

# ESTRATEGIAS DE LOS ESTUDIANTES EN LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS: ANÁLISIS A TRAVÉS DE LAS VARIEDADES DIDÁCTICAS DE LA FUNCIÓN LINEAL

## STUDENTS' STRATEGIES IN PROBLEM SOLVING: AN ANALYSIS THROUGH THE DIDACTIC VARIETIES OF LINEAR FUNCTION

Pamela Valencia Quezada, Álvaro Poblete Letelier  
Universidad de Los Lagos (Chile)  
pameval@live.cl, apoblete@ulagos.cl

### Resumen

El presente trabajo desarrolla un análisis a través de las Variedades Didácticas Matemáticas de las estrategias que utilizan los alumnos cuando resuelven problemas contextualizados sobre función lineal. Las variedades didácticas corresponden a las aproximaciones que reporta la historia de un objeto matemático definido, además se consideran los contextos y los registros de representación para definir cada problema. Al aplicar los problemas y analizarlos, se caracteriza la estrategia que utiliza el resolutor. Esta estrategia se define como los procesos y acciones que realizan los alumnos cuando resuelven un problema, siendo los procesos internos y las acciones observables a través de las producciones de los alumnos. El análisis de estas producciones categorizó dos tipos de estrategias, para problemas puramente matemáticos, y los de contexto real, además de caracterizar las estrategias con y sin la intervención del profesor (en este trabajo solo se analizará un problema de contexto real).

**Palabras clave:** variedades didácticas, estrategias, procesos y acciones

### Abstract

This work makes an analysis of students' strategies when solving contextualized problems on linear functions, by using Mathematics Didactic Varieties. The didactic varieties correspond to the approaches reported by history, of a defined mathematical object. Besides, the contexts and representation registers to define each problem are considered. When applying and analyzing the problems, it is possible to characterize the strategy used by the one who solves the problem. This strategy is defined as the processes and actions that students carry out when they solve a problem, being the internal processes and actions observable through students' productions. The analysis of these productions characterized two types of strategies: the ones for purely mathematics problems and those of the real context. Besides, it compares the strategies with and without teachers' intervention. In this work, only a problem of the real context will be analyzed.

**Key words:** didactic varieties, strategies, processes and actions

## ■ Introducción y antecedentes

La investigación en resolución de problemas, es una temática existente desde la creación de la matemática escolar, sin embargo es Pólya (1945) quien propone por primera vez un “método” para resolver un problema, el que consiste en cuatro pasos, pero no propuso una definición de situación problema hasta la publicación de su libro “Mathematical Discovery” en 1981. Más tarde Schoenfeld (1985) postuló que se necesitaba algo más para convertirse en un buen resolutor de problemas, así en su libro “Mathematical Problem Solving” (Schoenfeld, 1985), sostiene que, además de lo cognitivo existen otras características necesarias para la resolución de un problema, agrega las creencias, y las define como la actitud, lo afectivo y lo socio-cultural, lo que él llamo lo metacognitivo, y según este autor influyen directamente en el actuar del resolutor.

Sin embargo el tiempo ha ido transcurriendo y otros autores como Beyer (2000), Ronh, Mayer citados en la investigación sobre los avances en resolución de problemas desde los años 1980 (Pérez & Ramírez, 2011), siguen buscando una definición para situación problema, y han señalado que consiste en: un desafío para el estudiante, que dedique tiempo, cree estrategias de resolución, entre muchos otros.

En esta investigación se utilizará la palabra “Problema” como: Planteamiento de una situación cuya respuesta implique un desafío para el estudiante, y que sea necesario crear una estrategia para obtener una o varias soluciones. Esta definición se obtiene luego de una revisión teórica que se evidencia en el marco teórico.

Al referirse al concepto de función (en este trabajo se abordará específicamente la función lineal), además de considerar su historia y epistemología, hay que estudiar sus representaciones y los conflictos que éstas producen en el estudiante, no sólo de secundaria. Al parecer, la articulación de las representaciones es un problema que comienza a ser reportado desde la representación misma de los sujetos que interactúan con la representación (Duval, 2004a). Sin embargo, la dificultad en la enseñanza y en el aprendizaje de las distintas representaciones, considerando además los tratamientos que se pueden realizar en ellas, implica otra complejidad para que un educador considere estas cuestiones cuando planifica una clase.

La evolución histórica es necesaria, pues el marco teórico que se utilizó en esta investigación, corresponde a lo referido a las Variedades Didácticas Matemáticas, que utilizan dominios de conocimientos, limitados por los marcos de referencia históricos en la construcción de las situaciones problemas que debieron resolver los alumnos sobre función lineal. Además de la historia del conocimiento matemático utilizado, se necesita definir las representaciones del concepto. Con respecto a las representaciones, Janvier en 1987 (Font, 2011) considera que las representaciones asociadas al concepto de función se pueden clasificar en cuatro clases: 1) Expresión Verbal, 2) Expresión simbólica, 3) Tabla de Valores y 4) Gráfica.

Los cambios de representación facilitan o dificultan la tarea en el estudiante, por lo tanto, se considera que las conversiones y tratamientos entre ellas son fundamentales para su enseñanza y aprendizaje (Duval, 2004a).

Luis Rico (2009), hace un análisis de la noción de “representación”, mostrando la dualidad de este concepto, y como se ha usado en la educación matemática, en este trabajo de investigación, se utilizará desde el punto de vista de Duval (2004b), como representación dentro de un sistema semiótico, y cada una de ellas como registro de representación semiótica. También se define tratamiento y conversión dentro de un registro de representación semiótica y entre registros como:

Un tratamiento es una transformación que se efectúa en el interior de un mismo registro, aquel en que son utilizadas las reglas de funcionamiento: un tratamiento, pues, no moviliza más que un solo registro de representación. La conversión es, al contrario, una transformación que hace pasar de un registro a otro; requiere pues su coordinación por parte del sujeto que la efectúa. (Duval, 2004, p. 31-32)

Al existir cuatro registros para las funciones, esto también supone una serie de conflictos cognitivos (Font, 2011) reportados en la literatura, que describen problemas con la conversión (Duval, 2006) y con el tratamiento. Considerando los problemas de conversión, las investigaciones consultadas muestran dos tipos: las de conversiones múltiples, y las que se abordan desde un registro específico hacia otro, aunque como lo muestra la literatura, por lo general se utiliza más de un registro. Sin embargo, y a modo de previa conclusión, el más utilizado es el algebraico, y es precisamente porque se enseña privilegiándolo.

A modo de sumario, algunas de las investigaciones que involucran registros múltiples son Lesh, Post, & Behr (1987); Bal (2015); Valencia, Ojeda, Jiménez, & Cisternas (2016), mientras que literatura referida a la conversión de un registro a otro corresponden a: Guzmán (1998); Duval (2006); Flores, Chi Chablé, Canul Pech, Cantú Interián, & Pastor Solache (2009); Rojas (2012); Morales Martínez (2013); Bal (2015); Rahmawati, Purwanto, Subanji, Hidayanto, & Anwar (2017). Todas las investigaciones mencionadas, abordan cómo los estudiantes convierten desde un registro a otro y las dificultades para reconocer el objeto matemático, desde algunas de ellas. Independiente de la edad del alumno, las dificultades persisten, primero en el tema de funciones y luego se traspasa hacia el estudio de los límites (Font, 2011), también existen dificultades en el tratamiento dentro de un mismo registro (Duval, 2006; Valencia, Ojeda, Jiménez, & Cisternas, 2016).

Sobre los contextos, investigaciones de los últimos años, han empezado a cuestionarlos. Primero se plantea que la matemática debe contextualizarse para ser aprendida, pero el problema ahora es el exceso de contextualización, o contextualizar por contextualizar, sin embargo hay que definir entonces que es un contexto. Es así que para Poblete, Guzmán y Méndez (1996) el contexto “tiene relación con el ámbito que da contenido a la situación problema planteado”, para Ramos y Font (2006) los contextos pueden ser intra y extramatemáticos, estos autores realizan un barrido por la literatura acerca de los “contextos”, y finalmente, desde una aproximación ontosemiótica existen dos usos, el primero lo utiliza como un ejemplo particular de un objeto matemático y el otro lo enmarca en el entorno. Por otra parte, Beswick (2011), señala que, es importante considerar que no solo porque una tarea matemática sea contextualizada, el alumno la resolverá sin ningún problema.

En esta investigación se utilizará el contexto desde el punto de vista de las Variedades Didácticas Matemáticas, es decir, con el ámbito que da contenido a la situación problema planteado.

Cuando un resolutor se enfrenta a un problema, necesariamente utilizará una “estrategia” para resolverlo, pero “estrategia” en Educación Matemática, tiene variados significados dependiendo del autor consultado. Para Pólya (1945) las estrategias o heurísticas estaban compuestas por cuatro pasos: comprender el problema, trazar un plan, ejecutarlo y finalmente revisar la coherencia del resultado con lo solicitado en el problema. Para Schoenfeld (Mathematical problem solving, 1985), las heurísticas de Pólya (1945) no fueron suficientes, y para este autor era necesario algo más, entonces él agrega los recursos, el control y los sistemas de creencias a las heurísticas, pero el problema persiste, qué son entonces las estrategias.

Por su parte, Poggioli (1999) caracteriza las distintas estrategias existentes en el ámbito de la resolución de un problema matemático como:

Operaciones mentales utilizadas por los estudiantes para pensar sobre la representación de las metas y los datos, con el fin de transformarlos en metas y obtener una solución. Además, las estrategias incluyen los métodos heurísticos, los algoritmos y los procesos de pensamiento divergente. (Poggioli, 1999, p. 26)

Además, esta investigadora realiza un análisis por los diferentes autores que han propuesto diversas estrategias, según el campo de estudio en matemática, sin embargo, la pregunta persiste: ¿existirá una estrategia para conocer las acciones que realiza un resolutor cuando se enfrenta a un problema, y el porqué de sus decisiones? En todas las investigaciones consultadas (Arteaga Palomares & Guzmán Hernández, 2005, Poggioli, 1999, Pérez & Ramírez,

2011), se identifica lo que se puede observar en las acciones del resolutor, pero no aparecen las razones de tales decisiones. Algunos autores lo atribuyen a que el sujeto lo hace de forma inconsciente, o que ejecuta sin reflexionar sobre su actuar, y por lo tanto desconoce si la estrategia elegida lo llevará finalmente a resolver el problema.

Considerando todas las investigaciones mencionadas, ninguna responde a qué estrategia utiliza el resolutor cuando se enfrenta a un problema, y más aún, ninguna identifica, la relevancia del profesor, para que el resolutor responda a la pregunta del problema, por lo tanto, investigar cómo y por qué el estudiante utiliza ciertos argumentos matemáticos, e interconecta conocimientos, permitiría intervenir no sólo a nivel cognitivo, sino también a nivel del currículo en matemática, y se evidencia en las producciones de los estudiantes.

### ■ Marco teórico

El término Variedad Didáctica Matemática (VDM) se define como “una situación de aprendizaje asociada a la matemática, construida como variables didácticas las situaciones problema, los contextos y registros de expresión”. Como indican los autores (Poblete, Guzmán, & Méndez, 1996), las variedades aproximan un modelo a través de la proposición de diferentes problemas.

Redefiniendo Variedad Didáctica Matemática, como la aproximación a un conocimiento matemático utilizando la historia y epistemología de los objetos matemáticos, para la propuesta de las situaciones problemas, que además utilizarán distintos contextos y registros de expresión, lo cual genera un banco de problemas a partir de cada variedad.

Las Variedades Didácticas Matemáticas a utilizar según el objeto matemático función, basadas en las Variedades encontradas en la tesis de Parra (2015) son: 1) La función como correspondencia, 2) La función como relación entre magnitudes, 3) La función como representación gráfica, 4) La función como expresión analítica, 5) La función como representación arbitraria y 6) La función a partir de la Teoría de Conjuntos.

Las variables didácticas para considerar son las situaciones problema, los registros de expresión y los contextos.

Los registros de expresión, desde una perspectiva semiótica, están constituidos por signos que se asocian para formar sistemas de signos más complejos de manera interna y externa, la primera según lazos de contextos y pertenencia de la misma red semántica, la segunda las reglas de combinación de signos en expresiones o situaciones.

Estos registros llevarán precisamente a la formación de una representación de un objeto matemático, los que pueden ser gráficos, algebraicos, simbólicos, de tabulaciones, lenguaje (verbal, escrito) (Poblete, Guzmán, & Méndez, 1996).

Los registros corresponderán a la función lineal: 1) Registro gráfico, 2) Registro Algebraico, 3) Registro de tabulaciones y 4) Registro de lenguaje natural.

En esta investigación los registros corresponderán a la función lineal y se complementarán con la Teoría de Representaciones de Duval.

Un sistema semiótico comporta reglas, más o menos explícitas que permiten combinar los signos entre sí de tal manera que la asociación formada tenga también sentido.

Así, los sistemas semióticos, han de permitir que se cumplan las tres actividades cognitivas inherentes a toda representación. Primero, constituir una marca o conjunto de marcas perceptibles que sean identificables como una representación de alguna cosa en un sistema determinado. Segundo, transformar las representaciones de acuerdo

con las únicas reglas propias al sistema, de modo que se obtengan otras representaciones que puedan constituir una ganancia de conocimiento en comparación con las representaciones iniciales. Tercero, convertir las representaciones producidas en un sistema de representaciones en otro sistema, de manera tal que éstas últimas permita explicitar otras significaciones relativas a aquello que es representado.

Duval (2004a) establece una clara diferencia entre las actividades de tratamiento y las de conversión. Un tratamiento es una transformación que se efectúa en el interior del mismo registro, aquel en que son utilizadas las reglas de funcionamiento, un tratamiento, pues, no moviliza más que un solo registro de representación. La conversión, al contrario, es una transformación que hace pasar de un registro a otro; requiere pues su coordinación por parte del sujeto que la efectúa. La característica de la conversión es conservar la referencia al mismo objeto (Duval, 2004a).

La conversión de las representaciones y el cambio de registro deben respetar en el primero, el sentido y referencia de los símbolos o de los signos, o entre el contenido de una representación y lo que ésta representa. Y en el segundo, esperar que haya reglas explicitadas para que se realice el cambio de registro.

“Los contextos tienen relación con un ámbito de contenido a la situación problema planteada. Estos hacen referencia al campo de conocimiento o de aplicación de la situación propuesta desde la perspectiva de la representación” (Poblete, Guzmán, & Méndez, 1996).

Contextualizar el conocimiento es más que llevarlo al aula, es plantear la situación problema que identifique al estudiante con ella, que pertenezca a su entorno, para que se pueda apropiarse del conocimiento.

En el artículo de Poblete & Díaz (1998), se señalan los tipos de problemas y sus características, estos permiten una clasificación según su naturaleza, en rutinarios y no rutinarios, y los problemas rutinarios a su vez se clasificarán en contexto real, realista, fantasista y puramente matemático.

Cuando un estudiante resuelve un problema en matemáticas, utilizará todo el bagaje adquirido hasta ese momento en cuanto a métodos y técnicas para resolver el problema. Bruner citado en el artículo de Rizo y Campistrous (1999) considera que el término estrategia hace referencia a un patrón de decisiones en la adquisición, retención y utilización de la información que sirve para lograr ciertos objetivos, es decir, para asegurarse que se den ciertos resultados y no se produzcan otros.

Poggioli (1999), señala que las estrategias para resolver un problema se refieren a las operaciones mentales utilizadas por los estudiantes para pensar sobre la representación de las metas y los datos, con el fin de transformarlos y obtener una solución (p.26).

De las definiciones expuestas con anterioridad, en esta investigación se utilizará “estrategia” como los procesos y las acciones que realiza un resolutor para alcanzar un resultado final, siendo los procesos internos y las acciones externas.

Las acciones serán externas, pues se observa el quehacer del resolutor en lo que transcribe para resolver un problema. Estas pueden ser conversiones desde un registro a otro o tratamientos en el mismo registro, las que son medibles y cuantificables.

Por otra parte, los procesos son internos, son los pensamientos que anteceden a la acción y no es posible observarlos a menos que el resolutor los verbalice o los relate durante el proceso de resolución de un problema. Son estos procesos los que se deberán intervenir para que el resolutor alcance una meta, puesto que, si solo nos limitamos a observar las acciones, no alcanzaremos a identificar la estrategia utilizada por el resolutor.

Cada estrategia dependerá del problema en particular y del sujeto que lo resuelva, pero se derivarán estrategias generales y particulares. Las estrategias generales serán las que observarían en cualquier problema, pero las particulares dependerán del objeto matemático en el cual esté centrado el problema.

## ■ Metodología

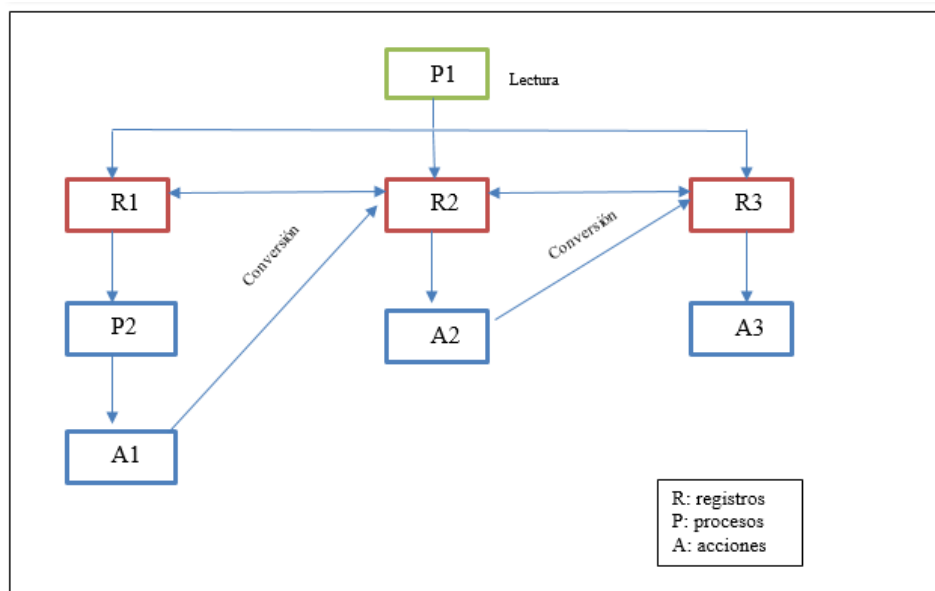
El enfoque de la investigación se enmarca en el paradigma cualitativo, con enfoque interpretativo, y estudio de casos múltiples, donde cada situación problema será un caso.

Los problemas fueron creados por la investigadora, y se realizó una aplicación piloto para evaluar la pertinencia de los problemas a estudiantes de Pedagogía en Matemática, de lo cual se deprendieron ocho problemas preliminares. Luego se realizó la primera aplicación a estudiantes de entre 16 y 17 años, para realizar un análisis preliminar de las estrategias obtenidas, sin intervención del profesor. Se aplican estos problemas a dos grupos de tres alumnos cada uno.

### *Análisis preliminar del problema del profesor*

El profesor de matemática evalúa las pruebas con una exigencia del 50% comenzando desde el 1,0 al tener cero puntos, es decir, que para obtener un 4,0 se necesita obtener la mitad del puntaje. Si tres estudiantes rindieron una prueba de 54 puntos en total, y cada uno obtuvo 37, 48, 25 puntos respectivamente, ¿cuáles son sus notas? Modela la ecuación y la gráfica de dicha ecuación.

La variedad didáctica en este problema es la función como correspondencia, en este caso puntaje y nota, el orden de las variables no altera el resultado, pues existe una correspondencia lineal ya sea del puntaje a la nota, o viceversa. La estrategia encontrada se muestra en la Figura 1, donde se observa que los alumnos transitan por tres registros de representación, se deducen dos procesos y tres acciones que se desprenden de las producciones de los estudiantes. Este grupo de alumnos transitó por las representaciones, pero no alcanzó a dar respuesta al problema.



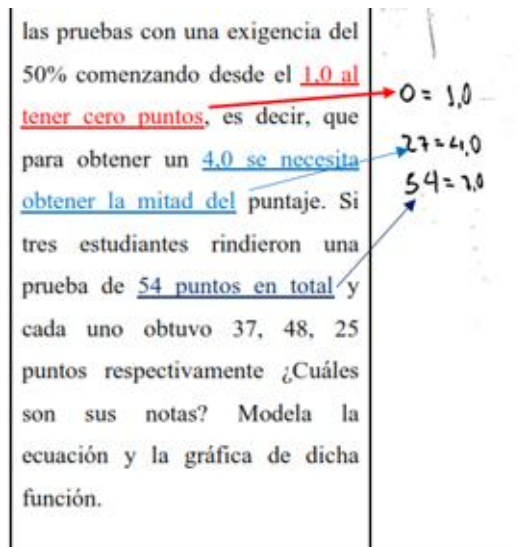
**Figura 1.** Caracterización preliminar de la estrategia utilizada por los alumnos.  
Fuente: Elaboración propia.

Proceso 1: Lectura del problema, los alumnos leen el problema, solo para constatar de qué trata el mismo.

Proceso 2: Relectura del mismo, que llevará a la primera acción observada.

Acción 1: Identifica y subraya los datos que le parecen relevante del problema, en este caso, los puntajes y las notas correspondientes a los mismos.

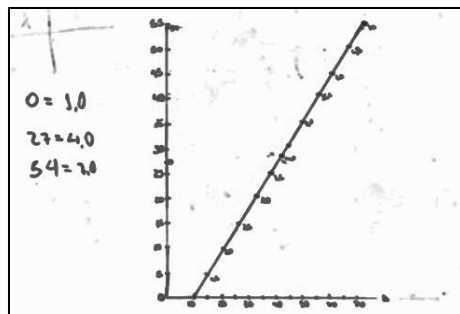
Acción 2: Primera conversión hacia otro registro, en este problema el registro de partida era verbal y el resolutor elige un “registro tabular”, y genera pares ordenados, en este caso las tres duplas que encuentra en el problema ya sea de forma explícita o implícita en él, como se observa en la Figura 2.



**Figura 2.** Asocia los valores obtenidos de los datos del problema con una “tabla”.  
Fuente: Producciones de los alumnos.

Acción 3: Segunda conversión a otro registro, en este caso a un registro gráfico, como se observa en la Figura 3, los alumnos trazan el primer cuadrante del plano cartesiano, considerando al eje de las abscisas como la nota y el eje de las ordenadas al puntaje.

Este grupo de alumnos consideró que la nota era la variable independiente y el puntaje la variable dependiente, la pregunta surge cuando los alumnos realizan una “tabla de valores”, como se evidencia en la Figura con un orden distinto al que utilizan en la gráfica, donde asocian al puntaje la nota, por lo tanto, la variable independiente debió corresponder al puntaje y la dependiente a la nota.



**Figura 3:** Conversión desde el registro tabular hacia el registro gráfico.  
Fuente: Producciones de los alumnos.

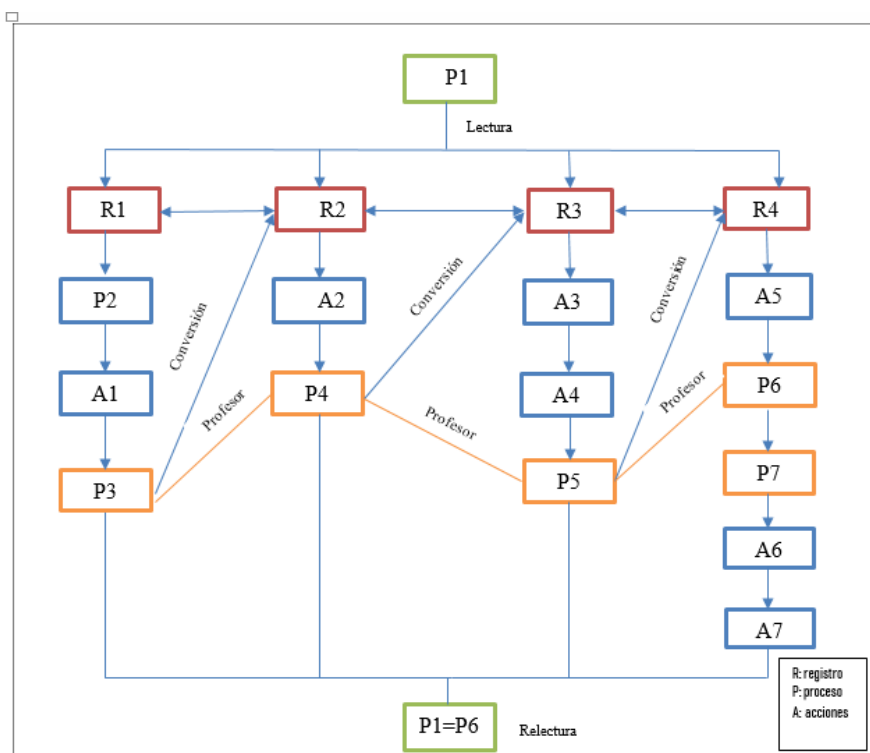
### ■ Resultados de la investigación

Se analizará el problema del profesor que en esta segunda aplicación contó con la ayuda de la profesora.

Los dos cuadros verdes en el esquema, Figura 4, muestran que para que el alumno resuelva el problema, deberá volver a leerlo, y considerar la pertinencia de la solución encontrada, es en ese instante que se cierra el ciclo del problema. Los cuadros rojos, representan los registros utilizados por los alumnos, los cuadros azules, representan las acciones observadas en las producciones de los alumnos, los cuadros amarillos, los procesos donde interviene el profesor. Las flechas dobles, implican que el alumno puede decidir cómo transitar entre los diferentes registros, las flechas azules en un solo sentido, indican el recorrido que siguió el alumno, y las flechas amarillas, las intervenciones del profesor. Analizando los recuadros y flechas amarillas, se deduce que el estudiante no hubiera resuelto el problema sin la intervención del profesor.

Finalmente en el problema del profesor se encuentran siete procesos y siete acciones, incluida la respuesta verbal solicitada, como se observa en el esquema de análisis la intervención del profesor como mediador entre los conocimientos aislados del alumno y la utilización de los distintos registros es fundamental, pues como se verifica en la metodología con el análisis preliminar, los alumnos siempre quedaban detenidos entre las conversiones, sin encontrar el conocimiento engranaje para la siguiente conversión.

En la primera aplicación del problema del profesor de matemática, se dedujeron dos procesos y tres acciones, por lo tanto, se observa que la intervención de la profesora fue fundamental para dar respuesta al problema planteado.



**Figura 4:** Caracterización del problema del profesor, considerando sus registros de expresión, procesos y acciones.

Fuente: Elaboración propia.



Este esquema muestra el recorrido que siguió el estudiante para resolver la situación problema planteada, desde la primera lectura en P1, y la segunda lectura en P2, luego una acción A1 en la representación R1, en este caso una representación verbal, luego interviene el profesor P3, para encontrar los pares ordenados, luego al realizar una tabla, se cambia de representación R2, este cambio de representación genera una nueva acción A2, luego para encontrar el modelo interviene el profesor P4, luego utiliza esos puntos para reemplazar en la fórmula de la ecuación de la recta A3, después realiza tratamientos para obtener el modelo requerido A4, posteriormente el profesor interviene para guiarlos al siguiente registro, el gráfico, en P5, luego los estudiantes realizan el gráfico A5, el profesor realiza preguntas con respecto al gráfico obtenido y su pertinencia en el problema P6, en P7 se realiza una nueva lectura del problema para revisar cuál era la pregunta que debían contestar, y los estudiantes reemplazan en su fórmula para encontrar las notas solicitadas A6, finalmente escriben la respuesta del problema en A7. P6=P7, se encuentran la primera lectura con la última lectura, lo que cierra la evaluación de los datos obtenidos para estimar la pertinencia de la solución encontrada.

### ■ Conclusiones e implicaciones del trabajo

En el título de esta tesis de magíster se pretendía indagar qué estrategias utiliza el estudiante cuando resuelve una situación problema desde alguna variedad didáctica, y si estas tienen relación o injerencia en la estrategia utilizada. El problema que surgió es qué es una estrategia y cómo se define a partir de la resolución de un problema. Esta pregunta necesitó de una revisión teórica de la noción de estrategia, pero solo estaba definida a partir de lo observable, teniendo varias acepciones al respecto de lo que sucedía en los pensamientos del estudiante, finalmente se propone una definición propia que divide la estrategia en dos nociones, a lo observable se le llama acción y a lo no observable proceso, desde estas definiciones se analiza cada problema aplicado.

Primero, en la metodología se describe la estrategia utilizada sin la intervención del profesor y en el análisis con su intervención y se observa si cambia la estrategia. Al comparar la resolución de los problemas sin ayuda del profesor como se observa en la Figura 1 y con la ayuda del profesor Figura 4, la estrategia está compuesta por más acciones que procesos, y los problemas verbales independiente de la variedad didáctica no fueron concluidos (en la tesis se analizan cuatro problemas, y en este trabajo solo se está mostrando un problema), en contraposición a la resolución de los mismos problemas con la intervención del profesor se observan 7 acciones y 7 procesos, además que se da una solución a la pregunta del problema.

Existen diferencias en las estrategias dependiendo de la variedad didáctica utilizada y del registro de partida, en el caso del problema del profesor, a pesar de toda la dificultad, a los alumnos se les hizo fácil obtener los datos, pero se les dificultó encontrar la relación entre las variables.

También se define la participación del profesor con dos roles distintos, uno como facilitador, cuando el alumno sabe la respuesta pero esta inseguro, y el profesor solo debe confirmar lo afirmado, es decir, el alumno sabe la respuesta pero necesita el refuerzo del profesor, este rol puede considerarse pasivo, en cambio en el otro rol el profesor es el protagonista y actúa como mediador entre el conocimiento aislado del alumno y cómo este conocimiento debe interactuar con la resolución del problema.

En cuanto al registro, el menos asociado al concepto de función lineal es la ecuación de la recta, para los estudiantes este concepto, que finalmente genera los modelos, está totalmente separado de la función, y por lo tanto, para los alumnos, generar modelos presenta una gran dificultad, y se observa fácilmente en los análisis de la metodología, que en ningún problema que necesite generar modelos los alumnos aplican la ecuación de la recta, por lo tanto en este ámbito en particular y con estos alumnos, la ecuación de la recta está disociada de la función, así que los profesores deben reforzar este conocimiento.

Se generan dos modelos de estrategia, separados solo por el contexto del problema, pues este determinará las conversiones y por lo tanto la cantidad de acciones y procesos necesarios para resolver el problema.

Como reflexiones finales, es importante conocer dónde los alumnos quedan estancados cuando resuelven problemas, pues con esta información el profesor podrá intervenir durante las clases y así proveer los engranajes necesarios para alcanzar a dar solución a los problemas planteados.

En cuanto a las variedades didácticas, el problema que se analizó para este trabajo, el del profesor, correspondía a la variedad la función como correspondencia, y presentó varias dificultades, pues los estudiantes conocen solo a las funciones como relaciones entre cantidades variables, y esto implica que otra variedad se les dificulta, por lo tanto, este trabajo muestra que es necesario utilizar otras variedades didácticas para expandir las estrategias de los alumnos.

Al revisar los registros de representación, para los estudiantes que realizaron estos problemas, los registros más conocidos y transparentes para ellos, son el tabular y gráfico, en ese orden, desde el gráfico al tabular se estudiará en otros trabajos.

Los contextos también incidieron en los logros alcanzados por los estudiantes, pues los contextos puramente matemáticos son conocidos por los estudiantes, a diferencia de los problemas como el del profesor, que son claramente más complejos para ellos, pero sin embargo son motivadores dado que el contexto está relacionado directamente con ellos.

## ■ Referencias bibliográficas

- Arteaga Palomares, J., & Guzmán Hernández, J. (2005). Estrategias utilizadas por alumnos de quinto grado para resolver problemas verbales de matemáticas. *Educación Matemática*, 17, 5 - 31.
- Bal, A. P. (2015). Skills of Using an Transform Multiple Representation of the Prospective Teachers. *Journal of Mathematical Behavior*, 197(Hal), 582 - 588.
- Beswick, K. (2011). Putting context in context: an examination of the evidence for the benefits of "contextualised" tasks. *International Journal of Science and Mathematic Education*(9), 367 - 390.
- Duval, R. (2004b). *Los Problemas Fundamentales en el Aprendizaje de las Matemáticas y las Formas Superiores del Desarrollo Cognitivo*. (I. d. Pedagogía, Ed.) Santiago de Cali, Colombia: Universidad del Valle.
- Duval, R. (2004a). *Semiosis y Pensamiento Humano. Registros semióticos y aprendizajes intelectuales*. (M. Vega, Trad.) Santiago de Cali, Colombia: Editorial Universidad del Valle.
- Duval, R. (2006). Un tema crucial en la educación matemática: La habilidad para cambiar el registro de representación. *La Gaceta de La RSME*, 1(9), 143 - 168.
- Flores, C. D., Chi Chablé, A. G., Canul Pech, E. R., Cantú Interián, C. A., & Pastor Solache, C. G. (2009). De las descripciones verbales a las representaciones graficas. El caso de la rapidez de la variación en la enseñanza de la matemática. *Revista Iberoamericana de Educación Matemática*(18), 41 - 57.
- Font, V. (2011). Funciones. (E. J. Goñi, Ed.) *Matemáticas. Complementos de formación disciplinar*, 145 - 186.
- Guzmán R, I. (1998). Registros de representación, el aprendizaje de nociones relativas a funciones: voces de estudiantes. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 1(1), 5 - 21.
- Lesh, R., Post, T., & Behr, M. (1987). Representations and Translations among Representations in Mathematics Learning an Problem Solving. En *Problems of Representations in the Teaching an Learning of Mathematics* (págs. 33 - 40). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum: In C. Janvier.
- Morales Martínez, Z. E. (2013). Análisis de las transformaciones semióticas en el aprendizaje de la función logarítmica. *VII CIBEM*, (págs. 1037 - 1044). Montevideo.
- Parra, Y. (2015). Significados pretendidos por el currículo de matemáticas chileno sobre la noción de función. Osorno, Chile.

- Pérez, Y., & Ramírez, R. (2011). Estrategias de enseñanza de la resolución de problemas matemáticos. Fundamentos teóricos y metodológicos. *Revista de Investigación*, 35(73), 169 - 193.
- Poblete, A., & Díaz, M. (1998). Resolver tipos de problemas matemáticos ¿una habilidad inhabilitante? *Epsilon: Revista de la Sociedad Andaluza de Educación Matemática "Thales"*(N°42), pág. 409-424.
- Poblete, A., Guzmán, I., & Méndez, C. (Junio de 1996). Variedades Didácticas Matemáticas. *Zeteiké, Campinas*, 4(5), 89 - 98.
- Poggioli, L. (1999). *Estrategias de resolución de problemas. Serie enseñando a aprender*. Caracas: Fundación Polar.
- Pólya, G. (1945). *How to solve it (Traducción al española, Cómo plantear y resolver problemas, Trillas, México, 1976)*.
- Rahmawati, D., Purwanto, Subanji, Hidayanto, E., & Anwar, R. B. (2017). Process of Mathematical Representation Traslation from Verbal into Grafic. *IEJME - Mathematics Education*, 12(4), 377 - 381.
- Ramos, A. B., & Font, V. (2006). Contesto e contestualizzazione nell'insegnamento e nell'apprendimento della matematica. Una prostettiva ontosemiotica. *La Matematica e la sua didattica*(4), 535 - 556.
- Rico, L. (2009). Sobre las nociones de representación y comprensión en la investigación en educación matemática. *PNA*, 4(1), 1 - 14.
- Rizo Cabrera, C., & Campistrous Pérez, L. (1999). Estrategias de resolución de problemas en la escuela. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 2(2 - 3), 31 - 45.
- Rojas, P. (2012). Sistema de representación y aprendizaje de las matemáticas. *Revista digital matemática, Educación e internet*, 12(1).
- Schoenfeld, A. (1985). *Mathematical problem solving*. Orlando: Academic Press, INC.
- Valencia, P., Ojeda, L., Jiménez, A., & Cisternas, A. (2016). Diseño de problemas en contexto y diferentes representaciones. *XX Jornadas Nacionales de Educación Matemática*, 20, págs. 436 - 438. Valparaíso.