VOL 33, NÚMERO 2, AÑO 2020

LOS DIFERENTES ENFOQUES DEL ÁLGEBRA ESCOLAR Y SU INFLUENCIA EN LOS ERRORES ALGEBRAICOS DE ESTUDIANTES UNIVERSITARIOS

THE DIFFERENT APPROACHES OF SCHOOL ALGEBRA AND ITS INFLUENCE ON THE ALGEBRAIC ERRORS OF UNIVERSITY STUDENTS

José García Suárez
Centro Universitario de la Costa Sur, Universidad de Guadalajara (México).
jose.gsuarez@academicos.udg.mx

Resumen
Se reportan los hallazgos de una prueba diseñada para evaluar el nivel de comprensiónde los distintos enfoques del álgebra escolar, de185 estudiantes universitarios de primer ingreso del Centro Universitario de la Costa Sur de la Universidad de Guadalajara, México.En dicha prueba se analizaron los elementos conceptuales y cognitivos que manifestaron los estudiantes al resolver distintas tareas algebraicas que les exigían identificar y asociar los diferentes enfoques algebraicos considerando su formación educativa previa al ingreso a la universidad. Los resultados muestran que la mayoría de los estudiantes universitarios participantes, reconocen sin dificultad el uso del álgebra para la solución de ecuaciones y el desarrollo de estructuras. Sin embargo, manifiestan grandes carencias en la comprensión del álgebra para el estudio de las relaciones entre variables y sobre todo casi la totalidad de los participantes desconocen su uso para el desarrollo de patrones de generalización algebraica.

Palabras clave: enfoques del álgebra, errores algebraicos

Abstract
This paper reports on the findings of a test designed to evaluate the understanding of the various school algebra approaches by one hundred-eighty-five first-year students of the South Coast University Campus, from Guadalajara University, in Mexico. In this test, we analyzed the conceptual and cognitive elements that students show when solving different algebraic tasks that demanded they identify and associate different algebraic approaches considering their pre-university school training. The results show that most university students involved in the study are able to recognize, without difficulties, the use of algebra in the solution of equations, and the development of structures, as well. However, they show great inadequacies in algebra understanding to study the relationships between variables; and above all, almost all participants do not know their use for the development of algebraic generalization patterns

Key words: algebra approaches, algebraic errors

Introducción

Los estudiantes desarrollan conocimientos matemáticos durante sus estudios previos a la Universidad. Por lo cual es importante considerar la influencia de estos conocimientos adquiridos en sus niveles formativos pasados y su posible influencía en su comprensión actual, ya que los errores pueden venir arraigados desde la estructura básica y se presentan como un problema que se debe encontrar, analizar, comprender, corregir y validar.

Así mismo y de acuerdo con Chi y Roscoe (2002) no se debe considerar que los estudiantes se incorporan a nuevas situaciones de aprendizaje como si llegaran a un pizarrón en blanco, ya que probablemente tienen bases empíricas, no fundamentadas, que dificultan el aprendizaje de conocimientos formales con un sentido más profundo y correcto.

Otros autores como Ursini y Trigueros (1997, 1998, 2006), observaron y analizaron que el aprendizaje de los estudiantes de los diversos conceptos algebraicos, durante los niveles básico y medio superior, es poco significativo, afirmando que el nivel de manejo de estos conceptos algebraicos por parte de los mencionados estudiantes era muy elemental, concluyendo entre otras cosas, que cada alumno recurre de manera frecuente a sus conocimientos previos para poder resolver las nuevas situaciones que se les presentan, aunque estos conocimientos sean deficientes y resaltan que, comúnmente los estudiantes cuando se enfrentan a problemas complejos, suelen evitar el acercamiento algebraico y utilizan el conocimiento aritmético, en que confían más.

Con base en lo anterior, se consideró relevante investigar acerca de los conocimientos algebraicos previos de los estudiantes participantes en este trabajo, para valorar si fungen como apoyo o como dificultad al momento de enfrentar problemas matemáticos que los conducen a aplicar algunos enfoques algebraicos, que de manera hipotética ya conocen derivados de su formación académica previa a su ingreso a la universidad.

Marco teórico

Más allá de las discusiones epistemológicas y del contenido que se han desarrollado a lo largo de la historia en torno del significado del álgebra, diversos investigadores han descrito y desarrollado diferentes caracterizaciones de esta. Así pues, Kaput (1995) menciona que existen varios conceptos del álgebra en el programa de enseñanza de las matemáticas, afirmando que el álgebra se basa en la generalización, en la manipulación de la sintaxis, en el aprendizaje de las estructuras, además del estudio de las funciones, relaciones, variaciones y lenguaje modelado.

Por otra parte, el National Council of Teachers of Mathematics (NCTM, 1998) establece que los temas que se tratan en el álgebra escolar deben ser las funciones y las relaciones; el modelado; el estudio de los esquemas; junto con el lenguaje y la representación. Así mismo, Kieran (1992) caracteriza álgebra escolar como una actividad generacional, ya que esta actividad consiste en la formación de las ecuaciones como incógnitas o variables que representan situaciones problemáticas, que permite conocer las expresiones que se forman a partir de patrones numéricos geométricos, además de la formación de las expresiones entre las relaciones numéricas.

Considerando que el álgebra consiste en la formación de las ecuaciones como incógnitas o variables que representan las situaciones problemáticas que se deben resolver, tal como lo menciona en Kieran (1992), es posible formar las expresiones a partir de patrones numéricos y geométricos, también pueden formarse las expresiones de las relaciones numéricas, el álgebra también es una actividad de transformación, posiblemente como actividades que se basan en normas o reglas bien definidas como la factorización, la sustitución, sumar, restar, multiplicar, dividir polinomios, resolver ecuaciones y expresiones, simplificar y trabajar con ecuaciones y expresiones equivalentes que deben ser más manejables a otras (García, Segovia y Lupiañez, 2012).

Por otra parte, Bednarz, Kieran y Lee (1996) desarrollaron cuatro enfoques a los objetivos y contenidos del currículo de álgebra que se presenta generalmente en la escuela, mismo que se basan en los cuatro aspectos diferentes del álgebra y en cada uno de ellos pone una especial atención, dichos enfoques son: 1) el álgebra como la expresión de la generalidad; 2) el álgebra como una herramienta para resolver problemas; 3) álgebra como el modelado, el uso de múltiples representaciones; y 4) el álgebra como el estudio de las funciones.

Uno de los enfoques del álgebra que más se apega al currículum escolar es el de Usiskin (1998), quien analiza esta asignatura desde una perspectiva utilitarista y propone algunos enfoques a partir de lo que se puede hacer con esta disciplina. Usiskin, pone de manifiesto cuatro distintas concepciones del álgebra, en las que se hace énfasis en la relación que existe entre ellas y que se utiliza con propósitos su enseñanza; estos usos se representan en la tabla 1, en la se muestran las diversas concepciones del álgebra y los distintos usos de ellas.

Tabla 1. Enfoques del álgebra escolar según Usiskin (1988)

Concepción del álgebra	Ejemplo de aplicación
Aritmética generalizada	3 + 5.7 = 5.7 + 3, que se generaliza como a + b = b + a
Procedimientos para resolver problemas	Cuando se suma tres a cinco veces cierto número el resultado es 40. ¿Cuál es el númerox^2?
Estudio de relaciones entre cantidades	“¿Qué le sucede al valor 1/x cuando x se hace más grande?”
Estudio de estructuras	Factorizar $3x^2 + 4ax - 132a^2$

Fuente: Elaboración propia

Usiskin, (1988) sostiene que la diversidad de enfoques bajo los cuales los estudiantes de secundaria y bachillerato aprenden álgebra, puede condicionar el aprendizaje no holístico de los conceptos algebraicos básicos, lo cual puede tener repercusiones en las producciones de los estudiantes cuando son incapaces de integrar los cuatro enfoques antes mencionados para una correcta y completa comprensión del álgebra.

De acuerdo con Usiskin (1988), en su concepción del primer enfoque del álgebra, afirma que esta puede ser concebida como aritmética generalizada, es decir, esta perspectiva concibe el álgebra como un tipo de aritmética en la que los números se sustituyen por letras, comúnmente llamadas variables; por ejemplo, cuando se parte de un patrón aritmético para obtener una propiedad algebraica como en la siguiente tarea:

$$3 + 3 + 3 + 3 = 4 \, x \, 3$$

$$5 + 5 + 5 + 5 + 5 = 5 \, x \, 4$$

Son casos particulares del enunciado algebraico

$$z + z + z + z = 4z$$

El segundo enfoque al que se refiere Usiskin (1988), es a la orientación del álgebra como un método para la solución de problemas que impliquen la presencia de incógnitas obtenidas a partir de la generalización, es decir, que una vez establecido el patrón generalizador algebraico, la etapa siguiente consiste en la solución del problema. Para una mejor descripción de este enfoque del álgebra a continuación se describe el siguiente ejemplo:

Cuando se añade 3 a 5 veces un número determinado, la suma es 40. Encontrar el número.
El problema se traduce al lenguaje algebraico de la siguiente manera:

$$5x + 3 = 40$$

Bajo la concepción del álgebra como generalizador de patrones, se ha encontrado el modelo que se genera, en este caso, cuando se tiene conocimiento del álgebra adecuado entonces es posible aplicar las técnicas adecuadas para su resolución, sin embargo, para considerarlo como un método para solución de problemas, es necesario complementar el primer paso del procedimiento hasta obtener un valor de la incógnita. Dando secuencia al ejemplo anterior se soluciona de la siguiente manera:

Si se añade el valor -3 a cada lado se tendría, recordando que una igualdad requiere mantenerse estable y para ello lo que se haga de un lado de la igualdad es exactamente lo mismo que se debe realizar del otro lado, entonces:

$$5x + 3 - 3 = 40 - 3$$

Simplificando:

$$5x = 37$$

Finalmente resolviendo esta ecuación se obtiene que: $x = 7.4$ por lo tanto el número buscado en el problema es de 7.4.

En la solución de este tipo de problemas muchos estudiantes tienen dificultades para pasar de la aritmética al álgebra. Considerando que la solución aritmética consiste en restar 3 y dividir por 5, la forma algebraica $5x + 3$ implica la multiplicación por 5 y la adición de 3, es decir, en un sentido son operaciones inversas. En este tipo de tareas algebraicas, para establecer la ecuación hay que pensar precisamente lo contrario de la forma en que lo resolvería con la aritmética, además no se debe olvidar que en esta concepción del álgebra las variables pueden ser incógnitas o constantes.

Mientras que las palabras claves del primer enfoque de Usiskin (1988) muestran el álgebra como aritmética generalizada en donde traducir y generalizar es el objetivo, la prioridad del segundo enfoque es simplificar y resolver, obteniendo expresiones equivalentes.

El tercer enfoque que menciona Usiskin (1988), se refiere al álgebra como un instrumento utilizado en el estudio de las relaciones entre cantidades; un ejemplo de esta orientación es cuando se escribe $A = bh$, la fórmula del área de un rectángulo; en este tipo de fórmulas o expresiones algebraicas se está describiendo una relación entre tres cantidades. En este tipo de expresiones no existe la percepción de un valor desconocido, porque no se está resolviendo nada; aunque se debe tener cuidado se aborda en este tipo de expresiones, ya que la percepción de fórmulas tales como $A = bh$ es diferente de la de generalizaciones tales como $1 = n\left(\frac{1}{n}\right)$, aún a pesar de que se puede pensar en una fórmula como un tipo especial de generalización.

¿Qué ocurre con el valor de $\frac{1}{x}$ cuando x se hace más y más grande?

En este ejemplo, no se ha pedido encontrar un valor desconocido, entonces la variable no es una incógnita, tampoco se pide al alumno que traduzca, ya que existe un patrón para generalizar, pero es fundamentalmente un modelo algebraico. Bajo esta concepción, una variable es un parámetro que representa un número del que dependen otros números o también puede ser un argumento que podría representar un valor en el dominio de una función o tal vez no.

Finalmente, el cuarto enfoque que menciona Usiskin (1988), concibe álgebra como el estudio de estructuras abstractas algebraicas como grupos, anillos, dominios de integridad, campos y espacios vectoriales, en este sentido, es necesario mencionar que en la concepción del álgebra visto como el estudio de las estructuras, en estos casos, la variable es poco más que un símbolo arbitrario.
Siendo necesario ilustrar lo dicho por Usiskin (1988) en su perspectiva el autor recurre al siguiente problema:

$$\text{Factorizar } 3x^2 + 4ax - 132a^2$$

Ante una expresión algebraica como la anterior, Usiskin (1988) menciona que la concepción de álgebra representada aquí no es la misma que en cualquiera de las descritas anteriormente, en este tipo de representaciones no existe un patrón aritmético a generalizar, tampoco hay ninguna ecuación que resolver, por lo que la variable no está actuando como una incógnita y además no existe una función o relación y por último, la variable no es un argumento. Es de esperar que cuando un alumno se enfrenta a ecuaciones de este tipo, cuando no ha comprendido, ni construido expresiones algebraicas, entonces tiene problemas para poder entender que procedimientos deber realizar para intentar resolver el problema expuesto. Pero si el alumno ya ha tenido práctica en expresiones o tareas de ese tipo y ha logrado entender cómo se pueden resolver, entonces le resulta viable la factorización de dicho polinomio, cuyo resultado es

$$(3x + 22a)(x - 6a).$$

En el trabajo docente, cuando se trabaja con álgebra, se pretende que los alumnos sean capaces de operar sobre las variables sin tener que recurrir siempre al nivel del referente. Por ejemplo, si se plantea un problema cuyo objetivo sea resolver una identidad trigonométrica como la siguiente expresión

$$2\,sen2x - 1 = sen4\,x - cos4x,$$

En esta expresión, el estudiante no debe de interpretar que las funciones seno o coseno tienen un valor específico. Simplemente se requiere que el alumno manipule *sen x* y *cos x* utilizando las propiedades que son tan abstractas como la identidad que se quiere obtener. Estas expresiones algebraicas tienen ciertas reglas definidas que han sido expuestas tan ampliamente, que el estudio del álgebra se centra en las propiedades de las variables, en las relaciones entre x´s , y´s y n´s, ya sean como sumandos, factores, bases o exponentes.

Metodología

La metodología es de enfoque cuantitativo, descriptiva, la población de interés se ubica en estudiantes universitarios de primer curso.

Para la realización de este análisis se diseñó como instrumento de evaluación, una prueba escrita que contaba de 12 ítems seleccionados de los trabajos de investigación de los diversos investigadores del área de la enseñanza de la matemática, para evaluar los cuatro enfoques del algebra escolar mencionados en el marco teórico de este trabajo, una descripción general de estos ítems se presenta en la tabla 2.

Tabla 2. Descripción general del instrumento de evaluación

# tarea	Descripción tarea	Constructo/Enfoque que evalúa
1	a) Ecuación lineal b) Ecuación cuadrática simple c) Ecuación cuadrática compuesta	Algebra para resolución de problemas
2	a) Binomio al cuadrado b) Producto polinomios c) Propiedades radicales	Álgebra para manipulación de estructuras
3	3 tareas con enunciados donde se pedía establecer una función.	Álgebra como el estudio de las funciones
4	3 tareas con enunciados donde se pedía generalizar el resultado	Álgebra como patrones generalizadores

Fuente: Elaboración propia

La prueba fue aplicada en 185 estudiantes de las diferentes carreras de ingeniería del Centro Universitario de la Costa Sur, las carreras participantes se presentan en la tabla 3.

Tabla 3. Descripción de la muestra

Carrera/ Ingeniería	# participantes	# pruebas evaluadas
Mecatrónica	42	38
Obras y Servicios	35	33
Teleinformática	23	20
Procesos y Comercio Internacional	35	32
Agronomía	35	31
Recursos Naturales y Agropecuarios	34	31

Fuente: Elaboración propia

Las pruebas fueron aplicadas por el responsable de esta investigación y en acuerdo con los profesores de la asignatura de matemáticas de los grupos de primer ingreso de las carreras participantes en este trabajo.

Los criterios para la inclusión o exclusión de los participantes fueron: no se incluyeron a los estudiantes que rechazaron participar o no estuvieron en el momento de la aplicación de la encuesta. Así mismo, solo se tomaron en cuenta a los estudiantes inscritos que aceptaron ser parte de la investigación y que completaron la encuesta. Finalmente es importante mencionar que se excluyeron a los estudiantes que no completaron el 50% de la encuesta.

Resultados

Los resultados muestran que casi la totalidad de los estudiantes universitarios participantes (97.7%), reconocen sin dificultad el uso del álgebra para la solución de problemas. Sin embargo, conforme aumenta la dificultad de esas tareas, se incrementa el porcentaje de esos errores, por ejemplo, en la tabla 4, se puede observar como en la tarea 1, el porcentaje de errores muestra una tendencia ascendente conforme aumenta la dificultad de la operación a ejecutar.

Tabla 4. Porcentajes de errores de las respuestas obtenidas

# tarea	Descripción tarea	Constructo/Enfoque que evalúa	Porcentaje de errores
1	a) Ecuación lineal b) Ecuación cuadrática simple c) Ecuación cuadrática compuesta	Algebra para resolución de problemas	a) 2.3% b) 17.8% c) 48.6%
2	a) Binomio al cuadrado b) Producto polinomios c) Propiedades radicales	Álgebra para manipulación de estructuras	a) 56.7% b) 34% c) 70.8%
3	3 tareas de funciones lineales	Álgebra como el estudio de las funciones	a) 97.2% b) 97.8% c) 97.8%
4	3 tareas con enunciados donde se pedía generalizar el resultado	Álgebra como patrones generalizadores	a) 28.1% b) 88.1% c) 98.9%

Fuente: Elaboración propia

Un ejemplo de estas situaciones se presenta en la fig. 1, en donde se puede observar las respuestas de un estudiante que reafirman nuestras suposiciones:

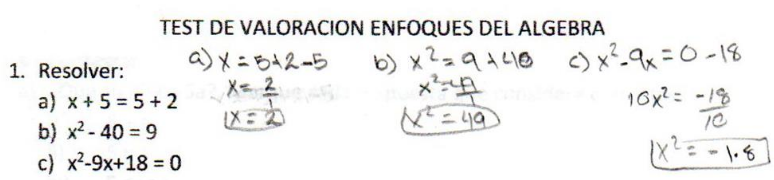
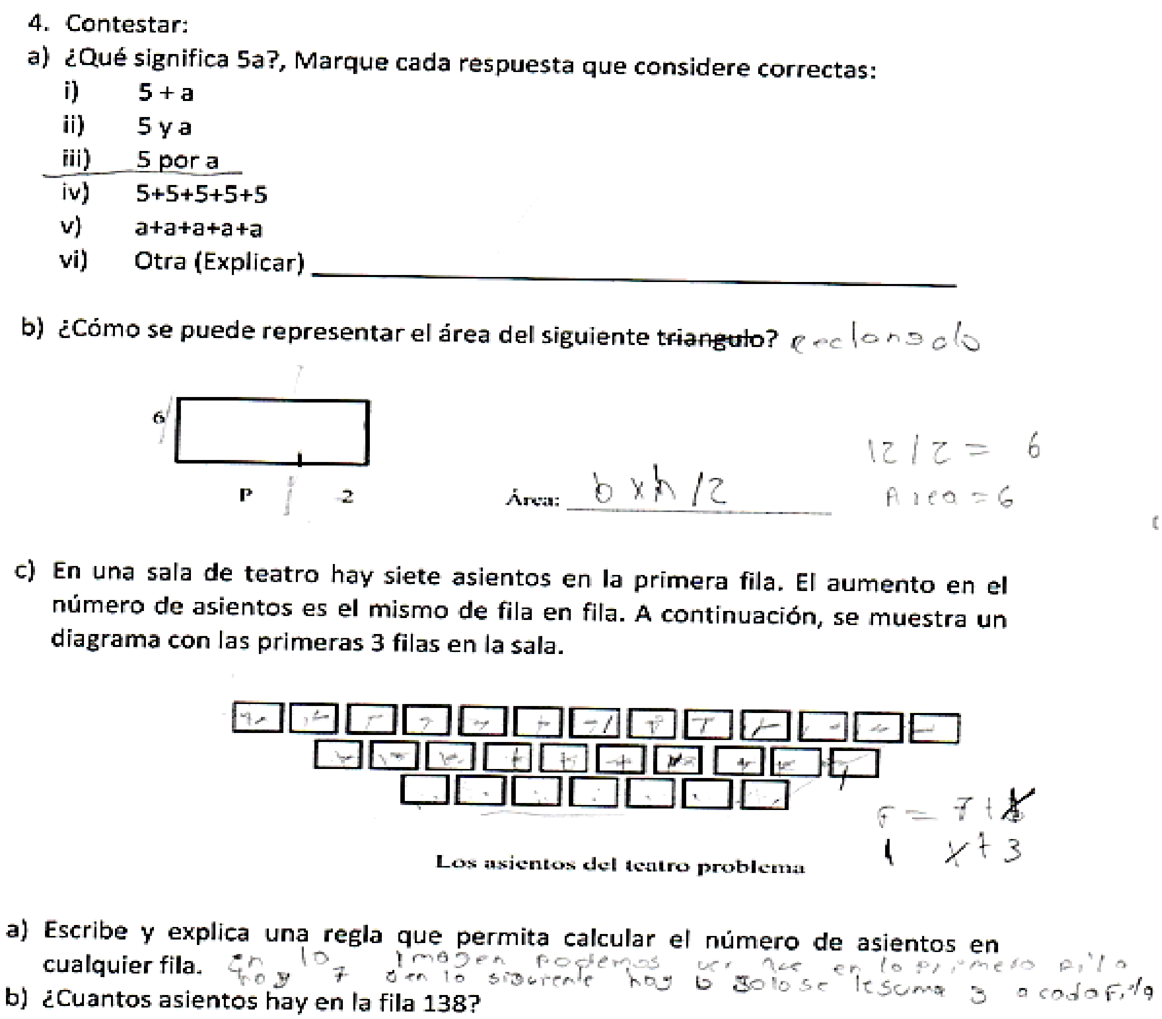


Fig.1 Ejemplo de respuestas a la tarea 1

En la figura 1, se puede ver como el estudiante no tiene problemas para resolver la ecuación lineal, pero es incapaz de dar una respuesta satisfactoria a las ecuaciones cuadráticas, las cuales le exigen un nivel cognitivo más alto para poder resolverlas. Así mismo, se puede observar como en la ecuación cuadrática completa, señalada con el inciso c), intenta utilizar sus conocimientos previos en un intento de adaptarlos a los nuevos problemas que se le presentan, cometiendo un error en su respuesta.

Algo similar se encontró en las respuestas a la tarea 4, en la cual, al aumentar el nivel de dificultad de las tareas, también aumentaron los errores. En la fig. 2 se presenta un ejemplo de esto.



4. Contestar:

a) ¿Qué significa 5a?, Marque cada respuesta que considere correctas:

i) 5 + a
ii) 5 y a
iii) 5 por a
iv) 5+5+5+5+5
v) a+a+a+a+a
vi) Otra (Explicar) ______

b) ¿Cómo se puede representar el área del siguiente ~~triangulo~~? rectangulo

6, P, 2

Área: b x h /2

12/2 = 6
Area = 6

c) En una sala de teatro hay siete asientos en la primera fila. El aumento en el número de asientos es el mismo de fila en fila. A continuación, se muestra un diagrama con las primeras 3 filas en la sala.

Los asientos del teatro problema

F = 7 + X
1 x + 3

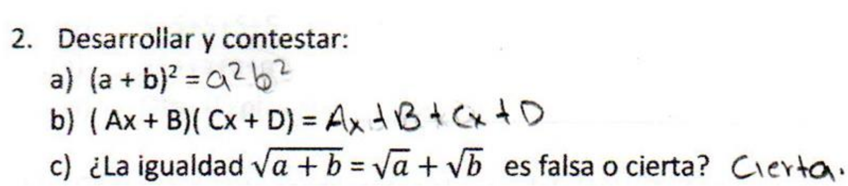
a) Escribe y explica una regla que permita calcular el número de asientos en cualquier fila. En lo imagen podemos ver que en la primera fila hay 7 en la siguiente hay 6 solo se le suma 3 a cada fila

b) ¿Cuantos asientos hay en la fila 138?

Fig. 2. Ejemplo de respuestas a la tarea 4

En la figura 2, se presenta el caso de un estudiante que sin dificultad responde a la tarea marcada como a), sin embargo, es incapaz de resolver el resto de las tareas, las cuales le exigen un mayor razonamiento para establecer expresiones algebraicas que expresen un resultado general de la situación problemática que se le presenta.

Un ejemplo de las respuestas obtenidas de la tarea 2, se muestra en la figura 3:



2. Desarrollar y contestar:

a) $(a + b)^2 = a^2 b^2$

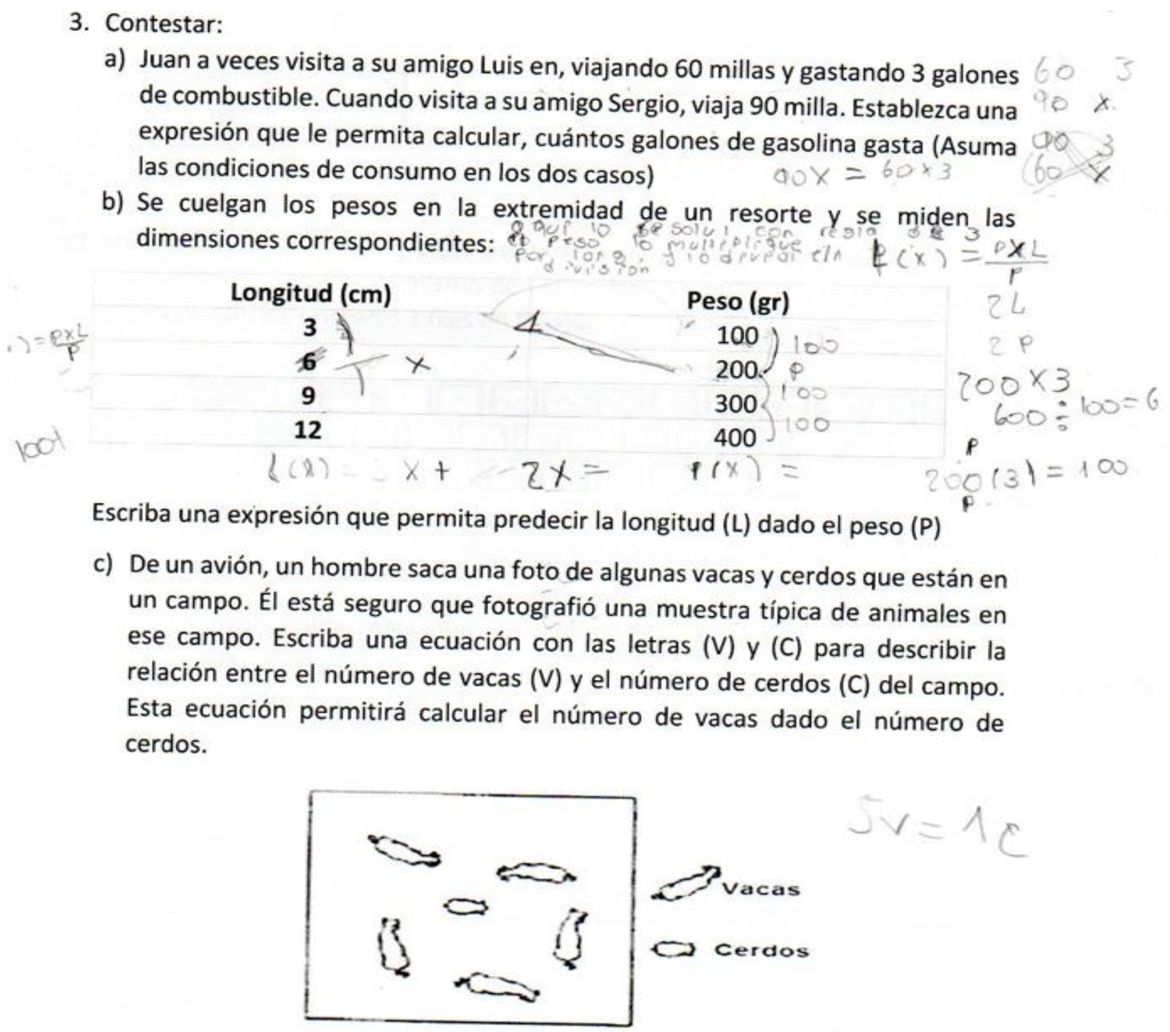
b) $(Ax + B)(Cx + D) = Ax + B + Cx + D$

c) ¿La igualdad $\sqrt{a+b} = \sqrt{a} + \sqrt{b}$ es falsa o cierta? Cierta.

Fig. 3 Ejemplo de respuestas a la tarea 2

En este ejemplo, se puede apreciar, las dificultades que manifiestan los estudiantes cuando dejen de manipular estructuras algebraicas abstractas, en las cuales no tienen valores desconocidos, limitándose a responder tratando de aplicar reglas aritméticas que parcialmente recuerdas pero que no son capaces de adaptar a los nuevos contextos matemáticos que se les presentan.

De manera similar, en la figura 4, se puede observar un ejemplo de las respuestas a la tarea 3.



3. Contestar:

a) Juan a veces visita a su amigo Luis en, viajando 60 millas y gastando 3 galones de combustible. Cuando visita a su amigo Sergio, viaja 90 milla. Establezca una expresión que le permita calcular, cuántos galones de gasolina gasta (Asuma las condiciones de consumo en los dos casos)

$90X = 60 \times 3$

b) Se cuelgan los pesos en la extremidad de un resorte y se miden las dimensiones correspondientes:

$f(x) = \frac{P \times L}{P}$

Longitud (cm)	Peso (gr)
3	100
6	200
9	300
12	400

200×3

$600 \div 100 = 6$

$200(3) = 100$

Escriba una expresión que permita predecir la longitud (L) dado el peso (P)

c) De un avión, un hombre saca una foto de algunas vacas y cerdos que están en un campo. Él está seguro que fotografió una muestra típica de animales en ese campo. Escriba una ecuación con las letras (V) y (C) para describir la relación entre el número de vacas (V) y el número de cerdos (C) del campo. Esta ecuación permitirá calcular el número de vacas dado el número de cerdos.

$5V = 1C$

Fig. 4. Ejemplo de respuestas a la tarea 3

En la figura 4, se puede observar como el estudiante es incapaz de comprender el álgebra como una herramienta para el análisis de la relación entre dos cantidades o variables, en ese ejemplo también se observa como al ser incapaz de plantear una ecuación algebraica que exprese la relación entre las variables de cada problema, recurre a tanteos o estimaciones por medio de operaciones aritméticas intentando responder lo que se le cuestiona.

Finalmente, con las respuestas obtenidas de las producciones de los estudiantes se establecieron las relaciones entre errores documentados en trabajos de investigación previamente realizados por diferentes autores (Radatz, 1979, Mosvshovitz-Hadar, Zaslavsky e Inbar 1987, Caputo y Macías (2006) y los enfoques del álgebra que sirven como marco teórico de este trabajo, dichas relaciones se presentan en la tabla 5:

Tabla 5. Relación de errores y enfoques del álgebra escolar

Descripción del error encontrado	Radatz (1979)	Mosvshovitz-Hadar, Zaslavsky e Inbar (1987)	Caputo y Macías (2006)	Enfoque asociado
Procedimientos propios incorrectos e inferencias no válidas	Errores de asociación	Inferencias no válidas lógicamente	Secuencias incoherentes	Como aritmética generalizada. Como método para resolver ciertos tipos de problemas matemáticos.
Resolución aditiva de la raíz de un binomio	Errores debidos a asociaciones incorrectas o a rigidez del pensamiento.	Teoremas o definiciones deformados.	Demostraciones incompletas o conclusiones por decreto o con pasos “intermedios” incompletos	Como aritmética generalizada, , como estudio de estructuras abstractas algebraicas
Asociación incorrecta de productos notables	Asociaciones incorrectas o rigidez de pensamiento	Teoremas o definiciones deformados	Desconocimiento o uso inadecuado de conceptos, definiciones o propiedades	Como aritmética generalizada
Resolución aditiva de la potencia de un binomio	Aprendizaje deficiente	Inferencias no válidas lógicamente	Errores algebraicos elementales ocasionados por la carencia de los conocimientos adecuados en los niveles anteriores de educación.	Como aritmética generalizada, como estudio de estructuras abstractas algebraicas
Error al realizar productos de polinomios	Aprendizaje deficiente	Errores técnicos	Desconocimiento o uso inadecuado de conceptos, definiciones o propiedades.	Como aritmética generalizada
Error para establecer generalizaciones a partir de enunciados.	Errores debidos a asociaciones incorrectas o a rigidez del pensamiento.	Interpretación incorrecta del lenguaje.	Desconocimiento o uso inadecuado de conceptos, definiciones o propiedades incluidas entre los contenidos de la asignatura de álgebra.	Como un instrumento utilizado en el estudio de las relaciones entre cantidades y como una herramienta para establecer generalizaciones a partir de enunciados.

Fuente: Elaboración propia

En la tabla 5, se establece la aparente relación que existe entre los diferentes enfoques del álgebra escolar (Usiskin, 1988) y algunas clasificaciones de errores documentadas en la literatura consultada.

Conclusiones

De acuerdo con el análisis de las respuestas obtenidas, las diversas maneras de abordar los enfoques del álgebra escolar en los niveles educativos previos al ingreso a la universidad, aparentemente no se desarrollan con la profundidad requerida para lograr un aprendizaje significativo en los estudiantes, que les permita construir una visión holística de lo que es el álgebra. Por lo anteriormente expuesto, se puede inferir que los estudiantes universitarios participantes en este estudio sólo reconocen el álgebra como herramienta para resolver ecuaciones y como un lenguaje matemático específico que les permite, por medio de la aplicación de reglas, desarrollar estructuras algebraicas carentes de valores reales. Sin embargo, a pesar de reconocer que algunas estructuras algebraicas requieren reglas para su desarrollo, así pues, casi la mitad de los participantes de este trabajo (48.6%) manifestaron respuestas incorrectas al resolver una ecuación cuadrática y hasta un 70.8% fue incapaz de reconocer una de las principales propiedades de los radicales.

Por otra parte, casi la totalidad de los estudiantes participantes en este trabajo (98.9%), fueron incapaces de establecer patrones de generalización a partir de enunciados de problemas, recurriendo la mayoría de las veces a sus conocimientos aritméticos, en el intento de adaptarlos a los nuevos contextos que se les presentaban y casi la totalidad de esos intentos finalizaban con resultados incompletos e incorrectos.

De manera análoga, la generalidad de estudiantes (más del 97%), no pudieron identificar al algebra como una herramienta para el estudio de las relaciones entre las variables o funciones, siendo incapaces de establecer estructuras o expresiones algebraicas que representaran las relaciones entre las variables que se les presentaban en los problemas con enunciados textuales que se les presentaron.

Finalmente, se puede concluir que es relevante ampliar este trabajo por medio de un análisis cualitativo de las respuestas de los estudiantes, por medio de entrevistas con una muestra representativa de los participantes de este trabajo, teniendo como objetivo principal el confirmar las deducciones realizadas y en la medida de lo posible, documentar las posibles fuentes originales que les provocan las dificultades que exhibieron al responder al instrumento de evaluación aplicado en este trabajo.

Referencias bibliográficas

Bednarz, N., Kieran, C., y Lee, L. (1996). *Approaches to Algebra.* Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Caputo, S. y Macías, D. (2006). Análisis de los errores de los alumnos de la asignatura “Algebra I” al elaborar demostraciones. Disponible en*: http:// www.unne.edu.ar/ Web / cyt/ cyt2006/ 09-Educacion/ 2006-D-012.pdf.*

Chi, M. T. H., y Roscoe, R. D. (2002). The process and challenges of conceptual change. In M. Limon & L. Mason (Eds.), *Reconsidering conceptual change: Issues in theory and practice* (pp. 3-27). Dordrecht: Kluwer.

García, J., Segovia, I., y Lupiáñez, J. L. (2012). Antecedentes y fundamentación de una investigación sobre errores en la resolución de tareas algebraicas. En D. Arnau, J. L. Lupiáñez, y A. Maz (Eds.), *Investigaciones en Pensamiento Numérico y Algebraico e Historia de la Matemática y Educación Matemática* (pp. 139-148). Valencia: Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universitat de València / SEIEM.

Kaput, J. (1995). *Transforming algebra from anengine of inequity to anengine of mathematical power by “algebrafying” the K-12 curriculum*. Paper presented at the Annual Meeting of the National Council of Teachers Mathematics. Boston MA.

Kieran, C. (1992). The learning and teaching of school algebra. In D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 390-419). New York: Macmillan.

Movshovitz-Hadar, N.; Zaslavsky, O. & Inbar, S., (1987). An empirical classification model for errors in high school mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education,* 18 (1): 3-14.

National Council of Teachers of Mathematics (NCTM) (1998). *Principles and Standards for School Mathematics: Discussion Draft*. Reston. Virginia: NCTM.

Radatz, H. (1979). Errors Analysis in Mathematics Education. *Journal for Research in Mathematics Education,* 9: 163-172.

Ursini, S. y M. Trigueros (1997), "Understanding of different uses of variable: A study with starting college students", *Proceedings of the XXI PME Conference*, Lahti, Finlandia, pp. 4-254–4-261.

Ursini, S. y Trigueros, M. (1998). Dificultades de los estudiantes universitarios frente al concepto de variable. En Hitt, F. (Ed.), *Investigaciones en Matemática Educativa* II. (pp. 445-463). Grupo Editorial Iberoamérica: México.

Ursini, S. y Trigueros, M. (2006). ¿Mejora la comprensión del concepto de variable cuando los estudiantes cursan matemáticas avanzadas? *Educación Matemática*. 18 (3): 5-38.

Usiskin, Z. (1988). Conceptions of school algebra and uses of variables. En A. Coxford (Ed.), *The ideas of algebra K–12* (pp. 8-19). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.