

TEST DE REFLEXIÓN COGNITIVA Y TEST DE RAZONAMIENTO LÓGICO COMO POSIBLES PREDICTORES DEL DESEMPEÑO DE LOS ESTUDIANTES EN RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS CON TRAMPA LINEAL

COGNITIVE REFLECTION TEST AND TEST OF LOGICAL THINKING AS POSSIBLE PREDICTORS OF STUDENTS' ACHIEVEMENT IN PROBLEM SOLVING WITH LINEAR TRAP

Edgar Sánchez Campos, Josip Slisko Ignjatov
Benemérita Universidad Autónoma de Puebla (México).
chazo84@hotmail.com, josiplisko47@gmail.com

Resumen

Algunas investigaciones demuestran que existe relación entre test estandarizados y resolución de problemas matemáticos. En esta investigación se utilizan el Test de Razonamiento Lógico (TRL) y el Test de Reflexión Cognitiva (TRC) para clasificar el tipo de pensamiento de los estudiantes con el objetivo de poder relacionarlo con su desempeño en resolución de problemas matemáticos con “trampa lineal” (“ilusión de la linealidad”). Varios estudios indican que existe el excesivo uso de métodos lineales en el razonamiento y estrategias de solución de los estudiantes. Este estudio presenta la evidencia inicial que los estudiantes con un pensamiento formal y un pensamiento reflexivo medianamente desarrollado usan con menor probabilidad el método lineal.

Palabras clave: pensamiento reflexivo, pensamiento formal, ilusión de la linealidad

Abstract

Some research shows that there is a relationship between standardized tests and mathematical problem solving. In this investigation, the Test of Logical Thinking and the Cognitive Reflection Test are used to classify the students' type of thinking with the aim to relate it to their performance in solving mathematical problems with a “linear trap” (“illusion of linearity”). Some studies indicate that there is an excessive use of linear methods in students' reasoning and solving strategies. This study presents preliminary evidence that students with a moderately developed formal-and-reflective thinking use the linear method with minor probability.

Key words: reflective thinking, formal thinking, illusion of linearity

■ Introducción

El pensamiento formal es una condición necesaria para acceder al conocimiento científico y matemático. Sin embargo, las investigaciones demuestran que los jóvenes escolarizados no manejan esquemas de operaciones formales (Aguilar, Navarro, López y Alcalde, 2002). Eso explica, por lo menos parcialmente, la incapacidad de muchos de los estudiantes para resolver problemas que exigen un nivel de abstracción y razonamiento típico del pensamiento formal. Los resultados alcanzados por las investigaciones anteriores permiten deducir que los estudiantes no cuentan con las habilidades cognitivas necesarias para resolver las situaciones problemáticas planteadas, puesto que manifiestan deficiencias al procesar información de una manera sistemática. Ello implicaría los bajos resultados obtenidos por los estudiantes al desarrollar pruebas de conocimiento a nivel nacional e internacional, lo que supone, por tanto, un desempeño deficiente a nivel académico, especialmente el área de matemáticas.

Es por esta razón que en esta investigación se realiza un análisis del desempeño de estudiantes en la resolución de problemas matemáticas con “trampa lineal” en combinación con dos pruebas: Test del Razonamiento Lógico (TRL) (Tobin & Capie, 1981; Acevedo y Martínez, 1995) y Test de la Reflexión Cognitiva (TRC) (Frederick, 2005). El objetivo es averiguar si existe una relación entre los resultados de ambas pruebas (TRC y TRL) y el desempeño en resolución de problemas matemáticos con “trampa lineal”.

Por lo que se plantearon las siguientes preguntas de investigación:

- ¿Qué tipo de estrategias utilizan los estudiantes de primer grado bachiller al tratar de resolver problemas matemáticos con “trampa lineal”?
- ¿Qué tipo de estudiantes de acuerdo a sus estadios de pensamiento son los que presentan mayor tendencia a caer en problemas matemáticos con “trampa lineal”?

■ Constructos teóricos

En la presente sección se mencionan constructos que son importantes en la investigación, tales como pensamiento formal, pensamiento concreto, pensamiento rápido, pensamiento lento y proporcionalidad o linealidad.

El pensamiento reflexivo como parte de procesos duales (pensamiento lento y rápido)

El concepto de procesamiento dual se refiere a la coexistencia de dos modos de procesar la información que Kahneman (2002) resumió en la Figura 1.

	PERCEPCIÓN	INTUICIÓN (Sistema 1)	Razonamiento (Sistema 2)
PROCESOS	Rápidos Paralelos Automáticos Sin esfuerzo Asociativos De aprendizaje lento		Lentos Seriales Controlados Esforzados Bajo reglas Flexibles
CONTENIDOS	Perceptos Estimulación actual Limitados por el estímulo		Representantes conceptuales Pasadas, presentes, y futuras Pueden ser evocados por el lenguaje

Figura 1: Diferencias de los dos sistemas (tomado de Kahneman, 2002, p. 451).

A los procesos del Sistema 1 se les ha considerado preconscientes, implícitos, automáticos, de bajo esfuerzo, rápidos, de alta capacidad, en formato de default, holísticos, perceptuales y a los procesos del Sistema 2, conscientes,

explícitos, controlados, de alto esfuerzo, lentos, de baja capacidad, inhibitorios, analíticos, y reflexivos. Parece adecuado concebir al Sistema 2 como una forma de pensamiento bajo control de nivel intencional, apoyado por los procesos subconscientes del Sistema 1 que proporcionan perceptos, memorias, etc. También parece que la vía más promisoriosa es la de operacionalizar el concepto de conciencia, considerando que el pensamiento del Sistema 2 requiere acceso a un sistema central de memoria de trabajo de capacidad limitada, cosa que no ocurre con el Sistema 1.

Pensamiento formal y concreto

El pensamiento formal y el pensamiento concreto son estadios de pensamiento lógico-matemático que tienen ciertas características (Inhelder y Piaget, 1955).

En el pensamiento concreto el individuo realiza operaciones relativas a un objeto, o a situaciones tangibles y observables, mientras que en el pensamiento formal el individuo razona en abstracto, elabora conjeturas y realiza consideraciones fuera del objeto.

Los esquemas operatorios y tales razonamientos representan en el pensamiento formal un avance con relación al pensamiento concreto.

Linealidad

De book, Van Dooren, Janssens, y Verschaffel (2007) señalan que los términos “lineal” y “proporcionalidad (directa)” (así como sus derivados) los debemos utilizar como sinónimos y, también, para referirnos a las funciones de la forma $f(x) = ax$ ($a \neq 0$). La representación gráfica de este tipo de función es: una línea recta que pasa por el origen. Sin embargo, existen otras propiedades y representaciones de las funciones lineales que son conocidas y utilizadas con frecuencia. Cada una de estas propiedades y representaciones pueden ser aplicadas por los estudiantes en situaciones en las que no son aplicables. Esta tendencia se llama “*la ilusión de la linealidad*” o, simplemente, “*trampa lineal*”. Tales propiedades son las siguientes:

- cuando el factor de proporcionalidad es un número entero (relativamente pequeño), los estudiantes tienden a centrarse en esta propiedad (aditiva) por ejemplo: para cubrir 21 m^2 ($3 \text{ m}^2 + 18 \text{ m}^2$) necesitamos 3.5 litros (0.5 litros + 3 litros) de pintura.
- Esta propiedad (multiplicativa) se refiere a la igualdad de las relaciones internas y con frecuencia está representado en la regla “si k veces a entonces k veces b”. Lo anterior, por lo general, se utiliza en el aula para resolver problemas verbales. Por ejemplo, para cubrir 36 m^2 ($2 \times 18 \text{ m}^2$) necesitamos 6 litros (2×3 litros) de pintura.

■ Metodología

La presente investigación es de naturaleza tanto cuantitativa como cualitativa. El grupo de estudio es de 33 alumnos de primer grado de bachiller del colegio privado Salvador Allende en Puebla.

Primera etapa:

Se aplicó al primero grado de bachiller el test de reflexión cognitiva y el test de razonamiento lógico para poder analizar su nivel cognitivo inicial.

- Test de Reflexión Cognitiva (TRC) de Frederick (2005) consiste en sólo tres ítems que se caracterizan por estar diseñados para llevar a errores en la ausencia de pensamiento reflexivo
- Test de Razonamiento Lógico (TRL) (Acevedo & Martínez, 1995) consiste en un cuestionario de diez tareas de papel y lápiz, dos por cada uno de los siguientes esquemas de razonamiento: Proporcionalidad (PP), control de variable (CV), probabilidad (PB), correlación (CR) y operaciones combinatorias (CB).

Segunda etapa:

Aplicar problemas matemáticos con trampa lineal:

Los problemas son básicamente los mismos que proponen Van Dooren et al. (2007)

Problemas matemáticos aplicados:

- Un grupo de 5 músicos toca una canción en 10 minutos. Otro grupo de 35 músicos tocará la misma canción. ¿Cuánto tiempo le tomará a este grupo tocar la canción?
- Si 500 ml de agua se encuentran a 20° C en el ambiente, ¿qué temperatura tendrán 1000 ml de agua?
- Ellen y Kim están corriendo alrededor de una pista. Corren igual de rápido, pero Ellen comenzó más tarde. Cuando Ellen ha corrido 5 vueltas, Kim ha corrido 15 vueltas. Cuando Ellen ha corrido 30 vueltas, ¿cuántas ha corrido Kim?
- La locomotora de un tren tiene 12 m de largo. Si hay 4 vagones conectados a la locomotora, el tren tiene una longitud de 52 m. Si hubiera 8 vagones conectados a la locomotora, ¿cuál sería el largo del tren?
- El granjero Carlos necesita aproximadamente 8 horas para abonar un terreno cuadrado de 200 m de lado. ¿Cuántas horas necesitará para abonar un terreno cuadrado de 600 m de lado?

■ **Resultados**

Con el análisis realizado de los Test de Razonamiento Lógico (TRL) y Test de Reflexión Cognitiva (TRC) se midió el nivel cognitivo de cada uno de los estudiantes. Con base en el análisis de los problemas matemáticos con trampa lineal se realizó una clasificación de respuestas de acuerdo con sus estrategias de solución, para poder encontrar una relación entre el nivel cognitivo de los estudiantes y su estrategia de solución.

Combinando los resultados de los dos test (TRC Y TRL) se obtiene lo siguiente:

Tabla 1. Resultados de TRC y TRL.

	Pensamiento concreto	Pensamiento en transición	Pensamiento formal	Total
Pensamiento rápido	30	0	0	30
Pensamiento lento	0	3	0	3
Total	30	3	0	33

Tenemos 30 pensadores concretos de los cuales estos 30 son pensadores rápidos, y el resto que son 3, son pensadores en transición y a la vez pensadores lentos. No se encontraron pensadores formales. Se puede decir que los estudiantes con bajo nivel cognitivo en TRC son bajos en TRL y alumnos con mejor nivel cognitivo en TRC son medianamente altos en TRL. Para dar un desglose más claro, se realiza una segunda clasificación de estratos de acuerdo a la cantidad de ítems correctos en ambas pruebas:

- Grupo 1: estudiantes con TRC = 0 y TRL = 0
- Grupo 2: estudiantes con TRC = 0 y TRL = 1,2
- Grupo 3: estudiantes con TRC = 0,1 y TRL = 3,4
- Grupo 4: estudiantes con TRC = 2,3 y TRL = 5,6

A continuación, se muestran los resultados globales en la resolución de los problemas matemáticos con trampa lineal.

Tabla 2. El desempeño de alumnos en problemas con trampa lineal.

Problema	Músicos	Temperatura	Carrera	Locomotora	Granjero
Caen en la trampa	10	10	19	21	31
Brincan la trampa	23	23	14	12	2
Total	33	33	33	33	33

La tabla anterior muestra crecientemente cómo los alumnos tienden a caer en trampa lineal. En los dos primeros problemas la mayoría no presentó mayor complicación, los dos siguientes problemas aproximadamente la mitad de los alumnos, presentaron dificultades, y finalmente los últimos tres problemas la mayoría presenta ilusión lineal. En la continuación se presentan los detalles del desempeño de los estudiantes en dos problemas (Carrera y Locomotora).

Análisis del problema Carrera

De acuerdo con la Tabla 2 se puede observar que 19 alumnos caen en la trampa lineal al aplicar métodos lineales donde no corresponden, por lo que es importante describir las estrategias con la que los alumnos resolvieron el problema y relacionarla con el nivel cognitivo.

Tabla 3. El desempeño de los grupos cognitivos en el problema Carrera.

Grupo	Caen	No-caen	Total
Grupo 1	8	5	13
Grupo 2	11	4	15
Grupo 3	0	2	2
Grupo 4	0	3	3
Total	19	14	33

Comparando el grupo 1 y 2 con el grupo 3 y 4, se observa de la Tabla 3 lo siguiente: Todos los alumnos del grupo 4 que consta de alumnos con un nivel cognitivo mejor (pensadores lentos y en transición) aplicaron métodos no lineales correctos. Mientras tanto, los alumnos en el grupo 1 y 2, que consta de alumnos con un nivel cognitivo deficiente (pensadores rápidos y concretos), la mayoría aplicaron métodos lineales donde no corresponde.

Es necesario mencionar que con base en la estrategia con la cual los alumnos resolvieron el problema se obtuvieron las siguientes categorías del problema de la carrera:

- Razonamiento lineal
- Combinación de operaciones
- Razonamiento no-lineal

Razonamiento lineal

La mayoría de los alumnos en los grupos 1 y 2 son los que muestran estrategias de razonamiento lineal, como forma de procedimiento se muestra la siguiente figura:

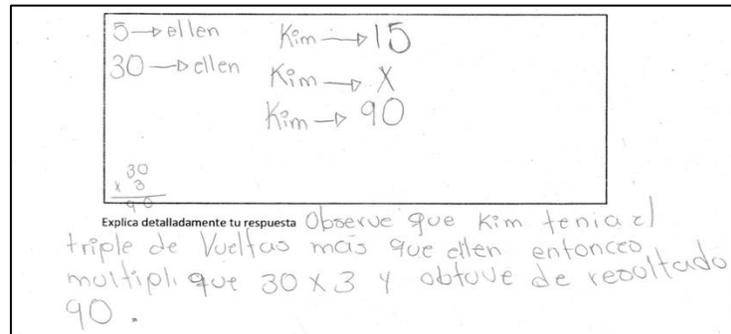


Figura 2: El problema Carrera - Razonamiento lineal.

La tendencia que muestran los alumnos que conforman los grupos 1 y 2 es la utilización de la regla de tres y se considera un método lineal porque, como lo mencionan De Bock et al. (2007), es un razonamiento del tipo “K veces a entonces k veces b”, es decir, el alumno interpreta de manera incorrecta el problema pensando que Kim tiene el triple de vueltas que Ellen y no se percata que sólo le lleva de ventaja 10 vueltas por lo que responde de manera apresurada argumentando que Kim ha corrido 3 veces lo que ha corrido Ellen.

Combinación de operaciones

Algunos alumnos que caen en la trampa lineal de los grupos 1 y 2 utilizan combinación de operaciones, mezclado con indicios de razonamiento lineal un tanto confusos. Por ejemplo, dan razonamientos del tipo “el doble de vueltas” y como respuesta $3 \times 15 = 45$.

Razonamiento no-lineal

El grupo 3 y el grupo 4 aplicaron un método no-lineal que se muestra en la siguiente figura:

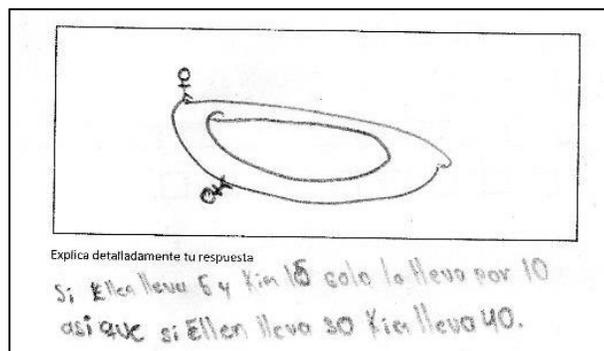


Figura 3: El problema Carrera – Razonamiento no-lineal.

Los alumnos de estos grupos cognitivos se percataron de una diferencia importante para resolver correctamente el problema, no lograron caer en el razonamiento impulsivo de interpretar 15 vueltas como un múltiplo de 3, sino que se tuvo un análisis más prolongado para poder visualizar las 15 vueltas como diferencia de 10 vueltas entre Kim y Ellen.

Análisis del problema Locomotora

En la Tabla 4 se puede observar que más de la mitad de los estudiantes utilizaron un método lineal donde no era aplicable en el problema de Locomotora. Los alumnos que conforman los diferentes grupos se describen en la siguiente tabla para un mejor análisis:

Tabla 4: El desempeño de los grupos cognitivos en el problema Locomotora.

Grupo	Caen	No-caen	Total
Grupo 1	11	2	13
Grupo 2	9	6	15
Grupo 3	1	1	2
Grupo 4	0	3	3
Total	21	12	33

Comparando los grupos extremos (Grupo 1 y Grupo 4), se puede observar que aproximadamente un 80 % de los estudiantes que conforman el grupo 1 caen en la trampa cognitiva y los alumnos que conforman el grupo 4, el 100 % no caen en la trampa lineal. Eso quiere decir que los estudiantes con pensamiento lento y pensamiento en transición son los que mejor desempeño tienen en este problema, por lo que es importante describir las estrategias que utilizaron los alumnos que conforman cada grupo cognitivo para complementar este análisis.

Es necesario mencionar que, con base en la estrategia con la cual los alumnos resolvieron el problema, se obtuvieron las siguientes categorías de resolución del problema de la carrera:

- *Razonamiento lineal*
- *Combinación de operaciones*
- *Razonamiento no-lineal*

Razonamiento lineal

La estrategia que utilizaron los alumnos con el método lineal son:

- Múltiplo (K veces a entonces k veces b)
- Regla de tres

Un 80 % de alumnos, que empleaban el método lineal de múltiplo, utilizaron lo que De Bock et al. (2007) llaman la propiedad multiplicativa de la ilusión de la linealidad y obtuvieron como respuesta 104 o 24 dependiendo de la comprensión del texto, pero básicamente es el mismo razonamiento.

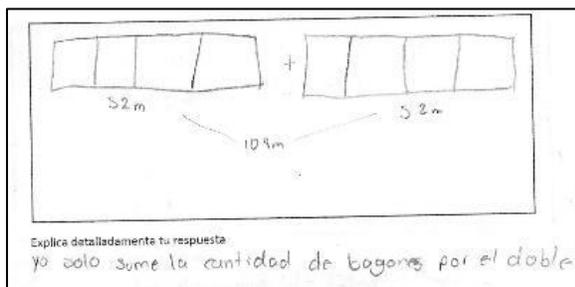


Figura 4: Locomotora –Razonamiento lineal 1.

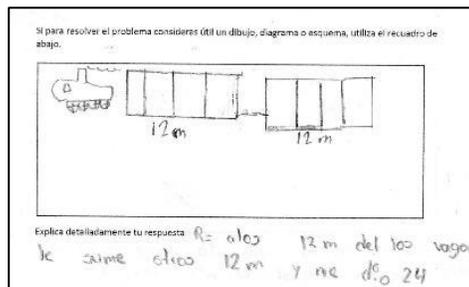


Figura 5: Locomotora-Razonamiento lineal 2.

Según la comprensión del texto, los alumnos no lograron ver la diferencia entre locomotora y tren y “largo” y “longitud” respectivamente, por lo que se representaron los 4 vagones de una longitud 52 metros. Entonces, al preguntarles el largo del tren, ellos solo multiplicaron $52 \times 2 = 104$ o sumaron $52 + 52 = 104$.

En la figura 5 se muestra un ejemplo de otra respuesta del mismo tipo de razonamiento lineal, sólo varía la forma de entender el problema donde en este tipo de respuesta se representó los 4 vagones de “longitud” 12 metros, por lo que la respuesta lineal es 24.

Otra variante de método lineal es la regla de tres:

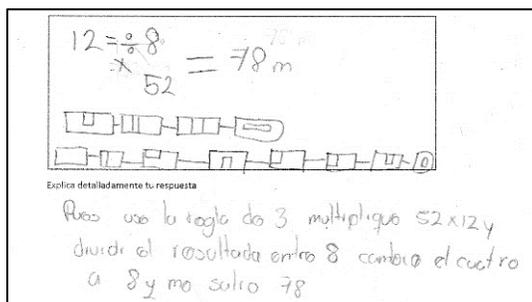


Figura 6: Locomotora - Razonamiento lineal 3.

Este tipo de respuesta es un razonamiento lineal mal planteado, esto porque combina de una manera arbitraria tres datos del problema, y poder formar la famosa regla de tres, la cual es una consecuencia de un razonamiento de tipo lineal.

Combinación de operaciones

Otra categoría de estrategias que no necesariamente está involucrado un razonamiento lineal es la búsqueda de una respuesta a través operaciones aritméticas que se mencionan en el problema que no muestran indicios de alguna regla de tres o de utilizar la propiedad multiplicativa de la linealidad a lo que Brousseau llama “contrato didáctico”. Como ejemplo de esto tenemos la siguiente figura:

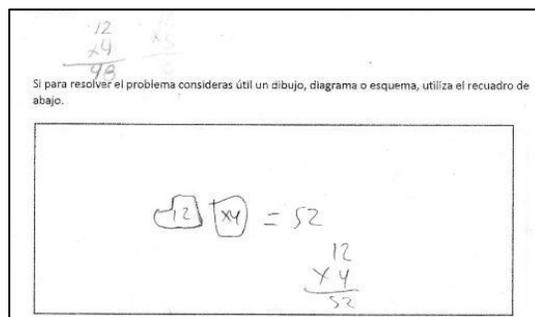


Figura 7: Locomotora - Contrato didáctico.

En este tipo de respuestas el estudiante se centró en realizar una multiplicación con los datos que se proporcionó en el problema, por lo que el multiplica 12 que es el largo de la locomotora por 4 que es el número de vagones y obtiene como respuesta 52 (con un error aritmético adicional). Esto muestra una falta de análisis y comprensión por parte del alumno. En cierto sentido, el alumno se vuelve flojo y sólo da como respuesta rápida este tipo de combinación de operaciones ya que, por contrato didáctico, sabe que está obligado a dar una respuesta.

Razonamiento no-lineal

Los alumnos en esta categoría no caen en la trampa lineal que tiene el problema y utilizan un razonamiento no-lineal ejecutado correctamente, comprenden correctamente el problema y la diferencia entre largo y longitud, como lo muestra en la siguiente figura:

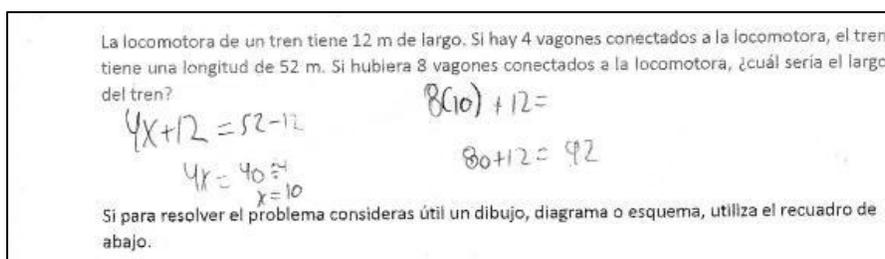


Figura 8: Locomotora - Razonamiento no-lineal 1.

El alumno llega a comprender la diferencia entre largo y longitud, en este caso lo representa simbólicamente, a 12 lo relaciona con el largo de la locomotora y 52 lo relaciona con la longitud “total”, por lo que él encuentra, que cada vagón tiene longitud de 10 metros (la que representa con el símbolo x). Por lo tanto, multiplica los 8 vagones por los 10 metros de cada vagón y lo suma al largo de la locomotora.

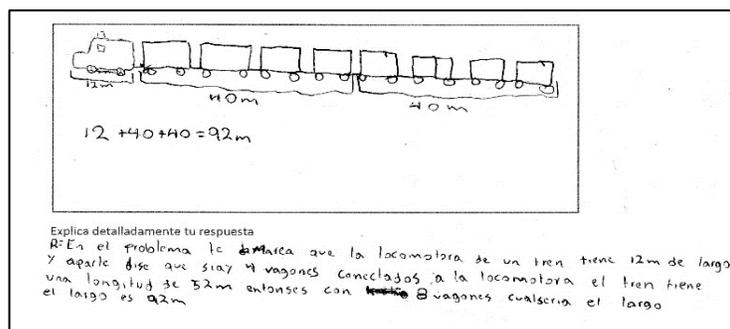


Figura 9: Locomotora – Razonamiento no-lineal 2.

Como lo muestra la Figura 9, los alumnos tienen una comprensión correcta del problema de tal forma que realizar una representación gráfica (dibujo) para poder realizar correctamente el problema. De la representación gráfica se pudo deducir que el estudiante logra encontrar la diferencia entre largo y longitud y locomotora y tren.

■ Conclusiones

Este estudio permitió responder con los hechos iniciales las dos preguntas de investigación:

¿Qué tipo de estrategias utilizan los estudiantes de primer grado bachiller al tratar de resolver problemas matemáticos con “trampa lineal”?

¿Qué tipo de estudiantes de acuerdo a sus estadios de pensamiento son los que presentan mayor tendencia a caer en problemas matemáticos con “trampa lineal”?

Para la primera pregunta se encontró y documentó un amplio espectro de estrategias y se demostró que su carácter depende del nivel de reflexión cognitiva y razonamiento lógico, es decir, entre la variedad de estrategias de solución que utilizaron los estudiantes del bachillerato Salvador Allende, el método lineal y sus derivados fue la preferida de los estudiantes.

Para la segunda pregunta el test de razonamiento lógico (TRL) y el test de reflexión cognitiva (TRC) nos permitieron ubicar qué tipo de alumnos son pensadores concretos, formales, rápidos y lentos, para posteriormente relacionarlo con el desempeño que tienen en la resolución de problemas matemáticos.

Se encontró que los alumnos con un pensamiento rápido son pensadores concretos y los pensadores lentos están en transición hacia el pensamiento formal. Los resultados nos permitieron concluir que precisamente los pensadores rápidos y concretos (grupo cognitivo 1) son los que utilizan con mayor probabilidad el método lineal y sus derivados en problemas donde corresponde la linealidad y los pensadores lentos, así como en transición (grupo cognitivo 4) son los que percatan la no aplicabilidad del método lineal en problemas matemáticos con trampa lineal.

De tal manera, el Test de Razonamiento Lógico (TRL) y el Test de Reflexión Cognitiva (TRC) podrían ser predictores que indican cuáles son los estudiantes que presentarán mayores dificultades en resolución de problemas matemáticos con “cierta trampa”. Claro esa importante relación se debe investigar y corroborar realizando estudios que involucrarían el mayor número de estudiantes.

Los resultados de este estudio inicial tienen una fuerte implicación para la enseñanza de las matemáticas. Los docentes deben usar los diseños didácticos que ofrecen a los estudiantes las secuencias de actividades de aprendizaje que promuevan la “aceleración cognitiva” (Shayer & Adhmi, 2007).

■ Referencias bibliográficas

- Acevedo, J., & Martínez, J. M. O. (1995). Validación y aplicación de un test de razonamiento lógico. *Revista de psicología general y aplicada*, 48(3), 339-351.
- Aguilar, M., Navarro, J. & López, J. (2002). Pensamiento formal y resolución de problemas matemáticos. *Psicothema*, 14, 382-386.
- De Bock, D., Van Dooren, W., Janssens, D., & Verschaffel, L. (2007). *The illusion of linearity: From analysis to improvement*. New York: Springer.

- De Bock, D., Van Dooren, W., Janssens, D., & Verschaffel, L. (2002). Improper use of linear reasoning: An in-depth study of the nature and the irresistibility of secondary school students' errors. *Educational Studies in Mathematics*, 50, 311-334.
- Frederick, S. (2005). Cognitive reflection and decision making. *The Journal of Economic Perspectives*, 19(4), 25-42.
- Inhelder, B. & Piaget, J. (1955). *De la lógica del niño a la lógica del adolescente*. Buenos Aires: Paidós (1972).
- Kahneman, D. (2002). Maps of bounded rationality: *A perspective on intuitive judgment and choice*. Nobel Prize Lecture. Recuperado el 08 de diciembre, 2002 en <https://www.nobelprize.org/uploads/2018/06/kahnemann-lecture.pdf>
- Shayer, M., & Adhami, M. (2007). Fostering cognitive development through the context of mathematics: Results of the CAME project. *Educational studies in Mathematics*, 64(3), 265-291.