Acta Latinoamericana de Matemática Educativa
SECCIÓN 1 / ANÁLISIS DEL DISCURSO MATEMÁTICO ESCOLAR
VOL 33, NÚMERO 2, AÑO 2020

SISTEMAS NUMÉRICOS DESDE LOS MODOS DE PENSAMIENTO: UN ESTUDIO DE CASOS

NUMBER SYSTEMS FROM THINKING MODES: A CASE STUDY

Marcela Parraguez, Valeria Randolph, Daniela Bonilla
Pontificia Universidad Católica de Valparaíso (Chile).
marcela.parraguez@pucv.cl, valeria.randolph.v@mail.pucv.cl, danielabonillab@gmail.com

Resumen
Este reporte presenta un estudio de tres sistemas numéricos –los números enteros, los números racionales y los números complejos– desde los Modos de Pensamiento: Sintético-Geométrico (SG), Analítico-Aritmético (AA) y Analítico-Estructural (AE) de Sierpinska. Desde lo metodológico, se utilizó un Estudio de Casos, a través del cual se evidenciaron modos de pensar que se priorizan y que son articulados por estudiantes de educación escolar (16-18 años) y profesores de matemática en formación inicial al ser situados en los distintos Sistemas Numéricos. El análisis de las evidencias entregadas por los instrumentos aplicados –cuestionarios y entrevistas– dieron cuenta de un privilegio por el modo AA de los Sistemas Numéricos y de dificultades para articular los modos de pensar AE y SG. De esa forma, los resultados permitieron concluir una comprensión parcial de los Sistemas Numéricos y la necesidad de abordarlos desde una perspectiva geométrica y estructural, esto es, a partir de la recta numérica, el plano complejo y las propiedades que los definen.

Palabras clave: sistemas numéricos, modos de pensamiento, modelo de comprensión

Abstract
This report presents a study of three number systems –integer numbers, rational numbers and complex numbers– from the Synthetic-Geometric, Analytic-Arithmetic, and Analytic-Structural thinking modes of Sierpinska. From the methodological aspect, a case study was used, which allowed evidencing the thinking modes that are prioritized and that are articulated by school students (16-18 years old) and pre-service mathematics teachers when they are situated in the different number systems. The analysis of the evidence provided by the instruments –questionnaires and interviews– revealed a privilege by the Analytic-Arithmetic thinking mode of the number systems, and difficulties in articulating the Arithmetic-Structural and Synthetic-Geometric thinking modes. So, the results allowed concluding a partial understanding of number systems and the need to approach them from a geometric and structural perspective, i.e., considering the number line, the complex plane and their properties.

Key words: number system, thinking modes, understanding model

Introducción

La investigación que se presenta se centra en el estudio de la comprensión profunda de tres sistemas numéricos: el sistema de los números enteros (Z), el sistema de los números racionales (Q) y el sistema de los números complejos (C). Es preciso indicar que estos objetos matemáticos no solo se entienden como conjuntos de números, es decir, como una colección de elementos que poseen una característica común; sino que más precisamente, se definen como sistemas –sistemas numéricos– en cuanto están provistos de dos operaciones que verifican ciertas propiedades, independientemente de los símbolos que se utilicen para representarlos. En efecto, *Z, Q y C* son sistemas numéricos, pues se caracterizan por tener una estructura algebraica y satisfacer –algunos y no todos– ciertas propiedades de orden, topológicas y analíticas. Así, desde esta concepción y considerando como marco teórico los Modos de Pensamiento se exponen estudios de la comprensión –y a veces profunda– de estos tres sistemas numéricos.

Marco teórico: Los modos de pensamiento

Sierpinska (2000), identificó tres modos de pensar objetos del Álgebra Lineal, y que en esta investigación se ha extendido a tópicos del Álgebra, con la finalidad de hacer explícito el pensar teórico de estos objetos matemáticos. En el modo *sintético-geométrico* (SG) los objetos son presentados mediante una representación geométrica, una figura o un conjunto de puntos. En el modo *analítico-aritmético* (AA) los objetos matemáticos son pensados a través de relaciones numéricas o simbólicas. En el modo *analítico-estructural* (AE) los objetos son presentados a través de propiedades o por medio de axiomas.

Desde este referente teórico entenderemos la comprensión de un objeto matemático cuando hay articulación (Pinto-Rojas y Parraguez, 2017) entre estos tres modos de pensarlo.

Los modos de pensar el sistema de los números enteros, racionales y complejos

Se reporta una investigación que tiene por objetivo mostrar evidencias con sustento teórico, de las diferentes maneras de pensar que los profesores en formación inicial y ejercicio (Para el caso Q) y estudiantes (para C) ponen de relieve, para dar cuenta de la comprensión los sistemas numéricos.

(a) El sistema Numérico Z y Q desde los modos de pensamiento

Si bien existe en el área de la Matemática Educativa una nutrida gama de investigaciones que hacen referencia a la comprensión y enseñanza de los sistemas numéricos *Z y Q* con énfasis en lo algebraico (Arnon et al., 2014; Fandiño, 2009; Gairín, 2001; entre otros), hay, sin embargo, una ausencia en que estos sistemas se traten integralmente desde lo geométrico y lo algebraico. En relación a esto último, el foco de esta investigación está puesto en la mirada integradora de lo teórico y lo práctico que se puede brindar a estos sistemas desde el referente teórico *Los Modos de pensar*.

Modos de pensar Z. Para el caso de Z, este sistema se comprende desde los tres modos de pensar, SG-Z como un punto en la recta numérica; AA-Z como un conjunto de números positivos, negativos y el cero; y AE-Z como un representante de una clase de equivalencia. (ver Figura 1).

AE-Z

Z= $\{[\langle n,m\rangle]_R : n,m \in N\}$
Donde $[\langle n,m\rangle]_R$ es la clase de equivalencia del par (n,m)
R una relación de N x N, donde $(n,m) \wedge (p,q) \in$ N x N, tal que: $(n,m)R(p,q)$ *si y solo si* $n+q=p+m$.

AA-Z

$$Z = Z^{+} \cup Z^{-} \cup \{0\}$$

SG-Z

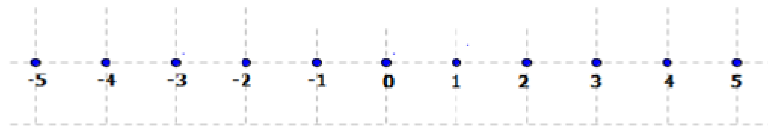


Figura 1. Modos de pensar el sistema de los números enteros (Dato de la Investigación).

Modos de pensar Q. De forma análoga el sistema Q, se analizó desde tres configuraciones, SG-Q como un punto en la recta numérica; AA-Q como un cociente de dos números enteros (con divisor distinto de cero), y AE-Q como un representante de una clase de equivalencia (ver Figura 2).

AE-Q

$Q = \{[\langle n,m\rangle]_R : n,m \in Z, m \neq 0\}$
Donde $[\langle n,m\rangle]_R$ es la clase de equivalencia del par (n,m)
R una relación de $Z\ x\ (Z-\{0\})$, donde $(n,m) \wedge (p,q) \in Z\ x\ (Z-\{0\})$, tal que: $(n,m)R(p,q)$ *si y solo si* $nq = pm$.

AA-Q

$$Q = \{\tfrac{a}{b} \ / \ a \in Z \wedge b \in Z, b \neq 0\}$$

SG-Q

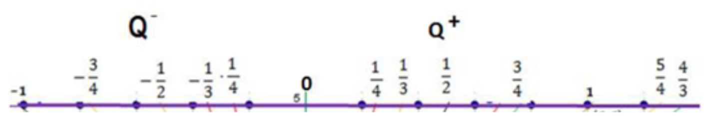


Figura 2. Modos de pensar el sistema de los números racionales (Bonilla y Parraguez, 2015, p. 78).

Para Q aportamos evidencia empírica sobre los modos de pensar que privilegia un grupo de 5 profesores en formación inicial (etiquetados como PF1, PF2, PF3, PF4 y PF5) y 6 en ejercicio (etiquetados como PE6, PE7, PE8, PE9, PE10 y PE11) entendidos cada uno como un caso de estudio (Stake, 2010), y que aceptan en forma voluntaria ser parte de la investigación.

Los instrumentos aplicados a los casos de estudio, cuestionario y entrevistas, aportaron elementos importantes, que nos permiten identificar los modos que privilegian los profesores en formación y en ejercicio al momento de responder. A continuación, se presentan ejemplos de ambos casos, respuesta a la pregunta 2 del cuestionario y un extracto de una de las entrevistas realizadas.

Caso Profesores en formación inicial

Pregunta 2 del Cuestionario: ¿Qué estrategias usarías para justificar que los números $\frac{1}{2}, \frac{2}{4}, \frac{3}{6}, \frac{4}{8}$ *representan un mismo número racional? Escribe el procedimiento.*
La mayoría de estos profesores se sitúan en los modos SG-Q y AA-Q del sistema de los números racionales, de hecho, 3 de los profesores en formación, transitan desde un modo AA-Q a SG-Q, realizando la transformación a

escritura decimal y enfatizando que estos números tienen una única ubicación en la recta numérica, argumento dado por ellos para decir que todos esos números racionales son iguales (ver Figura 3).

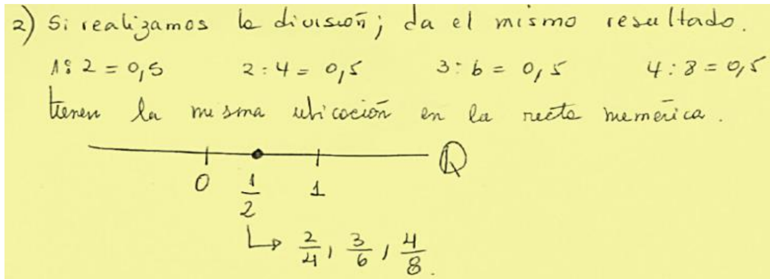

2) Si realizamos la división; da el mismo resultado.
1: 2 = 0,5   2 : 4 = 0,5   3 : 6 = 0,5   4 : 8 = 0,5
tienen la misma ubicación en la recta numérica.

Figura 3. Respuesta pregunta 2 del PF2 (Dato de la Investigación).

La totalidad de estos profesores, muestran estrategias relativas a realizar cálculos (amplificar, simplificar, transformar la expresión $\frac{a}{b}$ a su escritura decimal y realizar producto cruzado) para determinar si los números presentados son equivalentes o no lo son.

El PF3, utiliza la propiedad que define el modo SE-**Q**, sin embargo no se situan en ese modo para responder, si no, más bien solo la utiliza como un procedimiento que se enseña en la formación escolar para verificar lo pedido (ver figura 4).

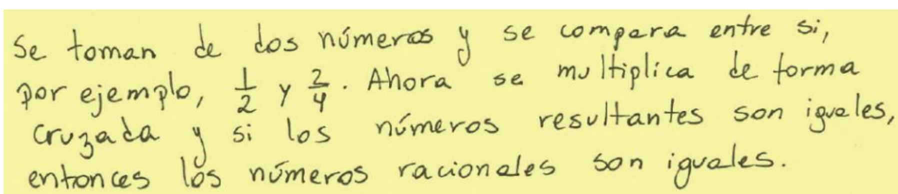

Se toman de dos números y se compara entre si, por ejemplo, 1/2 y 2/4. Ahora se multiplica de forma cruzada y si los números resultantes son iguales, entonces los números racionales son iguales.

Figura 4. Respuesta pregunta 2 de PF3 (Dato de la Investigación).

Pregunta del Guión de la Entrevista. ¿El número 1 de ***N*** *es igual al 1 de* ***Z****? ¿Al 1 de* ***Q****?*
Se solicita reflexionar y responder. El informante PE5, indica que no son iguales. Por lo tanto, es de interés para los investigadores profundizar en sus argumentos.

> Entrevistador: *¿El número 1 de N es igual al 1 de Z? ¿Al 1 de Q?*
> PE5: *yo pienso que no son iguales.*
> *Entrevistador: puedes argumentar*
> PE5: *no pueden ser iguales, porque, se agregan otros elementos de un conjunto a otro, no todos tienen las mismas características, me explico!*
> Entrevistador*: puedes especificar ¿a qué te refieres con características?*
> PE5: *El 1 de los números racionales se puede escribir como cinco quintos y uno de los naturales no. Aunque a todos le corresponde el mismo punto en la recta numérica, mmmm.*
> Entrevistador: *Entonces son iguales ¡!!!*
> PE5: *no, no son iguales … Aunque todos son neutros de la multiplicación,… pero la multiplicación es distinta en cada conjunto. O sea sus factores pueden ser naturales, números enteros o racionales.*

Entrevistador: *supongamos que son distintos, como explicarías a un colega, ¿qué estos números son distintos?*
PE5: *diría que el 1 de N también está contenido en Z y contenido en Q. pero como se agregan otros elementos al conjunto nuevo… no son iguales. Es como el mismo elemento en conjuntos distintos…*
Si lo miramos en la recta numérica tiene el mismo punto. Pero no son las mismas rectas numéricas..

Al analizar los argumentos presentados por el informante PE5, se observa que en distintos momentos se sitúa en el modo SG-Z y SG-Q, cuando indica que a los números 1 de Z y de Q le corresponde el mismo punto en la recta numérica, sin embargo las justificaciones desde este modo no son suficientes para dar una respuesta adecuada a lo que se le pregunta.
Además se observan rasgos propios del modo AA-Q, cuando responde "*El 1 de los números racionales se puede escribir como cinco quintos*" desde este perspectiva, no logra dar una respuesta satisfactoria.

Por otra parte, queda en evidencia que al parecer la relación conjuntista entre N, Z y Q propia de la formación escolar es considerada por PE5 como la estructura que define los sistemas numéricos, e insiste en argumentar desde allí, sin llegar a una respuesta clara, porque sus argumentos están desprovistos de AE-Q, donde lo que hay es una copia de un sistema en otro (ver Figura 5).

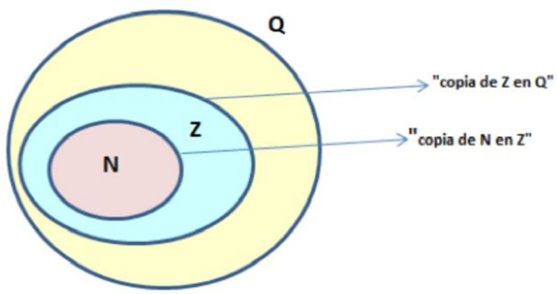


Figura 5. Copia de un Sistema Numérico en otro (Dato de la Investigación).

Caso profesores en ejercicio

Pregunta del Guión de la Entrevista. ¿El número 1 de N es igual al 1 de Z? ¿Al 1 de Q?
Se solicita reflexionar y responder.

A continuación, se muestra la respuesta del profesor PE9.

PE9: creo que el 1 es el mismo de los 3 conjuntos, sin embargo, el 1 de los naturales tiene "vecinos" distintos en la recta numérica a los que tiene en Q. Entonces al tener números distintos a su alrededor dependiendo del conjunto en que este, el 1 ya no es el mismo.
Si bien, en los tres conjuntos representa lo mismo tiene un papel distinto dado el conjunto en el que está siendo usado.
En los naturales es el primero de la recta numérica.
En los enteros es el sucesor del cero.
En los racionales es un número entre dos decimales (ej está entre 0,4 y 1,4).
Representa lo mismo, pero no es el mismo 1.

Al analizar las reflexiones de PE9, estas se interpretan desde sus argumentos que el profesor se sitúa en el modo SG-Q, cuando indica "*que los 1 tienen distintos vecinos dependiendo del conjunto en que se encuentre"* o cuando escribe "*En los racionales es un número entre dos decimales (ej está entre 0,4 y 1,4)",* sin embargo, los argumentos desde el modo SG-Q, no alcanzan para dar una respuesta satisfactoria a la pregunta, pero si, instan a un acercamiento a ese modo.

Por otra parte, PE9, hace alusión a la relación conjuntista de N, Z y Q cuando argumenta que "*en los tres conjuntos representa lo mismo tiene un papel distinto dado el conjunto en el que está siendo usado"*, esto es interpretado desde esta teoría Los Modos de Pensar, que PE9 está en vías de construir una articulación entre Z y Q.

(b) Los modos de pensar el sistema de los números complejos

En la misma línea de la búsqueda de la comprensión de los sistemas Z y Q, se abordó el estudio de C. Específicamente, se caracterizó un modelo de comprensión profunda de C desde los modos de pensamiento, y se aportó evidencia empírica sobre los modos de pensar que privilegian estudiantes de educación escolar (16-18 años) y profesores en formación inicial.

Caracterizar un modelo de comprensión para C.

Desde la literatura, diversas investigaciones reportan dificultades y errores en los procesos de apropiación de C tanto a nivel escolar como universitario (Ahmad y Shahrill, 2014; Aznar, Distéfano, Prieto y Moler, 2010; Bagni, 2001; Distéfano, Aznar y Pochulu, 2012; Martínez-Sierra y Antonio, 2009; Panaoura, Gagatsis y Giatilis, 2006; Pardo y Gómez, 2007). Particularmente, las evidencias revelan que hay una comprensión parcial de C debido, principalmente, a que se prioriza un enfoque aritmético-algebraico para su enseñanza y desde el cual se le entiende como la simple adjunción de un conjunto de números (los imaginarios) a uno preexistente (los números reales, R) cuyas propiedades y características no son explícitas; en consecuencia, los estudiantes no tienen construido un significado geométrico de C, reflejando una falta de flexibilidad en el uso de sus diferentes interpretaciones. Considerando los elementos que definen a C, y dada también su complejidad inherente, cabe preguntarse ¿cómo están comprendiendo C estudiantes escolares y de pedagogía en matemática?, y ¿cómo es posible que dichos estudiantes alcancen su comprensión profunda?

Modos de pensar C.

Los modos de pensamiento permiten abordar la comprensión profunda de C, ya que en la génesis y desarrollo del sistema se identifican cuatro momentos epistemológicos claves (Artigue y Deledicq, 1992) en los que subyacen distintas formas de pensamiento: algebraico, analítico, geométrico y formal (Martínez-Sierra y Antonio, 2009; Pardo y Gómez, 2007). Desde esta evidencia epistemológica se caracterizan tres formas de pensar C para su comprensión profunda como: el plano complejo (pensamiento SG-C); expresión algebraica $a + bi$ tal que a y b números reales e i la unidad imaginaria (pensamiento AA-C); y estructura algebraica de cuerpo tal que $i^2 = -1$ (pensamiento AE-C) (Figura 6).

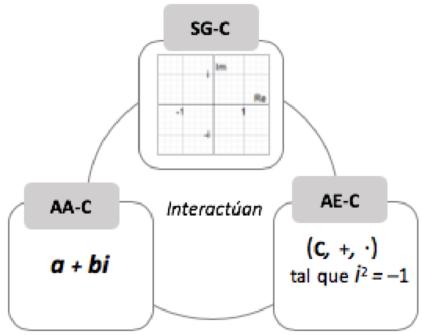


Figura 6. Modos de pensar **C** para su comprensión profunda (Randolph y Parraguez, 2019).

En el modo de pensar SG-C el pensamiento se dirige al plano complejo, a sus elementos (puntos y vectores del plano) y a todo lo que es posible realizar a partir de él, como construcciones de regla y compás de las operaciones suma y producto (ya sea en un registro de representación gráfico, geométrico o de lenguaje natural). En modo AA-C, por su parte, el pensamiento es conducido hacia la expresión $a + bi$ con a, b números reales e i la unidad imaginaria, considerando la definición de fórmulas. Mientras que en el modo AE-C, el pensamiento se enfoca en la estructura algebraica y de orden del sistema, sus propiedades y axiomas.

De esta manera, para alcanzar una comprensión de C los estudiantes deberán transitar articuladamente por los tres modos de pensar C (Sierpinska, 2000), por lo que lo valioso estará en pesquisar aquellos elementos articuladores (de la matemática: propiedades, definiciones, conceptos, entre otros) que permitan a los estudiantes transitar de un modo de pensamiento a otro. Con tal fin, se aplicaron nueve actividades matemáticas a seis estudiantes de educación escolar (E1, E2, E3, E4, E5, E6) y a cuatro profesores de matemática en formación inicial (P1, P2, P3, P4), obteniendo un modelo de comprensión validado en estos informantes.

Modos de pensar que se priorizan y elementos articuladores.

El análisis de las producciones de los estudiantes a las actividades propuestas muestra una falta de articulación de los modos de pensamiento, privilegiando el modo AA-C y careciendo de tránsitos hacia los otros modos de pensar. Las Figuras 7 y 8 exhiben, por ejemplo, las respuestas de E6 y P3 desde el modo AA-C, a la pregunta, ¿qué número complejo resulta de sumar z y w?

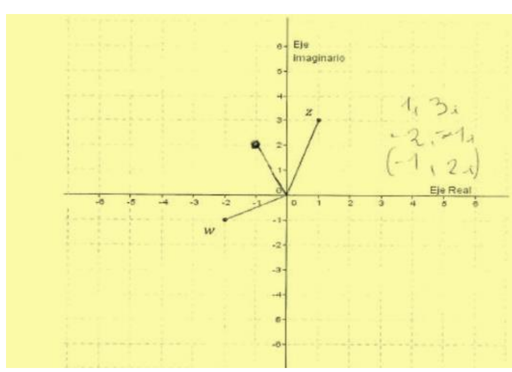
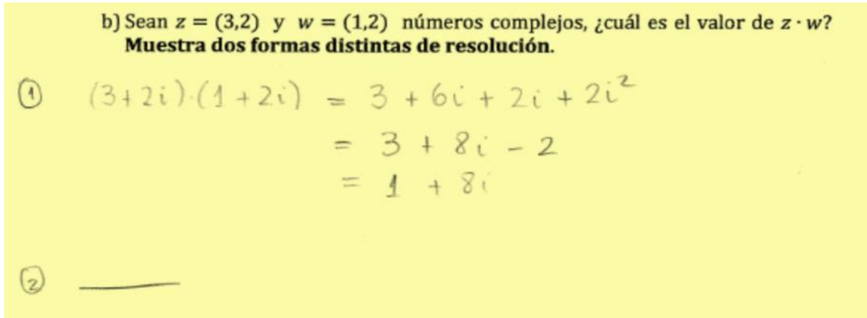


Figura 7. Respuesta de E6 (Dato de la Investigación).



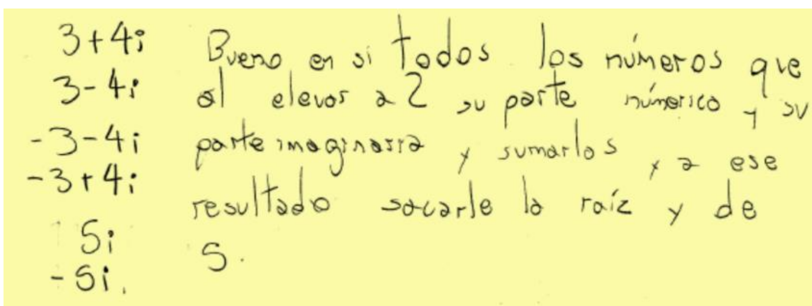
b) Sean $z = (3,2)$ y $w = (1,2)$ números complejos, ¿cuál es el valor de $z \cdot w$?
Muestra dos formas distintas de resolución.

① $(3+2i)\cdot(1+2i) = 3 + 6i + 2i + 2i^2$
$= 3 + 8i - 2$
$= 1 + 8i$

② ——

Figura 8. Respuesta de P3 (Dato de la Investigación).

En lo específico, la mayoría de los estudiantes escolares (quienes por su nivel de conocimientos solo pueden alcanzar SG-C y AA-C), no transitan al modo SG-C para resolver las actividades, debido a que no tienen un significado geométrico de C; ellos solo se sitúan y mantienen en AA-C y no reflejan un tránsito de AA-C a SG-C, a modo de ejemplo cuando se les pregunta, ¿qué números cumplen con $|z|= 5$? (ver Figura 9).

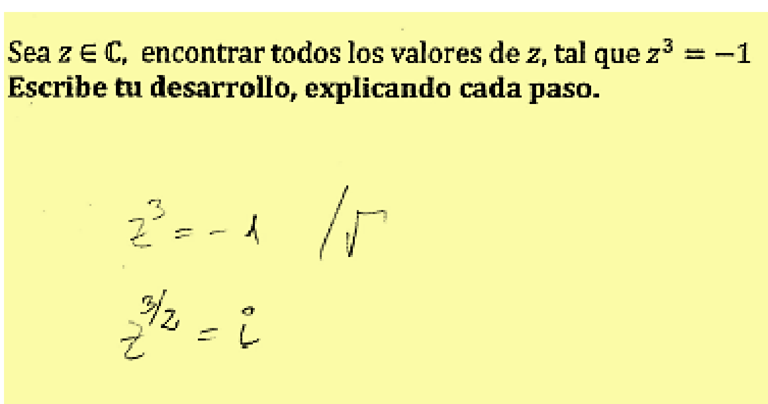


$3+4i$
$3-4i$
$-3-4i$
$-3+4i$
$5i$
$-5i$.

Bueno en si todos los números que al elevar a 2 su parte númerico y su parte imaginaria y sumarlos y a ese resultado sacarle la raíz y de 5.

Figura 9. Respuesta de E4 (Dato de la Investigación).

Además, resuelven las actividades situados desde el sistema de los números reales, lo que se refleja —entre otros— cuando insisten en que un número al cuadrado es siempre positivo.



Sea $z \in \mathbb{C}$, encontrar todos los valores de z, tal que $z^3 = -1$
Escribe tu desarrollo, explicando cada paso.

$z^3 = -1 \quad /\sqrt{\ }$

$z^{3/2} = i$

Figura 10. Respuesta de P1 (Dato de la Investigación).

Por su parte los futuros profesores de matemática exponen elementos matemáticos de los distintos modos de pensar C y se sitúan en ellos, pero en su mayoría no son capaces de transitar desde y hacia los otros modos para resolver las actividades con éxito. Por ejemplo, la Figura 10 muestra como P1 no entrega solución a la ecuación $z^3 = -1$ y aplica raíz cuadrada como si estuviera en el dominio de R. Por su parte en la Figura 11, P4 se sitúa en SG-C para responder a ¿qué número complejo resulta de sumar z y w? y utiliza también la notación *(a, b)*.

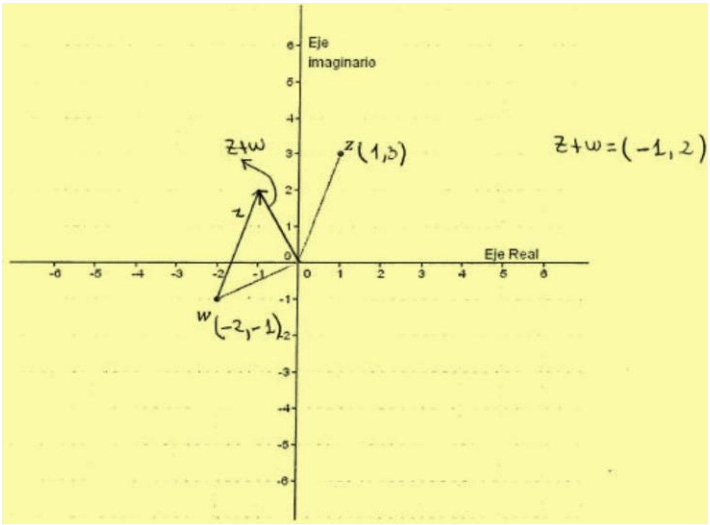


Figura 11. Respuesta de P4 (Dato de la Investigación).

Conclusiones

Desde lo general podemos concluir que los estudiantes de educación escolar y universitaria privilegian el modo AA-Sistemas Numéricos por sobre el modo de pensar SG-Sistemas Numéricos, y además que los profesores en formación inicial presentan dificultades para articular el modo de pensar AE-Sistemas Numéricos con SG-Sistemas Numéricos.

El análisis de las producciones de los estudiantes muestra una falta de articulación de los modos de pensamiento, privilegiando en todo momento el modo AA-Sistemas Numéricos y careciendo de tránsitos hacia los otros modos de pensar. En relación con el sistema numérico C, los estudiantes de enseñanza escolar resuelven las actividades situados desde R, lo que se refleja –entre otros– cuando insisten en que un número al cuadrado es siempre positivo. Por su parte los estudiantes de pedagogía en matemática evidencian elementos articuladores entre los distintos modos de pensar C, por ejemplo, la notación de par ordenado del número complejo, sin embargo, no logran transitar desde y hacia los otros modos para resolver exitosamente las actividades presentadas. Esto permite concluir una comprensión fragmentada de C y la necesidad de potenciar el trabajo desde lo geométrico y estructural. Como resultado final del estudio se entregan sugerencias didácticas sobre elementos validados en la investigación que permitirían transitar de un modo de pensamiento a otro para el diseño de actividades que favorezcan la comprensión cabal de los sistemas numéricos.

Sugerencias didácticas

En base a los resultados descritos para los sistemas numéricos Z y Q, se sugiere potenciar en la formación inicial de profesores de matemática la articulación AE–SG y AE–AA, promoviendo la reflexión en los futuros docentes, en particular sobre ¿cómo se disponen los números enteros y racionales en la recta numérica? pues, se considera necesario que los docentes comprendan la relación conjuntista no como una estructura que define los sistemas numéricos, sino, como un modelo propio de la transposición didáctica para la enseñanza de los sistemas numéricos en estudiantes de secundaria.

Por su parte, para el abordaje de C, se espera que contenidos como las coordenadas polares sean incorporados y trabajados en la enseñanza de los números complejos. Además, de acuerdo a esta investigación, se plantea como pertinente comenzar el estudio de C potenciando la conexión SG-C a AA-C y luego abordar las conexiones entre AA-C, SG-C y AE-C. Para alcanzar esto último, recomendamos actividades que comiencen situando las operaciones en el plano complejo y definiendo a la unidad imaginaria desde $i^2 = -1$ y no desde $i = \sqrt{-1}$, ya que, aunque ésta no es una notación errada, conduce a los estudiantes a aplicar propiedades en C que solo se cumplen en R, fomentando un sesgo del número real sobre el número complejo.

Agradecimientos

Este trabajo ha sido financiado por el programa de Formación de Capital Humano Avanzado de CONICYT, a través del proyecto FONDECYT Nº1180468. Los autores agradecen la buena disposición a los participantes en la investigación.

Referencias bibliográficas

Arnon, I., Cottril, J., Dubinsky, E., Oktaç, A., Roa, S., Trigueros, M. y Weller, K. (2014). *APOS Theory. A framework for research and curriculum development in mathematics education.* New York: Springer.

Ahmad, A. y Shahrill, M. (2014). Improving post-secondary students' algebraic skills in the learning of complex numbers. *International Journal of Science and Research, 3*(8), 273-279.

Artigue, M. y Deledicq, A. (1992). *Quatre étapes dans l 'histoire des nombres complexes : quelques commentaires épistémologiques et didactiques*. Cahier DIDIREM 15. Paris: IREM Paris 7.

Aznar, M. A., Distéfano, M. L., Prieto, G. y Moler, E. (2010). Análisis de errores en la conversión de representaciones de números complejos del registro gráfico al algebraico. *Revista Premisa, 12*(47), 13-22.

Bagni, G. (2001). La introducción de la historia de las matemáticas en la enseñanza de los números complejos. Una investigación experimental desempeñada en la educación media superior. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 4*(1), 45-61.

Bonilla, D. y Parraguez, M. (2015). Los números racionales: Una mirada desde la teoría. Los modos de pensamiento en la formación inicial de profesores. *Revista Chilena de Educación Matemática RECHIEM, 9*(1), 77-83.

Distéfano, M. L., Aznar, M. A. y Pochulu, M. (2012). Errores asociados a la representación geométrica-vectorial de números complejos: un análisis ontosemiótico. *Revista Iberoamericana de Educación Matemática UNIÓN, 30*, 61-80.

Fandiño, M. I. (2009). *Las Fracciones. Aspectos conceptuales y didácticos*. Bogotá: Editorial Magisterio.

Gairín, J. M. (2001). Sistemas de representación de números racionales positivos. Un estudio con maestros en formación. *Contextos educativos*, *4*, 137-159.

Martínez-Sierra, G., y Antonio, R. (2009). Una construcción del significado de número complejo y su operatividad. En P. Lestón (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* (pp. 1033-1039). México DF, México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa A. C.

Panaoura, A., Elia, I., Gagatsis, A. y Giatilis, G. P. (2006). Geometric and algebraic approaches in the concept of complex numbers. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, *37*(6), 681-706.

Pardo, T. y Gómez, B. (2007). La enseñanza y el aprendizaje de los números complejos: un estudio en el nivel universitario. *PNA*, *2*(1), 3-15.

Pinto-Rojas. I. y Parraguez, M. (2017). Articulators for Thinking Modes of the Derivative from a Local Perspective. *Mathematics Education, 12(10),* 873-898.

Randolph, V. y Parraguez, M. (2019). Comprensión del Sistema de los Números Complejos: Un Estudio de Caso a Nivel Escolar y Universitario. *Formación Universitaria*, *12*(6), 57-82.

Sierpinska, A. (2000). On some Aspects of Student´s thinking in Linear Algebra. En J. Dorier (Ed), *The Teaching of Linear Algebra in Question* (pp. 209-246). Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Stake, R. (2010). *Investigación con estudio de casos.* Madrid: Morata.