VOL 33, NÚMERO 2, AÑO 2020

INICIOS DE UN ESTUDIO SOCIOEPISTEMOLÓGICO DEL MÉTODO SEPARACIÓN DE VARIABLES EN ECUACIONES DIFERENCIALES PARCIALES

A PREVIEW OF A SOCIO-EPISTEMOLOGICAL STUDY OF THE METHOD OF SEPARATING VARIABLES IN PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATIONS

Alan Arturo Flores Cambrón, Rosa María Farfán Márquez
Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional, (México).
alan.flores@cinvestav.mx, rfarfan@cinvestav.mx

Resumen
En este trabajo se reportan los inicios de un estudio del método de separación de variables (MSV) en Ecuaciones Diferenciales Parciales; dado que el proyecto se encuentra en una fase inicial, nos centraremos en *caracterizar* al *MSV* en fenómenos donde su solución es posible expresarla por medio del producto de dos funciones, las cuales son independientes una de la otra; sugiere aspectos teóricos y metodológicos como el *análisis bibliográfico* de textos que serán eje transversal para dar una caracterización, así como la manera en que es posible determinar la naturaleza de otros fenómenos que su solución pueda hacer uso del método.

Palabras clave: método de separación de variables, socioepistemología

Abstract
This paper reports on a preview of a study related to the method of separation of variables in Partial Differential Equations. As the project is in a starting phase, we focused on characterizing the method of separating variables in phenomena where their solution can be expressed by means of the product of two functions, which are independent one from the other. It suggests theoretical and methodological aspects such as the bibliographical analysis of works, which will be a transversal axis, in order to give a characterization; as well as, the way that makes possible to determine the nature of other phenomena that can use the method of separating variables in their solution.

Key words: method of separating variables, socio-epistemology

Introducción

La fase inicial de la presente investigación se sitúa en dos campos de conocimiento: la Física y la Matemática. La Física explica la naturaleza y su comportamiento a través de la Matemática para comprender el mundo que nos rodea y en la Matemática recae su interpretación mediante la modelación de los fenómenos físicos considerando ciertas variables. Las Ecuaciones Diferenciales Parciales (EDP) se utilizan por su gran capacidad de modelar estos y otros fenómenos (p. e.: químicos, biológicos, de ingeniería o de economía).

Las Ecuaciones Diferenciales (ED) resultan muy interesantes por la diversidad de aplicaciones que tienen. Stephan y Rasmussen (2002), en su investigación, indican que los avances en la tecnología y la evolución de los intereses de los matemáticos en los sistemas dinámicos están provocando actualmente cambios en los primeros cursos de ecuaciones diferenciales; lo anterior refiere a que los enfoques tradicionales de enseñanza de las ecuaciones diferenciales están centrados en mecanizar métodos para encontrar las *funciones solución*, sin que se comprenda su significado, más aún, se deja a un lado e incluso en el olvido la manera en que el estudiante pueda interpretar la solución de forma gráfica.

Hay esfuerzos en la enseñanza de las Ecuaciones Diferenciales que están empezando a formar nuevos modelos de aprendizaje para los estudiantes, este tipo de análisis del aprendizaje se ha centrado en la cognición de los estudiantes de forma individual (Stephan, Rasmussen; 2002). Estos autores mencionan que este tipo de análisis son valiosos dentro de la práctica matemática, ya que se pueden tener cambios favorables en cuanto al ambiente instruccional, y esto no es solo por parte del docente, sino que incluye, tareas, el discurso Matemático Escolar (dME), las normas establecidas dentro del aula y lo importante, las herramientas que están presentes en el aprendizaje de las matemáticas, esto a través de formar modelos de aprendizaje de Ecuaciones Diferenciales que promuevan la resolución de problemas matemáticos por medio prácticas matemáticas dentro del aula donde a partir de diseños secuenciales se involucren a los estudiantes a interactuar por medio de equipos para la resolución de problemas específicos.

Como se mencionó arriba Stephan y Rasmussen (2002) mencionan que los modelos de aprendizaje de Ecuaciones Diferenciales se han centrado en la cognición de los estudiantes de forma individual, donde se permite observar que no existen análisis colectivos complementarios en cuanto al tratamiento de un concepto, esto es, que por medio de los diseños secuenciales didácticos se pongan en práctica los conocimientos *previos a* la resolución de un problema asociado a las Ecuaciones Diferenciales, a partir del intercambio de ideas matemáticas entre los estudiantes, para así ir robusteciendo la lluvia de ideas asociadas al concepto y una vez logrado comprenderlo y poder dar una solución.

Una vez centrados en el rubro de las Ecuaciones Diferenciales, destacamos la importancia no solo de su enseñanza y el auge que hoy día está teniendo; si bien, existen dos tipos de Ecuaciones Diferenciales que permiten en su contexto dar solución a un sinfín de problemas de diversa índole; hay un tipo especial de ecuaciones que brinda una mejor interpretación por medio de la modelación matemática al incluir más de dos variables independientes, ya que la mayoría de los fenómenos físicos que están presentes en la Naturaleza involucran más de dos variables, estos fenómenos son explicados por medio de Ecuaciones Diferenciales Parciales (EDP), mientras que, las Ecuaciones Diferenciales Ordinarias (EDO) solo permiten hacer uso de una sola variable independiente, y para este tipo de problemas resulta insuficiente su uso debido a que no detalla de forma *completa* a un fenómeno.

La naturaleza de este tipo de ecuaciones (EDP) permite tratar problemas donde influyen más de dos variables independientes, como anteriormente se ha descrito; sin embargo es importante hacer notar que, en un primer curso de EDP, se introduce al estudiante a que conozca los conceptos básicos de estas, como su definición, el campo de aplicación, los tipos y su clasificación de estas ecuaciones, sin soslayar la mecanización algebraica, en un primer momento cuando el estudiante comprueba *funciones solución* de cierto tipo de EDP, aquí es donde se presupone que el estudiante tiene un buen dominio de técnicas del cálculo en una variable y varias variables reales, como la derivación e integración, por mencionar algunas.

Posteriormente lo que ofrece el dME de un curso de EDP, dicho lo anterior es introducir al estudiante a que conozca los *métodos de solución* dada su clasificación y que el estudiante pueda identificar para hacer uso de estos, es necesario mencionar que dentro de los más usados es el *Método de Separación de Variables (MSV)*, es en este, que nuestra *problemática* estará centrada, para dar inicio a la presente investigación, ya que la mayoría o sino es que en la totalidad de veces en un curso se le dan al estudiante EDP donde el método funciona, y aprende a utilizarlo, sin embargo, el estudiante no sabe caracterizar el uso de este método, es decir, ¿por qué funciona?, ya que está centrado en la operatividad algebraica y es donde de alguna forma pierde una de sus importancias como el saber a qué se debe el empleo de este método o bien, qué fenómenos están intrínsecos en él.

Si bien, este método es típico y sin duda alguna uno de los más usados y poderosos debido a la bondad que ofrece para hallar o encontrar soluciones de las EDP-lineales, sin embargo, en algún momento si se aplica a otro cierto tipo de EDP llega a no poder funcionar.

Su planteamiento matemático permite suponer soluciones exactas separables de una EDP, siendo esta de la forma $U(x,t) = \phi(x) \circ \psi(t)$, es decir, donde $\phi(x)$ y $\psi(t)$ son funciones de x y t respectivamente, e independientes una respecto a la otra, el operador $\circ$ indica que puede ser una solución de forma aditiva o multiplicativamente (Shingareva y Lizárraga-Celaya, 2010).

Investigaciones recientes como la de Shingareva y Lizárraga-Celaya (2010) mencionan, que en general, el *Método de Separación de Variables (MSV)* permite reducir el problema original a un sistema de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias (EDO), el cual se pude resolver por cuadraturas, es decir, por el empleo de integrales. Indican también, que la aplicación exitosa de este método a varias ecuaciones de la física-matemática nos lleva a buscar una transformación de variables tal que en las nuevas variables la EDP se puede resolver mediante un *ansatz*, este término es usado por físicos y matemáticos para referirse a la solución estimada a una o varias ecuaciones que describen cierto fenómeno físico o matemático, considerando el caso de las ED, se establece un *ansatz* y las ecuaciones son resueltas considerando las condiciones de Cauchy (llámese también condiciones iniciales) para las EDO o bien las condiciones de frontera para las EDP.

Aunque aún, no existe todavía un método que nos permita decidir si una EDP dada admite soluciones separables y como encontrar estas, existen algunas clases particulares de EDP que brindan criterios algorítmicos de separabilidad que nos permiten decidir si la separación de variables existe y cómo es posible encontrar las soluciones explícitamente (Shingareva y Lizárraga-Celaya, 2010), tras el panorama descrito anteriormente, podemos decir que la operatividad o mecanización algebraica siempre estará presente en el *MSV*, lo que permite que el método sea efectivo, ya que recurre a conceptos matemáticos conocidos; además de ser una de las primeras técnicas aprendidas en la resolución de EDO de primer orden, y al ser aplicado a EDP el método es muy similar al de las EDO; finalmente el *MSV* nos lleva a la resolución de problemas de valores en la frontera mediante Series de Fourier.

Es por eso que nuestro objetivo será caracterizar al *MSV* a través de la búsqueda de fenómenos físicos en diversas fuentes bibliográficas como artículos, obras originales, libros especializados de física-matemática que permitan brindar una mirada acerca del por qué es posible expresar la solución por medio del producto de dos funciones independientes, tal y como lo detalla el *MSV*, ya que el discurso matemático escolar (dME) de un curso donde este método se enseña como lo es en Ecuaciones Diferenciales Parciales, al estudiante solo se le da la manera en cómo es que debe mecanizarlo al resolver ecuaciones o problemas con valores en la frontera de los ya conocidos como la ecuación de onda, de calor o de Laplace por mencionar algunos.

Por otro lado, Farfán (2012) menciona que la potencialidad del cálculo algebraico y el surgimiento de la ingeniería tuvieron en el Siglo XVIII, permitieron consolidar los fundamentos sobre los que el *análisis* se apoyaba como la teoría de funciones, el papel del álgebra, el continuo real y la convergencia de series, así como la interpretación física de las soluciones matemáticas a fenómenos.

López-Ortega (2016) en su trabajo menciona que en los últimos años en París, Fourier publicó una serie de trabajos tanto en matemáticas puras como aplicada; estos trabajos proporcionaron un gran impulso para posteriores investigaciones sobre series trigonométricas y la teoría de funciones de variable real, pero la historia del Análisis de Fourier tiene más de 200 años, y sus orígenes se encuentran unos 60 años antes del momento en que Jean Baptiste Joseph Fourier presentara la primera versión de su trabajo sobre la teoría de la conducción del calor a la Academia de París en 1807, sin embargo, este fue rechazado.

Como referentes teóricos para esta investigación es necesario situarnos en el contexto histórico de la época: En el Siglo XVII, dado al desarrollo del cálculo se había convertido en una de las principales herramientas para estudiar y modelizar la naturaleza, es en ese marco entonces que una de las ideas era representar la evolución de un fenómeno físico por medio de una ED que relacionaba diferentes magnitudes que involucraban al fenómeno, la ecuación que lo modelaba surgía a través del análisis propio del fenómeno pero a nivel infinitesimal, ya que los fenómenos que se describían podían hacerse en términos de una sola variable (independiente) y estos eran modelados por medio de EDO, donde la ecuación relacionaba a la función desconocida respecto de sus derivadas más aún dado que en los Siglos XVII y parte del XVIII ya se tenían en desarrollo un número considerable de métodos de resolución para este tipo de ecuaciones; sin embargo, cuando el fenómeno físico dependía de dos o más de dos variables (independientes), su modelización venía regida por una EDP en donde el tratamiento era aún más difícil.

De los primeros fenómenos estudiados de ese tipo fue *El problema de la cuerda vibrante (Ecuación de onda)*, el cual llamó y acaparó la atención de una gran cantidad de físicos y matemáticos contemporáneos; la versión del problema es la siguiente:

Farfán (2012) lo detalla de la siguiente manera: Supóngase que una cuerda flexible se ha tensado sobre el eje x y sujetada de dos puntos, que por conveniencia serán $x = 0$ y $x = \pi$. Así, la cuerda representará una cierta curva $y = f(x)$ en el plano XY; donde si se le deja en libertad producirá *vibraciones* en el plano. El problema consiste en determinar su movimiento, es decir, su posición, velocidad y aceleración en cualquier instante. En 1747, D'Alembert, se interesó por el problema y, bajo diversas hipótesis que permitieron obtener la ecuación de movimiento como la subsecuente vibración considerarla transversal, es decir, cada punto de la cuerda tiene coordenada constante $x = l$ y, por tanto, su coordenada y depende sólo de x en el instante t. Así, el desplazamiento de la cuerda desde su posición de equilibrio está dado por alguna función $y = y(x,t)$, donde si calculamos la primera y segunda derivada parcial respecto al tiempo serán $\frac{\partial y}{\partial t}$ y $\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$, donde representan la *velocidad* y *aceleración* de la vibración de la cuerda respectivamente.

Ahora si consideramos el movimiento de un *pedacito* de la cuerda, que en su posición de equilibrio tiene longitud Δx. Si la densidad lineal de la masa de la cuerda es $m = m(x)$, la masa del *pedacito* es $m\Delta$x y, según la Ley de movimiento de Newton, la fuerza transversal F que actúa sobre el *pedacito* está dada por la ecuación:

$$F = m\Delta x \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \cdots (a)$$

Ya que la cuerda es flexible, la tensión $T = T(x)$ en cualquier punto está dirigida a lo largo de la tangente y tiene por componente y a $T \sin\theta$. La siguiente hipótesis se refiere a que el movimiento de la cuerda se debe únicamente, a la tensión sobre ella. Como consecuencia, F es la diferencia entre los valores inicial y final de $T \sin\theta$ en nuestro *pedacito*, a saber $\Delta(T \sin\theta)$; por tanto (a) se convierte en:

$$\Delta(T\sin\theta) = m\Delta x\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}\cdots(b)$$

Si las vibraciones de la cuerda son relativamente pequeñas, es decir, si θ es pequeño, $\sin\theta$ es aproximadamente igual a $\tan\theta = \frac{\partial y}{\partial t}$; así (b) se convierte en:

$$\frac{\Delta\left(T\frac{\partial y}{\partial t}\right)}{\Delta x} = m\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}\cdots(c)$$

y cuando $\Delta x \to 0$, obtenemos: $\frac{\partial}{\partial x}\left(T\frac{\partial y}{\partial t}\right) = m\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}\cdots(d)$. Finalmente, puesto que la masa m y la tensión T son constantes, obtenemos:

$$a^2\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}\cdots(e)$$

donde $a = \sqrt{\frac{T}{m}}$. Usualmente, a esta ecuación le nombramos *ecuación de onda* unidimensional y una solución $y(x,t)$ de ella debe satisfacer las condiciones de frontera: $y(0,t) = 0\cdots(f)$ y $y(\pi,y) = 0\cdots(g)$ así como las condiciones iniciales $\left.\frac{\partial y}{\partial t}\right|_{t=0} = 0\cdots(h)$ y $y(x,0) = f(x)\cdots(i)$. Las restricciones (f) y (g) expresan la suposición de que los extremos de la cuerda permanecen fijos en los puntos $x = 0$ y $x = \pi$; en tanto que (h) e (i) aseguran que la cuerda no tiene movimiento cuando es liberada y que $y = f(x)$ es su forma inicial, respectivamente. Observemos que ninguna de estas condiciones se relaciona con la obtención de (e).

Daremos una solución formal de (e) utilizando el *método de separación de variables (MSV)*. Es decir, supondremos que la solución es de la forma:

$$y(x,t) = u(x)v(t)$$

factorizable en un producto de dos funciones, *en donde cada factor depende sólo de una de las variables independientes involucradas*. Sustituyendo esta última relación en (e), se tiene: $a^2u''(x)v(t) = u(x)v''(t)$ o, equivalentemente a:

$$\frac{u''(x)}{u(x)} = \frac{1}{a^2}\frac{v''(t)}{v(t)}\cdots(j)$$

El lado izquierdo es una función de x, únicamente, y el lado derecho sólo depende de t, por lo que esta relación se cumple solamente si ambos miembros de la ecuación son constantes. Denotamos dicha constante por $-\lambda$; así (j) da lugar a EDO, una para $u(x)$ y otra para $v(t)$: $u''(x) + \lambda u(x) = 0\cdots(k)$ y $v''(t) + \lambda a^2 v(t) = 0\cdots(l)$. Ahora debemos encontrar las soluciones de estas ecuaciones: la primera sujeta a las condiciones de frontera $u(0) = u(\pi) = 0$, y la segunda a las restricciones iniciales $v'(0) = 0$ y $v(0) = f(x)$. La constante λ representa cualquier número real, y parte del trabajo al resolver las ecuaciones (k) y (l) consiste en determinar los valores de λ para los que el problema puede resolverse.
Si consideramos $\lambda = 0$, la solución general de (k) es $u(x) = c_1x + c_2$; pero como $u(0) = 0 = u(\pi)$, tendremos que la única solución que satisface las condiciones de frontera es la *trivial*. Lo mismo sucede si λ es negativa.

Si nos restringimos al caso $\lambda > 0$, una solución es $u(x) = \sin\sqrt{\lambda}\,x$, pero $u_2(x) = \cos\sqrt{\lambda}\,x$ es también solución, *así como cualquier combinación lineal de ellas*; por tanto, la solución general de (k) es:

$$u(x) = c_1\sin\sqrt{\lambda}\,x + c_2\cos\sqrt{\lambda}\,x$$

Como $u(0)$ debe ser cero, la solución se reduce a:

$$u(x) = c_1 \sin\sqrt{\lambda}\, x$$

De la segunda condición de frontera, $u(\pi) = 0$, se debe tener que $\sqrt{\lambda}\pi = n\pi$, para algún entero positivo n, es decir $\lambda = n^2$. En otras palabras, λ debe ser igual a alguno de los números $1, 4, 9, \ldots$. A estos valores de λ se les llama *valores propios* del problema, y a las soluciones correspondientes $\sin x\,, \sin 2x\,, \sin 3x\,, \ldots\,, \cdots (m)$ se les conoce como *funciones propias* o *eigenfunciones*. En tanto que los valores propios están determinados únicamente por la naturaleza del problema, no es así para las eigenfunciones, pues para cualquier constante diferente de cero, los múltiplos de (m), $a_1 \sin x\,, a_2 \sin 2x\,, a_3 \sin 3x\,, \ldots$, son eigenfunciones. Así las correspondientes soluciones de (k) son $u_n(x) = \sin nx\,, n = 1, 2, 3, \ldots$. Similarmente, para los valores de λ, la solución general de (l) es $v(t) = c_1 \sin nat + c_2 \cos nat$ y, si imponemos la condición de que $v'(0) = 0$, entonces $c = 0$, obteniéndose las soluciones $v_n(t) = \cos nat$. Recordamos que la solución para la ecuación que describe el movimiento de la cuerda es de la forma $y(x,t) = u(x)v(t)$ por lo tanto, las soluciones de (e) son de la forma: $y_n(x,t) = \sin nx \cos nat$. Cada una de estas funciones, para $n = 1, 2, 3, \ldots$, satisface a la ecuación (e) y a las condiciones $(f), (g)$ y (h); lo anterior puede verificarse que es válido para cualquier suma finita de múltiplos de las $y_n's$.

Si bien podemos notar, que el *MSV* ha estado presente durante muchos años, *Fourier fue el que detalló este método en su obra Thèorié Analytique de la Chaleur* (1822), cuyo resultado descansa en 15 años atrás de arduo trabajo y en ella se matematiza un nuevo campo de fenómenos físicos no abordados hasta entonces (Farfán, 2012, p. 89). Fourier estudia la determinación de las leyes matemáticas que gobiernan los fenómenos de propagación del calor en la naturaleza, bajo la hipótesis de que el calor penetra todas las substancias del Universo, de la misma manera que la gravedad actúa sobre los graves. Reconoce que las teorías mecánicas no se aplican a la naturaleza del calor, el cual posee su propia especificidad; esto impide que sea explicado con base en los principios del movimiento y del equilibrio (Farfán, 2012).

Es así que nuestro interés por caracterizar al MSV en fenómenos físicos a partir de estos fenómenos permitirá estudiar la naturaleza de nuevas fenomenologías que pudiesen estar presentes en la Naturaleza, e incluso no solo de índole física; pensemos en el ámbito económico, donde la versatilidad de los flujos de un capital es invariante respecto al tiempo y otras variables de forma rápida.

Pensamos que, si bien, lo descrito anteriormente es modelado por una EDP-lineal (problema de la cuerda vibrante y la ecuación de calor), podemos imaginar el caso en el que los fenómenos no tienen un comportamiento transversal, o lineal, ¿será posible usar el MSV en fenómenos no-lineales?, esta pregunta es parte de lo que nos compite y sobre la cual la presente investigación está teniendo sus inicios.

Metodología

El inicio de esta investigación es planteada a partir de la Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa (TSME) la cual muestra un acercamiento al proceso de *significación*, mediante los *usos* y los entendemos como "las formas en que es empleada o adoptada determinada noción en un contexto específico" (Cruz-Amaya, 2019) esto recae en la transversalidad de hacer un *análisis de obras originales,* este análisis se hace de forma minuciosa en memorias, textos y tratados de los Siglos XVII, XVIII, XIX y XX donde se persigue el objetivo de identificar estrategias formales e informales que propician la *construcción de conocimientos matemáticos*, teniendo como referencia, el pensamiento físico propio de los fenómenos del movimiento; este análisis busca establecer de qué manera el pensamiento físico se nutre de los fenómenos de flujo el cual *contribuye* a la construcción del pensamiento matemático.

Cantoral (2013) menciona que el análisis epistemológico es una de las principales características para entretejer a los hechos científicos con base a sus circunstancias históricas y culturales que salen a la mirada de hoy día en diversos contextos, como lo es el nivel institucional, los actores y sus prácticas ya que son propiciadores de preguntarse sistemáticamente "*por qué se piensa de esta manera"*, con relación en la dirección, en el significado y el sentido del pensamiento de los científicos y matemáticos del periodo, es así que el inicio de la presente investigación está direccionado en conocer esa mirada científica singular como lo es *Thèorié Analytique de la Chaleur* (1822) de Fourier como eje transversal para concebir esa práctica acerca de la caracterización del *MVS* en fenómenos físicos.

Taylor (1715) expuso en su obra donde la idea y motivación principal de este método se da en la ecuación de difusión, el problema que el presentaba, y que más le interesaba era el del modo en que el calor fluía de un punto a otro a través de un objeto (caso de la lámina infinita); reconocer los elementos intrínsecos en la obra original dirigirán a la presente investigación a partir de un *análisis bibliográfico* para dar crítica a aquellos elementos que estén presentes en ella y que permitieron asociar la estructura del objeto matemático que es el *MSV* para dar solución a fenómenos físicos donde su naturaleza está dada por la independencia de las variables involucradas en dicho fenómeno.

Es necesario detallar que la conformación de nociones para el desarrollo del pensamiento matemático de ese tiempo permitieron confrontar a lo que hoy día se sabe o se conoce y que está presente de alguna manera en el dME, lo que derivó a que esas *prácticas* permitieron caracterizar ese *uso* y poder dotarlo de *significado*; es importante mencionar que el estudio está fuertemente ligado a fenómenos de la Física, específicamente a aquellos fenómenos en donde su naturaleza permite caracterizar matemáticamente a través del comportamiento, sea una variable como el *tiempo*, el *espacio*, por mencionar algunas, Cantoral (2013) detalla, que este tipo de estudios tiene un trasfondo donde su desarrollo se encuentra el *Preadiciere* como idea germinal.

Cantoral (2013) menciona que el *Preadiciere* es "La acción intelectual del sujeto epistémico sobre los datos fácticos para establecer los patrones de regularidad del comportamiento de lo que ha de predecirse. Acción que tiene efecto, sólo con el conocimiento de las explicaciones causales de los fenómenos estudiados", por lo que será un lente teórico *para ver la posibilidad de predecir* el *comportamiento de la solución* de los fenómenos físicos a lo largo del tiempo y/o de cualquier otra variable que esté influyendo; para así después expresar matemáticamente la solución, haciendo uso propiamente del *MSV* que en su mayoría es funcional usar en las EDP lineales.

Marco referencial

Dada nuestra línea de investigación y sustentados en la Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa (TSME) la cual tiene como aporte fundamental: modela la *construcción social del conocimiento matemático* conjuntamente con su *difusión institucional*, esto es, modeliza las dinámicas del *saber* o *conocimiento puesto en uso* (Cantoral, 2013, p. 97) con esto nos referimos a que dentro de la investigación en Matemática Educativa bajo esta orientación, se inicia particularmente con el tratamiento del *saber*, para lograr lo anterior, Cantoral (2013) menciona que fue necesario introducir a la noción de *uso*, en contraste con la noción psicológica de *adquisición por aprendizaje*; donde se pasó del *conocimiento estático* al estudio del *conocimiento en uso*, es decir, al estudio del *saber*; es así que, a través de esta postura nos permitirá *caracterizar* el *MSV en fenómenos físicos* donde a partir del estudio de su naturaleza permite ver el *uso* que dota de significado al método, lo cual lo señala Cantoral (2013), como una posibilidad de intervención en contextos escolares, ahora bien si nos centramos propiamente en el dME de un curso de EDP, o incluso en escenarios de conocimiento más amplios, pero de corte didáctico, donde se puede pensar en la posibilidad de hacer intervenciones didácticas para la mejora de un curso en ED, dado que el *MSV* es de los primeros métodos que se enseñan en un curso, tanto en EDO como en EDP, aunque la manera de tratarlos en ambas áreas de la matemática difieren la forma algebraica de brindar una solución, sin embargo, es necesario pasar por un curso de Teoría Cualitativa de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias para saber el comportamiento del método en EDP.

Interesados en la postura teórica de la TSME, y específicamente para que la presente investigación se vaya robusteciendo tomaremos la noción de *Preadiciere*, con ella trataremos de explicar si en algún momento permite ahondar en ella como la manera de *predecir* a través de sistemas evolutivos como es que el fenómeno físico queda *caracterizado* por el *MSV* a partir de su *solución.*

Cantoral (2013) menciona que la noción del *Preadiciere* como método de indagación, tiene tres niveles, y es posible verlo como *esquema*, como *modelo* y como *teoría*, esta triada estará en la base de la teoría, y opera al nivel de *tránsito* entre *conocimiento* y *saber*, por tanto, su localización y análisis es fundamental para la Socioepistemología, dichos niveles son estadios de desarrollo y sirven para clasificar el tipo de predicción que se lleva a cabo y las herramientas que se construyen y se emplean para esos fines.

Si vemos el *Preadiciere como esquema*, Cantoral (2013) lo detalla como la idea básica que consiste en que el *Preadiciere* se manifiesta en un inicio en tanto *noción* o *preconcepto,* vaga aún, en el pensamiento humano, que se relaciona a su vez con fenómenos del movimiento de los cuerpos en el espacio o de la mecánica de medios continuos; más tarde se traduce o se expresa en tablas numéricas como medios para anticipar mediante interpolación y extrapolación, así también se traduce en ecuaciones con variables continuas de naturaleza cuasi empírica. Lo anterior se produce en un contexto específico que evoluciona desde el momento en el que los *fenómenos de movimiento* eran interpretados cualitativa e intuitivamente, hasta la etapa en la que los fenómenos de movimiento fueron concebidos en el marco de esquemas que podemos llamar *aristotélicos*, es decir, interpretando al movimiento en la naturaleza, con explicaciones típicamente cualitativos posicionales. Se centraba la mirada en los atributos inherentes de los cuerpos y no en las medidas y comparaciones de las relaciones entre variables del movimiento.

Situándonos sobre la base de la primera significación que permite reconocer el todo sólo con mirar la parte, como una técnica de predicción, las ideas matemáticas van evolucionando hasta conformarse en el estudio del elemento puntual para el conocimiento del todo global, consolidándose así los elementos de una estructura matemática precisa que permanecerá como forma de mirar esta clase de fenómenos, es así que el *Preadiciere como modelo*, se conforma y robustece a través de la evolución histórica de las ideas con respecto al movimiento, de tal forma que éste centra su interés en la búsqueda de todas las relaciones-prácticas y utilitarias asociadas a él. (Cantoral, 2013, p. 112)

Finalmente si se considera al *Preadiciere como teoría*, Cantoral (2013) menciona que surge cuando este principio y su afirmación como modelo, se incorporan al modelo formal de las matemáticas para desarrollarse posteriormente mediante *principios*, *corolarios*, *axiomas*, *teoremas*, *procedimiento,* y detalla que solo aparece en la medida en que los resultados de los dos anteriores ámbitos encuentren un marco racional de organización, en él no se incluyen sólo nuevos resultados matemáticos sino, más bien, nuevas presentaciones de las viejas ideas. Se suele asociar con los momentos de formalización y, en consecuencia, se tornan en el sostén de los diversos paradigmas educativos.

Es así que entonces bajo esta postura veremos si existe un *momento* en el cual el *Preadiciere* funge como mediador para la caracterización del *MSV* en nuestra búsqueda de fenómenos físicos donde su uso impera para dar *solución*.

Reflexiones o discusión

El *análisis bibliográfico*, está permitiendo a la presente investigación brindar una mirada teórica para la *caracterización* del *MSV* brindando una dirección para poder determinar ¿qué es lo que permite hacer uso del método?, ¿a qué condiciones físicas los fenómenos están sujetas?, dado que el trabajo es totalmente teórico, se presenta una búsqueda de aquellos fenómenos que están en la Naturaleza y que incluso es posible pensar en que están regidos por leyes matemáticas que terminan modelando de forma no-lineal al problema y quizá el *MSV* tenga la suficiente potencialidad para poder dar o brindar una solución.

Conclusiones

La revisión bibliográfica está focalizada hasta el momento en atender dos grupos, el *primero* de ellos centrado en el objeto matemático que es de nuestro interés (*MSV*) como lo es en: artículos científicos, libros especializados y tesis en Matemática y Matemática Educativa donde está presente la matematización de problemas como el de la cuerda vibrante y la ecuación del calor, mientras que el *segundo* atañe a identificar la obra matemática original donde está presente el *MSV*, la cual permitirá coadyuvar a la génesis epistemológica del método.

Una de las *metodologías* que concierne a la Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa es la *historización* y *dialectización*, la cual permite concebir y confrontar ideas que forman parte de una racionalidad contextualizada propias de un pensamiento matemático que es asociado a una determinada época. El surgimiento del Cálculo en el Siglo XVIII hizo posible la matematización del problema de la cuerda vibrante, la cual condujo a convocar a matemáticos de la época para dar solución a dicho problema.

Las primeras soluciones asociadas al problema de la cuerda vibrante dieron como tal el inicio a erigir una de las ramas de la Matemática, las Ecuaciones Diferenciales Parciales, y aunque no es nuestro objeto de estudio, quién o quiénes fueron los personajes involucrados en ella, si nos atañe el conocer este marco de referencia para situar la génesis matemática del *MSV*, es decir, dados sus contextos temporales y espaciales, cuál es la epistemología que escudriña las ideas matemáticas del método.

Actualmente hay muchos esfuerzos inquisitivos en el campo de las ED, por ejemplo, su enseñanza y aprendizaje concierne a tener desafíos con la apropiación significados y usos de las ED; que, sobre el aprendizaje memorístico, impere la construcción de conocimiento matemático asociado a *prácticas sociales* y de *referencia.*

En cuanto al *MSV*, escolarmente se ve una centración en el objeto, es decir, su enseñanza y aprendizaje tiene dominio y privilegio por lo algebraico; es por eso, que el objetivo de la presente investigación es *caracterizar* al *MSV* por medio de *prácticas* que serán identificadas en el análisis de textos (obras matemáticas originales).

Pensar a futuro en estas prácticas que pudieran ser identificadas, permitirán bajo la postura teórica de la Socioepistemología dar pautas para un diseño escolar, donde evidentemente esto, traerá consigo en un rediseño del discurso Matemático Escolar de los marcos de referencia donde el *MSV* está presente para su enseñanza.

Referencias bibliográficas:

Cantoral, R. (2013). *Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa: Estudios sobre construcción social del conocimiento*. Barcelona: Gedisa.

Cruz-Amaya, M. (2019). *Linealidad y angularidad en la esfera. Un nuevo escenario de trabajo geométrico* (Tesis de maestría no publicada). Cinvestav-IPN, México.

Farfán, R. (2012) *Socioepistemología y ciencia: El caso del estado estacionario y su matematización.* Barcelona: Gedisa.

Fourier, J. (1822). *Thèorié analytique de la chaleur* (Reimpressions Editions Jacques Gabay (1988) ed.) París : Chez Firmin Didot, père et fils. Libraires pour les mathématiques, l'architecture hydraulique et la marine. Rue Jacop. No. 24.

López-Ortega, M. (2016). *Una perspectiva histórica de los métodos de Fourier.* Trabajo fin de grado de Matemáticas. Departamento de Análisis Matemático, Universidad de Granada.

Shingareva, I & Lizárraga-Celaya, C. (2010). Ecuaciones Diferenciales Parciales no lineales: Separación de Variables, soluciones simbólicas. *En Memorias de la XX Semana Nacional de Investigación y Docencia en Matemáticas*. 145-151

Stephan, M. & Rasmussen, C. (2002). Classroom mathematical practices in Differential Equations. *Diario de Comportamiento Matemático, 21*(2002), 459-490.

Taylor, B. (1715). *Methodus Incrementorum Directa et Inversa.* Londres: Impensis Gulielmi Innys.