experiencia mental; hay explicaciones (o guiones) donde se manifiestan deducciones y por lo general están escritas en lenguaje mixto. Mientras que en la pauta de corrección realizada por el formador, el escrito conforma claramente una demostración; el lenguaje es algebraico y hay una economía de escritura en las deducciones, es decir, no hay un guión explicativo. Pero estamos concientes, que esto requiere de un análisis más profundo por lo que en estos momentos nos permitimos proponer la siguiente hipótesis: El formador acepta como demostración una prueba intelectual del tipo experiencia mental.

Los elementos analizados, también nos permiten referirnos al paradigma geométrico asociado al ETG, en este sentido, podemos afirmar que en las evaluaciones se espera el estudiante trabaje en GIII/GII, es decir, posicionados en GIII se tiene relación con los elementos que nos permiten hablar de GII.

En el ETG (idóneo) del curso de geometría primer año, cohabitan dos paradigmas geométricos y varían dependiendo de la tarea que se solicita, en las sesiones teóricas se observa GIII/GII, mientra que en las sesiones prácticas específicamente a las correspondientes al uso del software geométrico se observa GII/GI.

Una aproximación al ETG idóneo: el cuestionario a los estudiantes-profesores

En la segunda parte del cuestionario, el objetivo de las preguntas fue conocer el ETG-personal, saber el rol que jugaron los dibujos (visualización) al momento de elaborar una prueba. En este sentido, conocer la tipología de pruebas de los estudiantes-profesores frente a distintas provocaciones didácticas propuestas, siendo situados en sus dos roles, es decir, estudiante (geómetra) que resuelve un problema así como también un profesor (geómetra) que evalúa la producción de alumnos.

Podemos afirmar que el rol de la figura es fuerte y perturba la elaboración de pruebas alejándolo de su concepción teórica (formación teórica para responder desde GIII) al punto que lo sitúa en el paradigma de GI. Una situación similar ocurre con el uso de los instrumentos geométricos, ya que, el simple “buen uso” de los instrumentos es suficiente como parte de una demostración, a tal punto, que gran parte de estos estudiantes afirmó que una prueba que no era demostración lo fuese o estaba cercana de serlo, por el hecho de buen uso de los instrumentos. Junto a lo anterior se sumó la perturbación producida por la figura, ya que –via la figura y uso de instrumentos geométricos– les permitió establecer una propiedad inexistente.

A modo de ejemplificación, en el Apéndice A, se puede revisar una de las preguntas del cuestionario donde los estudiantes-profesores debían analizar cuatro pruebas argumentativas. Las producciones propuestas contienen elementos de los paradigmas de GI y de GII y a nivel del tipo

7 (*): En el 2004 los estudiantes bastaban que hicieran 5 de las 8 preguntas y en el 2006 los estudiantes bastaban que hicieran se elijen 5 de las 6 preguntas. (**): No es el mismo formador en geometría al de los años 2003 al 2006.

de prueba, se han propuesto diferentes argumentos tales como el uso de los instrumentos geométricos, y el papel que juegan las construcciones geométricas, y naturalmente el rol del dibujo en ellas.

En efecto la mayoría de los estudiantes que señalan que la prueba es una demostración es por el uso de los instrumentos. En esta pregunta se pone relieve al estatus de la construcción como medio de prueba, clasificando este trabajo como una prueba pragmática del tipo empirismo naif y en GI, puesto que la buena construcción es considerada una demostración. A priori pensamos, que la buena construcción induciría al alumno a decir que la construcción es argumento valido que conforma una demostración. De los 19 estudiantes, sólo uno no contesta la pregunta y de los 18 que responden esta pregunta 16 usaron instrumentos geométricos con el objeto de seguir –aparentemente– la instrucción del argumento de las producciones propuestas.

Conclusiones

En esta investigación se evidenció que el estudiante no es estable en el proceso de prueba en el eje de geometría, esto es, ante provocaciones didácticas el estudiante mantiene su confusión y reacciona de acuerdo a las exigencias inmediatas (contrato). De esta forma, simplemente no enseña a demostrar, no realiza pruebas intelectuales y no es conciente del oportuno uso de las pruebas pragmáticas y de la dificultad que tendrán –sus futuros alumnos– del paso que existe de una prueba pragmática a una prueba intelectual.

En gran parte esto se debe a que el estudiante profesor no es sometido a la reflexión explícita de la transposición de la demostración (u de otro tipo de argumentación) en su formación universitaria y menos en su desempeño profesional; así lo evidencian sus respuestas a las encuestas que fueron sometido. Los estudiantes mantienen un discurso sobre la importancia de la demostración, pero muestran su falta de claridad al responder como geómetra (estudiante) y como geómetra (profesor) como pudimos constatar. El rol de las figuras y el uso de instrumentos en sus "demostraciones" lo perturban y lo cambian de paradigma.

En cuanto a la Institución Formadora (universidad), el estudiante aprende a demostrar sin que se haya sometido a un proceso explícito de aprendizaje de ella. Los formadores universitarios exhiben y exigen de la demostración como una herramienta de un matemático. En geometría el estudiante es sometido al paradigma de los matemáticos. La universidad no ha creado y tampoco incentiva a los estudiantes a reflexionar sobre la transposición de la enseñanza de la demostración y de ningún otro tipo de prueba exigible y/o viable en la institución liceo (mundo profesional).

Por otro lado, la Institución liceo, se evidencia que en los programas oficiales escolares (que son parte importante de la institución) es confuso el concepto de demostración, en ellos se pueden encontrar pruebas pragmáticas como una aceptada demostración, así como otro tipo de pruebas. Además, los textos escolares también presentan una confusa concepción de demostración, esto permitiría al profesor con poca experiencia dejarse influenciar por una de las concepciones presentadas. Es claro que la concepción privilegiada en los textos escolares es la prueba pragmática, por sobre las pruebas intelectuales en las pocas ocasiones que se exhiben pruebas de una propiedad en geometría. Lo que probablemente implicaría que los alumnos de enseñanza media se ven sometidos a un sólo paradigma (con ciertas características y estadios cognitivos).

Esta investigación está basada en la tesis doctoral de la que subscribe, en la extensión a esta investigación, se trabaja con un grupo de investigación en el seguimiento a profesores debutantes en cuanto a su estabilidad paradigmática, y para ello, nos hemos propuesto proponer el *Espacio de trabajo algebraico (ETA)* inspirado en el *Espacio de trabajo geométrico (ETG).*

Referencias y bibliografía

Arsac G. (1987). *L'origine de la démonstration: Essai d'épistémologie didactique.* Recherches en didactique de la mathématique, vol.8 n°3, 267-312.

Balacheff N. (1987). *Processus de preuve et situations de validation,* Educational Studies in Mathematiques, vol.18, n°2,147-176.

Castela C. (2005). A propósito de los conocimientos que no se enseñan explícitamente aunque son necesarios para tener éxito en las matemáticas escolares. RELIME vol 8-2.

Crespo C. (2007). Los estudiantes ante formas de argumentar aristotélicas y no aristotélicas. Un estudio de casos. Revista Electrónica de Investigación en Educación en Ciencias. México, nº 1, 84-100.

Checallard Y. (1985). La transposition Didactique : du savoir savant au savoir enseigné. Recherches en Didactique des Mathématiques, ed. La Pensée Sauvage, Grenoble.

Duval R. (1995). Sémiosis et pensée humaine. Éditions Peter Lang, coll. Exploration, recherches en sciences de l'éducation. Berne, Suisse, p.219-321.

Duval R. (1991), Structure du raisonnement déductif et apprentissage de la démonstration. Educational Studies in Mathematics 22(3) 233-261

Gueudet G. (2007). Thème 3-La transition secondaire-supérieur, EE14, Actes de la XIIIème Ecole d'Eté de Didactique des Mathématiques, La Pensée Sauvage, pp.159-176.

Houdement C, Kuzniak A. (2000). Formation des maîtres et paradigmes géométriques. Recherches en Didactique des Mathématiques. Vol. 20. n°1. p 89-116. Ed. La Pensée Sauvage. Grenoble.

Houdement C, Kuzniak A. (2006). Paradigmes géométriques et enseignement de la géométrie, Annales de Didactique des mathématiques et des sciences cognitives, vol 11 pp 175-216.

Kuzniak A. (2004). Paradigmes et espaces de travail géométriques. Note pour l'habilitation à diriger des recherches, IREM Université de Paris VII, Paris.

Programas e Informes

Araya R. (2008). Saber Pedagógico y Conocimiento de la Disciplina Matemática en Profesores de Educación General Básica. Departamento de Estudios y Desarrollo. División de Planificación y Presupuesto. Ministerio de Educación. Proyecto FONIDE.

Iinforme OCDE (2003). Informe de las políticas educacionales en Chile, disponible en el sitio http://www.mineduc.cl/biblio/documento/Texto_Libro_OCDE1.pdf

MINEDUC Chile. Programas oficiales de educación matemática, desde séptimo básico a cuarto año medio.

MINEDUC (2003; 2007; 2009), Presentación Sistema de Medición de la Calidad de la Educación: SIMCE por la Unidad de Currículo y Evaluación, Ministerio de Educación, Gobierno de Chile.

Apéndice A

La figura 2 se ha dibujado sobre un papel cuadriculado. El octógono ABCDEFGH ¿es regular?

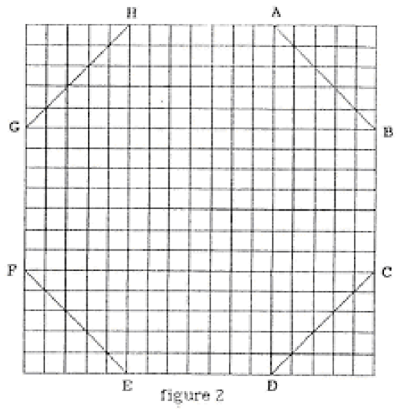


figure 2

Analice cada una de las siguientes producciones y determine cuál de ellas usted calificaría como demostración y por qué.

1. **Julia**

Con el compás, se constata que GH = HA = AB = BC = CD = DE = EF = FG donde los 8 lados del octógono tienen el mismo largo. Trazamos 4 diámetros de circulo: $\overline{HD}$, $\overline{AE}$, $\overline{BF}$, $\overline{CG}$. Sea O el punto de intersección de estos diámetros. Trazamos el círculo de centro O y radio OH y podemos ver que todos los puntos, H,A,B,C,D,E,F están sobre el círculo. Entonces el octógono está inscrito en el círculo.

2. **Carlos**

El dibujo es un octógono ABCDEFH, ahora queremos verificar que es regular. Para esto observemos que él está inscrito en un círculo de centro O (siendo O el medio de las diagonales) y de radio r. Constatamos que es el caso. Además GH = AB. Entonces el octógono es regular.

3. **Leticia**

Ella utiliza en un primer momento el teorema de Pitágoras y llega a la conclusión que $5\sqrt{2} \approx 7$ y entonces AB = ED

Después ella borra esta demostración y propone una demostración que pasa por la construcción de las diagonales y el centro del circulo circunscrito

4. **Silvia**

En la figura 2 el octógono es regular. En efecto, sus 8 vértices tienen el mismo ángulo de 135° y sus lados la misma medida 2,1 cm. Es inscrito en un círculo, la intersección de los segmentos que unen todos los vértices opuestos.

Después trazar los segmentos $\overline{AE}$ y $\overline{CG}$, observamos que ellos son perpendiculares y notar que lo mismo sucede para los segmentos $\overline{HD}$ y $\overline{BF}$.

Réponses d'étudiants PE1 de Créteil lors d'un concours blanc