

LUGARES GEOMÉTRICOS: PARADIGMAS Y DIFICULTADES DE APRENDIZAJE

LOCI: PARADIGMS AND LEARNING DIFFICULTIES

José Luis Soto Munguía, Manuel Alfredo Urrea Bernal
Universidad de Sonora, México Universidad de Sonora (México).
jlsoto@mat.uson.mx, maurr@mat.uson.mx

Resumen

Se presenta aquí un estudio desarrollado con estudiantes de Ingeniería de la Universidad de Sonora, México, sobre sus dificultades para justificar proposiciones geométricas. El trabajo está enmarcado en un curso de Geometría Analítica diseñado con apoyo de GeoGebra y se refiere al tema de lugares geométricos. Se utiliza la teoría de los paradigmas geométricos para explicar estas dificultades y el estudio revela que la formación en geometría de los estudiantes que ingresan a la Universidad, está limitada principalmente a la geometría natural, mostrando una precaria familiaridad con los métodos de la geometría axiomática natural.

Palabras clave: geometría analítica, lugares geométricos, paradigmas geométricos

Abstract

This paper presents a study on engineering students' difficulties to justify geometric propositions at the University of Sonora, in Mexico. The work is framed within a GeoGebra-supported Analytical Geometry course, and it refers to the topic of Loci. The theory of geometric paradigms is used to explain these difficulties and the study reveals that the geometry education of students entering the University is mainly limited to natural geometry, showing a precarious familiarity with the methods of natural axiomatic geometry.

Key words: analytical geometry, loci, geometric paradigms

■ Introducción

En el bachillerato mexicano la geometría se enseña en el segundo y tercer semestre, bajo el nombre genérico de Matemáticas II y Matemáticas III, el primero de estos cursos está dedicado a la geometría sintética y la trigonometría y en el segundo se abordan los elementos básicos de la geometría analítica plana. La geometría deductiva está concentrada en los temas de triángulos, triángulos congruentes y triángulos semejantes que se abordan en la primera parte del curso de Matemáticas II, este enfoque aparece aislado en el programa del curso y no vuelve a retomarse en el curso de Matemáticas III. En este último se privilegian las representaciones algebraicas sobre las geométricas y el uso mecánico de las herramientas algebraicas para obtener los parámetros de rectas y cónicas. Por otra parte, los cursos de matemáticas para futuros ingenieros en la Universidad de Sonora privilegian la modelación y la interpretación de modelos; en ambos casos se requiere que puedan justificar resultados matemáticos, en particular los resultados geométricos que aparecen en sus cursos.

Con el propósito de explorar hasta qué punto los estudiantes de ingeniería pueden justificar proposiciones geométricas, se han diseñado cinco secuencias didácticas sobre el tema de lugares geométricos. Las secuencias han sido diseñadas para desarrollarse con GeoGebra y tomando como referencia la construcción del *hiperbológrafo* de Descartes (1954), en lo que se refiere a la identificación de las relaciones geométricas de la construcción para encontrar la ecuación de la hipérbola. Todas fueron propuestas en un curso de Geometría Analítica impartido a 35 estudiantes de Ingeniería Civil durante el primer semestre de 2018. El uso de GeoGebra está limitado a la manipulación de Applets adjuntos a cada secuencia y las respuestas de los estudiantes fueron enviadas al profesor por correo electrónico.

■ Antecedentes

El presente estudio está motivado por el creciente descuido que hemos observado en la enseñanza de la geometría en los niveles preuniversitarios. Este descuido puede observarse en la manera como se aborda esta disciplina en los libros de texto de mayor uso en nuestra región. Existen, de acuerdo con Houdement, y Kuzniak (2003) tres tipos de paradigmas en Geometría llamados por ellos: *geometría natural*, *geometría axiomática natural* y *geometría axiomática formalista*. En el primero de ellos, los objetos geométricos son concebidos como objetos físicos, el segundo toma como base el aparato axiomático euclidiano y el tercero tiene como modelo prototípico, el sistema axiomático de Hilbert, en la sección siguiente los describiremos con más detalle.

En una revisión de los libros de texto usados en el bachillerato (Morales, Rivera, Cárdenas, Conde y Amavisca, 2016; 2018), con el propósito de identificar el paradigma predominante en ellos, encontramos actividades como la mostrada en la Figura 1, tomada del primero de ellos (p. 53).

ACTIVIDAD 2
SD1-B2

La actividad se realizará de manera individual. Vas a necesitar hojas de papel de color azul, naranja y amarillo, tijeras, regla y transportador.

Sobre la hoja azul traza un triángulo, un lado medirá 10 cm y los ángulos adyacentes a dicho lado tendrán un valor de 40° y 30° cada uno.

Ahora traza en la hoja amarilla un triángulo cuyos lados midan 10, 5.2 y 6.9 cm, respectivamente.

Recorta los dos triángulos y empálmalos.

a) ¿Qué ocurrió cuando empalmaste las figuras?

b) ¿Qué coincidencias hubo entre ambos triángulos?

Figura 1. Una actividad sobre triángulos

Fuente: Morales, Rivera, Cárdenas, Conde y Amavisca (2016, p. 53).

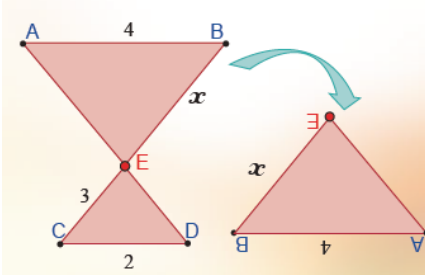
Esta actividad está propuesta para introducir la noción de congruencia de triángulos, pero los triángulos que se pide construir son objetos físicos y la comparación entre ellos está sujeta a la percepción sensorial, se espera por lo tanto que las respuestas de los estudiantes dependan de lo que hayan percibido durante el desarrollo de la tarea, ya sea de manera visual o táctil. Lo anterior ubica la tarea dentro del *Paradigma 1*.

Encontramos también otro tipo de tareas como la que muestra la Figura 2, resueltas aparentemente desde el *Paradigma 2*, en la que se establece que dos triángulos son semejantes aplicando uno de los criterios de semejanza. (Morales, Rivera, Cárdenas, Conde y Amavisca, 2016, pp. 57-58).

Ejemplo 1.

Encuentra el valor de la incógnita en los siguientes triángulos.

Como no se da por hecho que los triángulos son semejantes, se tiene que verificar primeramente que lo son.



$\angle EBA = \angle ECD$
 Por ser alternos internos entre paralelas.

$\angle BAE = \angle EDC$
 Por ser alternos externos entre paralelas.

$\angle AEB = \angle CED$
 Por ser opuestos por el vértice.

Así concluimos que los triángulos AEB y CED son semejantes.

Figura 2. Ejemplo resuelto con herramientas aparentemente deductivas
Fuente: Morales, Rivera, Cárdenas, Conde y Amavisca (2016, pp. 57-58).

El razonamiento es aparentemente deductivo en el sentido de que la igualdad de los ángulos se establece a partir de las hipótesis, pero tales hipótesis no son explícitas en el problema. Los argumentos esgrimidos para establecer la igualdad de los ángulos, está basada en el paralelismo de los segmentos AB y CD , pero tal paralelismo no está enunciado, pero los segmentos se “ven” como paralelos. Estamos frente a un ejemplo que permanece anclado en el *Paradigma 1*, inmerso solo aparentemente en el *Paradigma 2*. Los autores no parecieran conscientes de la diferencia entre los métodos y formas de razonar que caracteriza a cada uno de los paradigmas.

En el texto de Matemática 3, dedicado a la Geometría Analítica, pueden encontrarse explicaciones como la que muestra la Figura 3.

Como lo pudiste corroborar en la **ACTIVIDAD 2**, la suma de las distancias de los focos a cualquier punto P de la elipse $P = (x, y)$ es constante y su valor es $2a$.

Si colocamos el punto $P(x, y)$ en el punto B_i , se forman dos triángulos rectángulos, por lo que se puede aplicar el teorema de Pitágoras.

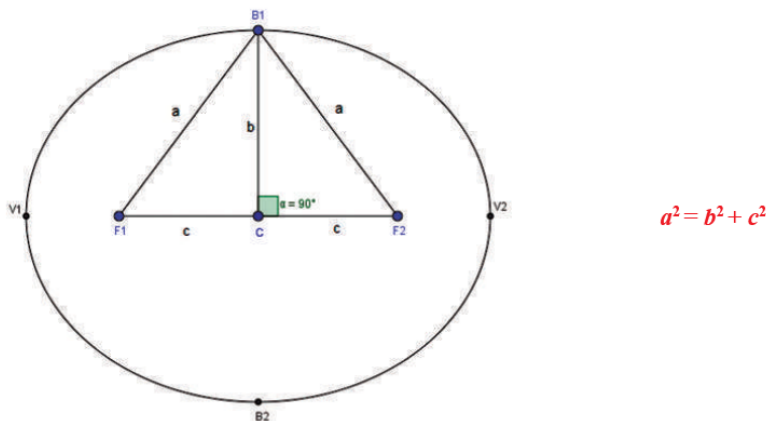


Figura 3. La relación entre la semidistancia focal y los dos semiejes de la elipse.

Fuente: Morales, Cárdenas, Conde, Palafox y Amavisca, 2018, p. 189.

La actividad 2 a la que se refieren aquí, consiste en medir con una regla las distancias F_1B_1 y F_2B_2 tomando una elipse que ha sido trazada con el “método del jardinero” y luego verificar que la suma de estas distancias es constante para algunos casos particulares, contra lo que pudiera esperarse, no se hace alusión a que el cordón utilizado tiene una medida fija. De nueva cuenta las hipótesis se dejan a la percepción de la figura trazada, por ejemplo, la congruencia de los triángulos F_1B_1C y F_2B_2C no se verifica, porque ello obligaría a usar alguno de los criterios de congruencia de triángulos, lo cual implicaría la introducción de formas de razonamiento propios del Paradigma 2.

En síntesis, los estudiantes que ingresan a las carreras de ingeniería han tenido el último contacto con la geometría, tres semestres antes y este contacto se concentra casi exclusivamente en el Paradigma 1.

■ Referencias teóricas

Las respuestas de los estudiantes se analizaron en el marco de la teoría de paradigmas geométricos propuesta por Hedemount y Kuzniak (2003); según estos autores bajo el término geometría elemental, coexisten tres tipos distintos de paradigmas que conducen a distinguir tres tipos de geometría: la *geometría natural*, la *geometría axiomática natural* y la *geometría axiomática formalista*, se describen a continuación estas geometrías, aunque en el presente trabajo solo tomamos en cuenta las primeras dos.

La *geometría natural* puede verse como una ciencia empírica en la que se trabaja con objetos muy ligados a la realidad, que pueden ser medidos y comparados físicamente, porque no siempre es clara la diferencia entre los objetos físicos y sus modelos geométricos. Las proposiciones aquí pueden validarse experimentalmente porque dependen de la percepción sensorial que se tiene de ellas. Dos triángulos aquí son iguales, por ejemplo, si recortados en cartulina coinciden al superponerse uno sobre el otro.

En la *geometría axiomática natural* los objetos geométricos son solamente aproximaciones a la realidad y son definidos por los axiomas de la Geometría Euclidiana clásica. Las proposiciones aquí son validadas mediante demostraciones construidas a partir de los axiomas euclidianos y de resultados geométricos previamente

demostrados. En esta geometría dos triángulos son iguales, si satisfacen alguno de los criterios de congruencia previamente establecidos.

En la *geometría axiomática formalista*. Los objetos geométricos en esta geometría provienen de una axiomática elegida con toda la rigurosidad y formalismo del modelo, pueden ser representados por un dibujo dependiendo del modelo y podrían guiar la intuición del geométra (Hedemount y Kuzniak, 2003).

El razonamiento de validación en este paradigma es exclusivamente a través del sistema formal de axiomas del modelo geométrico subyacente y el uso de artefactos no es permitido y deja de ser una cara visible (a diferencia de los otros paradigmas), más bien se habla de instrumentos teóricos; de esta forma esta geometría no está relacionada con la realidad. En este paradigma, la geometría proviene de un sistema formal de axiomas, donde la lógica matemática es el motor. Las características de un sistema formal son la independencia, la consistencia y la completitud; por ello podemos distinguirla de las otras geometrías, GI y GII. La geometría GIII, surge con la aparición de las geometrías no Euclidianas y la Geometría de Euclides es parte de este paradigma, puesto que ya no se trabaja a nivel local para enfrentar los problemas geométricos.

En el diseño de las secuencias didácticas, se han tratado de recuperar las ideas desarrolladas por Descartes (1954) sobre lugares geométricos, en particular aquellas que están presentes en la construcción del *hiperbológrafo*. El aparato construido por Descartes consiste en dos ejes de referencia, perpendiculares entre sí (AG y AK), una barra fija en el punto G y que al rotar sobre este punto arrastra un dispositivo LKN. El dispositivo LKN mantiene el lado LK sobre el eje AK y su lado KN se prolonga lo suficiente para intersectar la barra GL (Figura 4a).

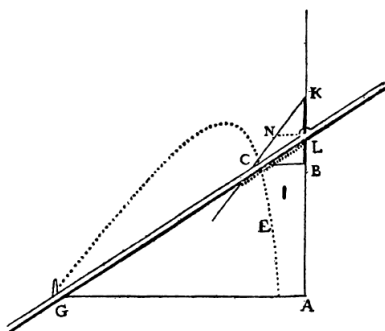


Figura 4a. El hiperbológrafo de Descartes

Fuente: Descartes (1954, p. 50)

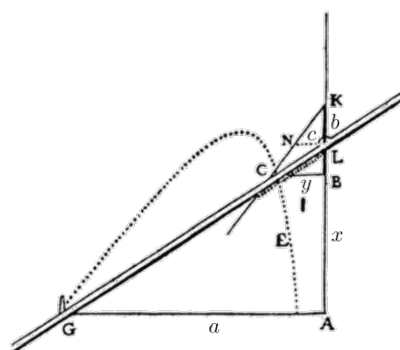


Figura 4b. El hiperbológrafo de Descartes con notación indicada.

Fuente: Descartes (1954, p. 50) con agregados propios sobre la notación

Una vez construido el *hiperbológrafo*, Descartes encuentra la ecuación de la curva trazada por ese aparato:

$$y^2 = cy - \frac{c}{b}xy + ay - ac,$$

en la que las cantidades x , y , a , b y c , son las que están indicadas en la Figura 4b.

La deducción está basada en la semejanza de los triángulos CBK y NLK por un lado y de los triángulos GLA y CLB.

Del método utilizado por Descartes, rescatamos dos características que serán tomadas en cuenta para el diseño de las secuencias:

1. La identificación de las cantidades que cambian y de las que permanecen fijas durante el trazado de la curva. Una manera sistemática de identificar estas cantidades ha sido propuesta a futuros profesores de matemáticas por Arcavi (2000), al modificar construcciones geométricas realizadas con un software de Geometría Dinámica.

2. La deducción exige el uso los métodos propios de la *geometría axiomática natural*, puesto que está basada en las propiedades de los triángulos semejantes, establecidos como teoremas en esta geometría.

Ambas características nos parecen deseables en la formación matemática de un ingeniero, la primera por la importancia que tiene en la modelación algebraica de situaciones geométricas y la segunda porque facilita la explicación y la argumentación de resultados geométricos. Pero en los cursos de Geometría Analítica que se ofrecen a los estudiantes de Ingeniería en nuestro país, los métodos enfatizan la algebrización y la graficación de curvas a partir de sus respectivas ecuaciones. En particular el tema de lugares geométricos está centrado en la construcción de representaciones gráficas a partir de representaciones algebraicas.

Decidimos diseñar secuencias en las que se promuevan las características mencionadas, a pesar de las dificultades que los estudiantes puedan enfrentar para desarrollarlas, sobre todo porque la Geometría del bachillerato cada vez provee menos al estudiante de experiencias relacionadas con la segunda característica.

■ Secuencias y aplicación

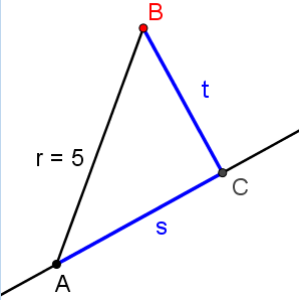
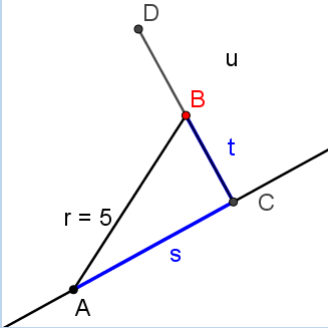
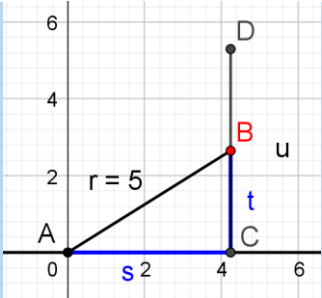
Retomando las ideas de Descartes, Arcavi y Kuzniak y apoyándonos en el software GeoGebra, hemos elaborado una serie de secuencias didácticas sobre la noción de lugar geométrico. La idea es que los estudiantes de ingeniería justifiquen algunos resultados geométricos elementales con argumentos propios del paradigma II. Dados los antecedentes sobre la geometría, con la que han tenido contacto en el bachillerato, no esperamos que las actividades propuestas en estas secuencias estén exentas de dificultades, pero nos interesa también estudiar la naturaleza de estas dificultades.

Las secuencias fueron cinco en total y los estudiantes las desarrollaron a lo largo de dos semanas, en un centro de cómputo en el que cada quien contó con una computadora con el software GeoGebra instalado.

En todas las secuencias se ofrece primeramente al estudiante una construcción en GeoGebra, sin ejes cartesianos, porque se trata de que las relaciones entre segmentos y ángulos sean identificadas por los estudiantes, para que estas relaciones puedan representarse algebraicamente, sin utilizar coordenadas. Nuestro punto de partida es que en una geometría sin coordenadas, los estudiantes podrán concentrarse mejor en las propiedades geométricas de la construcción y en las relaciones que se conservan entre los elementos de la construcción al introducir variaciones en las figuras. En la Tabla 1 mostramos una descripción sucinta de estas cinco secuencias.

Tabla 1. Resumen de las cinco secuencias aplicadas

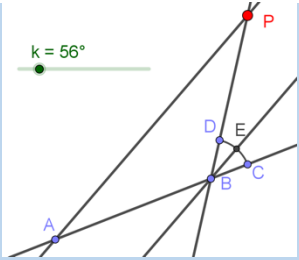
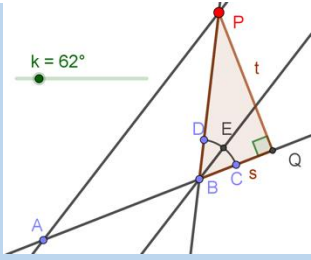
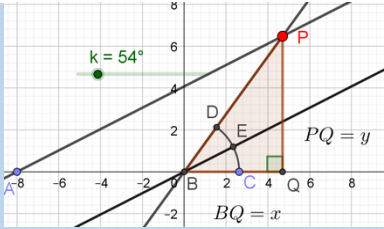
Secuencia 1
Propósitos: a) Identificar las relaciones entre las cantidades, que se conservan al arrastrar el punto B y presentar argumentos geométricos sobre su veracidad. b) Expresar algebraicamente las relaciones identificadas en a). c) Encontrar la ecuación en s y t de la circunferencia en el caso de la Figura i), de la elipse en términos de s y u , en el caso de la Figura ii) y de la elipse en términos de x y y , en el caso de la Figura iii).
Características de las construcciones

<p>AC es una recta fija, AB es un segmento de magnitud constante, BC y AC son perpendiculares, $AC = s$ y $BC = t$.</p>	<p>La construcción es la misma que en la Figura i), pero se ha trazado un punto D colineal a B y C, de tal modo que $DC = u$ es el doble que $BC = t$.</p>	<p>La construcción es la misma que en la Figura ii), pero trasladada y rotada en el plano cartesiano para que A coincida con el origen de coordenadas y C se mantenga sobre el eje X.</p>
		
<p>Figura i)</p>	<p>Figura ii)</p>	<p>Figura iii)</p>

Secuencia 2

Propósitos: a) Identificar las relaciones entre las cantidades, que se conservan al variar k y presentar argumentos geométricos sobre su veracidad. b) Verificar que la curva trazada por P es una circunferencia y justificar geoméricamente este resultado. c) Expresar algebraicamente las relaciones identificadas en a). d) Encontrar la ecuación en s y t de la circunferencia de la Figura ii) y en términos de x y y en la Figura iii).

Características de las construcciones

<p>AB es una recta fija, CBD es un ángulo de medida k, BE es la bisectriz del ángulo CBD, AP es la paralela a la bisectriz trazada por A y P es el punto de intersección de AP y BP.</p>	<p>La construcción es la misma que en la Figura i), pero se ha trazado desde P, una perpendicular a AB que interseca a AB en Q y se ha etiquetado como s al segmento BQ y como t al segmento QB.</p>	<p>La construcción es mostrada en la Figura ii), pero se ha trasladado y rotado para que la recta AB coincida con el eje X y B coincida con el origen.</p>
		
<p>Figura i)</p>	<p>Figura ii)</p>	<p>Figura iii)</p>

Secuencia 3

Propósitos: a) Identificar las relaciones entre las cantidades, que se conservan al arrastrar el punto B (Figuras ii) y iii) y presentar argumentos geométricos sobre su veracidad. b) Justificar geoméricamente por qué el punto H traza un arco de circunferencia y el punto J un arco de elipse. c) Expresar algebraicamente las relaciones identificadas en a). d) Encontrar la ecuación en r y s del arco de circunferencia trazado por el gato

(Figura ii)) y de la elipse trazada por el punto J , en términos de u y t , cuando el punto B se arrastra (Figura iii)).

Características de las construcciones

El ángulo que forma la barda con el piso es recto, la escalera (segmento AB) mide 6 m , el gato permanece en el punto medio de la escalera (H) cuando la escalera se desliza.

La construcción es la ya mostrada en la Figura i) (ahora sin gato) y sobre la cual se ha trazado el triángulo rectángulo EHD . Los segmentos CD y DH , se han etiquetado como r y s respectivamente.

Ahora sobre la Figura ii), se ha trazado el punto J como punto medio del segmento AH . También se ha trazado el ángulo recto FJG . Los segmentos FJ y JG se han etiquetado como u y t respectivamente.

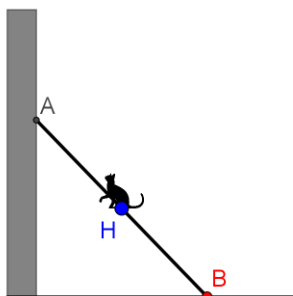


Figura i)

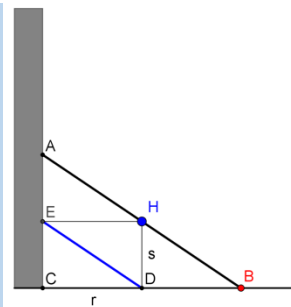


Figura ii)

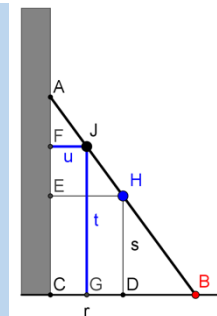


Figura iii)

Secuencia 4

Propósitos: a) Identificar las relaciones entre las cantidades, que se conservan al arrastrar el punto Q (Figuras i) y ii) y presentar argumentos geométricos sobre su veracidad. b) Justificar geoméricamente, por qué la curva trazada por P , corresponde a una parábola. c) Expresar algebraicamente las relaciones identificadas en a). d) Encontrar la ecuación en t y s de la parábola trazada por el punto P , cuando se arrastra el punto Q . e) Encontrar la ecuación de la parábola en término de x y y , cuando la construcción se traslada al origen del plano cartesiano (Figura iii)).

Características de las construcciones

AO es una recta fija y Q un punto sobre la perpendicular a AO trazada por O . La recta que pasa por M es la mediatriz a AB que interseca en P a la perpendicular a OQ trazada por Q .

La construcción es la ya mostrada en la Figura i), en la que se han resaltado los triángulos AOQ y QMP . Se han etiquetado además el segmento fijo $AO = a$ y los segmentos $OQ = t$ y $PQ = s$.

La construcción es la misma que la mostrada en la Figura ii), pero ha sido trasladada y rotada para que las rectas AO y OQ coincidan con los ejes cartesianos.

<p>Figura i)</p>	<p>Figura ii)</p>	<p>Figura iii)</p>
<p>Secuencia 5</p>		
<p>Propósitos: a) Identificar las relaciones entre las cantidades que se conservan, al arrastrar el punto P (Figura i)) y presentar argumentos geométricos sobre su veracidad. b) Justificar geoméricamente por qué el punto B traza elipse. c) Encontrar la ecuación en términos de x y y, de la elipse trazada por el punto B (Figura ii)).</p>		
<p>Características de las construcciones</p>		
<p>C es el centro de una circunferencia de radio 5, P es un punto sobre esta circunferencia, A es un punto fijo tal que $CA = 4$, la recta punteada es la mediatriz del segmento AP y B es el punto de intersección entre esta mediatriz y la recta CP.</p>	<p>La construcción es la mostrada en la Figura i), pero ahora está en el plano cartesiano y ha sido trasladada y rotada para que A y C queden sobre el eje X y para que el origen de coordenadas coincida con el punto medio de CA.</p>	
<p>Figura i)</p>	<p>Figura ii)</p>	

Fuente: Elaboración propia

A continuación, detallamos la Secuencia número dos, con el propósito de mostrar su estructura y porque la usaremos para ilustrar los resultados de la aplicación.

La secuencia inicia proporcionando al estudiante una construcción en GeoGebra y la explicación de las características con las que ha sido construida (Ver Figura 5):

En la construcción siguiente (Figura 1), se han trazado dos puntos A y B a 8 unidades de distancia entre sí sobre una recta cualquiera, luego se trazó la recta BD formando un ángulo CBD con la primera, posteriormente se ha trazado la bisectriz BE al ángulo CBD y una recta paralela a BE que pasa por A. Esta paralela interseca a la recta BD en el punto P. El ángulo CBD puede abrirse y cerrarse usando el deslizador k . Abra el archivo Círc1.ggb y arrastre el deslizador k para verificar que la construcción funciona como se ha explicado.

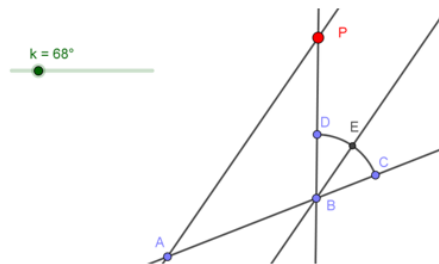


Figura 5. Construcción para trazar una circunferencia
Fuente: Elaboración propia.

Luego se pide al estudiante que explore la construcción, haciendo variar el “deslizador k ” y que observe al mover la construcción, algunas características específicas de la misma. Las tareas aquí pretenden sistematizar la exploración: que distinga primero aquellas cantidades (medidas de ángulos y segmentos) que cambian de las que permanecen constantes durante el movimiento y luego que establezca las relaciones posibles entre estas cantidades, principalmente las relaciones de igualdad. El trabajo con esta construcción concluye con la solicitud al estudiante de que justifique geoméricamente las relaciones detectadas.

Con el propósito de aproximarnos a un sistema de referencia, se propone una segunda construcción, que es similar a la primera, pero se han añadido algunos trazos que puedan servir de referencia para representar algebraicamente las relaciones identificadas entre las cantidades, la Figura 6 muestra esta nueva construcción.

3. Sobre la misma construcción se ha trazado ahora una perpendicular a la recta AB, que pasa por P e interseca a la recta AB en el punto Q, por estas razones el triángulo BQP mostrado en la Figura 2, es rectángulo.

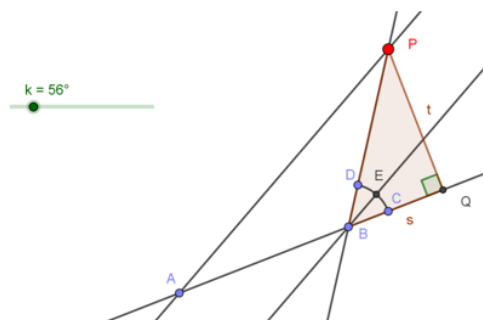


Figura 6. Construcción para trazar una circunferencia, con referencias
Fuente: Elaboración propia.

La secuencia concluye con la introducción de coordenadas cartesianas para tomarlas como referencia y expresar algebraicamente la curva trazada por el punto P, cuando se hace variar el parámetro k . En la Figura 7 puede verse el aspecto que tiene esta última construcción, en la cual las variables s y t han sido denotadas ahora como x y y .

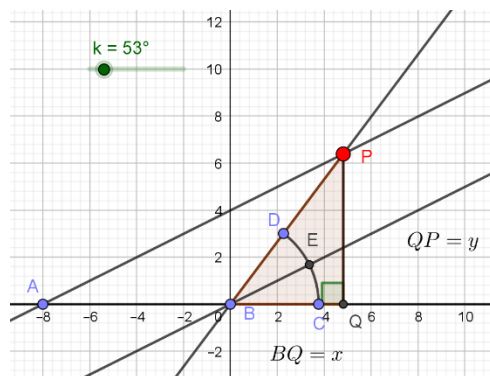


Figura 7. Construcción para trazar una circunferencia en el plano cartesiano
Fuente: Elaboración propia.

■ Análisis y resultados

Los resultados de este estudio revelan que en general, los estudiantes que ingresan a las carreras de Ingeniería, no están en condiciones de utilizar los métodos propios de la geometría axiomática natural y los que pueden hacerlo, lo hacen con poca pericia, como podrá verse a continuación.

A lo largo del desarrollo de estas secuencias, hemos concentrado la atención en aquellas preguntas en las que se solicita a los estudiantes justificar alguna proposición geométrica, porque nuestro interés principal es el de observar la naturaleza de las argumentaciones construidas por los estudiantes. Hemos clasificado a los estudiantes en cuatro tipos, según las características de sus respuestas a las preguntas de interés:

Tipo 1. Ubicamos aquí a los estudiantes que han ofrecido respuestas cuyas formas de argumentación han resultado poco coherentes y para los cuales el Paradigma II pareciera desconocido.

Tipo 2. Clasificamos aquí a los estudiantes que confunden las tesis con las hipótesis en una proposición geométrica y justifican con frecuencia las tesis, usando otra versión de las mismas.

Tipo 3. Consideramos que un estudiante pertenece a este tipo, cuando usa los métodos de la Geometría II de una manera inconsistente, sus justificaciones parecieran depender de la proposición específica que pretende justificar.

Tipo 4. Estudiantes que usan los métodos propios del Paradigma II, para construir sus argumentaciones.

La distribución de los 35 estudiantes que concluyeron las cinco secuencias puede observarse en la Tabla 2.

Tabla 2. Distribución de estudiantes por su tipo de respuestas.

	Tipo 1	Tipo 2	Tipo 3	Tipo 4
Número de estudiantes	6	14	7	8

Fuente: elaboración propia

Ilustraremos los resultados con ejemplos extraídos de la Secuencia 2; en la cual, después de haber explorado la construcción mostrada en la Figura 5 y una vez que han establecido cuáles son los ángulos que permanecen iguales al arrastrar k , los estudiantes concluyen sin dificultades que el triángulo ABP es isósceles. Como podrá verse en las

respuestas siguientes, sus dificultades empiezan cuando intentan justificar algunos de los resultados obtenidos. En el inciso d) se les pide que justifiquen por qué el triángulo se mantiene isósceles y en el inciso e) se solicita que justifiquen por qué el segmento BP funciona como radio del círculo, es decir por qué su magnitud no cambia. La construcción ofrece datos sobre los ángulos y sobre el segmento AB, se esperaba entonces que llegaran a la conclusión de que el triángulo ABP es isósceles, partiendo de que dos de sus ángulos permanecen siempre iguales, como consecuencia de las propiedades de ángulos formados al intersectar dos paralelas con una recta, y pudieran argumentar que por lo tanto sus lados opuestos AB y BP debieran ser siempre iguales.

Ilustraremos a continuación los cuatro tipos de respuesta. Las respuestas se han escaneado para respetar el estilo con el que fueron escritas.

En las de Tipo 1, se tienen respuestas poco coherentes, en las cuales no pareciera concebirse conexión alguna entre las tesis y las hipótesis, sino más bien un intento por describir lo que se observa en la construcción; estas respuestas, como la que se muestra en la Figura 8, son las que más claramente se asocian con el Paradigma 1, en donde los objetos geométricos se perciben como objetos físicos, que a lo más podemos medir y describir.

- d) Justifique su afirmación anterior
Por que dos angulos son iguales y el otro diferente
- e) Justifique ahora por qué la magnitud del segmento BP permanece constante, a pesar del movimiento.
La recta no cambia por que esta girando en al punto b, no hay otro factor que lo cambie

Figura 8. Ejemplo de una respuesta de Tipo 1
Fuente: Respuestas de los estudiantes.

En las de Tipo II, podemos ver respuestas como la mostrada en la Figura 9, en la que el estudiante recurre a la definición de triángulo isósceles para argumentar que el triángulo es isósceles. Y cuando intenta justificar por qué el segmento BP mantiene su magnitud constante, recurre a su percepción visual como fuente de argumentación. Es claro que los estudiantes ubicados en este caso no reconocen las hipótesis del problema y confunden las causas con los efectos en la construcción. Claramente están ubicados en el Paradigma 1, porque no están en condiciones de usar el razonamiento deductivo al construir una argumentación

- d) Justifique su afirmación anterior
Porque tienen dos ángulos iguales y dos lados iguales por lo tanto son características por la cual se conforma un triángulo isósceles.
- e) Justifique ahora por qué la magnitud del segmento BP permanece constante, a pesar del movimiento.
Porque la construcción obliga a que el segmento AP siempre se mantenga fijo.

Figura 9. Ejemplo de una respuesta de Tipo 2
Fuente: Respuestas de los estudiantes.

En este segundo tipo, incluimos también respuestas como la que puede observarse en la Figura 10, con respuestas similares al inciso d) de la Figura 9, pero que en el inciso e) se limitan a ubicar una característica del segmento BP, para usarla como argumento, aunque sea ajeno a la razón por la cual el segmento BP permanece constante:

- d) Justifique su afirmación anterior
Es isoscele ya que siempre tiene dos ángulos iguales y el segmento de la recta AB es igual que PB.
- e) Justifique ahora por qué la magnitud del segmento BP permanece constante, a pesar del movimiento. Por que es una línea que interesca a dos líneas paralelas

Figura 10. Otro ejemplo de una respuesta de Tipo 2
Fuente: Respuestas de los estudiantes.

En un tercer tipo de respuestas se observa que el estudiante mezcla formas de argumentar del Paradigma 1 con argumentos propios del Paradigma 2, éste es el caso de la respuesta que mostramos en la Figura 11, en la se ofrece una respuesta al inciso d) que se ha desprendido de la observación, pero no deja en claro que la igualdad de ángulos implica la igualdad de lados, en cambio responde al inciso e) con mucha claridad al respecto de que tratándose de un triángulo isósceles con un lado fijo, el otro lado deberá tener una magnitud fija. Consideramos que la respuesta al primer inciso no corresponde al Paradigma 2, pero su respuesta al segundo inciso cae en las formas de argumentar propias del este paradigma.

- d) Justifique su afirmación anterior
A pesar de su movimiento siguen siendo siendo con 2 lados iguales Y tiene ángulos iguales
- e) Justifique ahora por qué la magnitud del segmento BP permanece constante, a pesar del movimiento.
El segmento AB mide 8 y al ser triángulo isósceles mide igual que BP entonces a pesar del movimiento medirán lo mismo y se mantiene constante

Figura 11. Ejemplo de una respuesta de Tipo 3
Fuente: Respuestas de los estudiantes.

Y el cuarto tipo de respuesta corresponde a las que propiamente pueden ubicarse en el Paradigma 2, en donde se observa que el estudiante reconoce los datos proporcionados, como hipótesis a partir de las cuales puede construir sus argumentaciones, la Figura 12, muestra una de estas respuestas.

- d) Justifique su afirmación anterior
R: porque tiene dos ángulos internos iguales y por lo tanto dos lados iguales que son los opuestos a los ángulos iguales.
- e) Justifique ahora por qué la magnitud del segmento BP permanece constante, a pesar del movimiento.
R: porque al ser triángulo isocetes obliga a que el segmento BP permanezca de la misma magnitud del AB, y como AB nunca cambia, este tampoco.

Figura 12. Ejemplo de una respuesta de Tipo 4
Fuente: Respuestas de los estudiantes.

■ Conclusiones

De los 35 estudiantes que integraban el grupo, apenas 8 pudieron presentar argumentos de manera consistente para justificar proposiciones, que han respondido del Paradigma 2 y que aquí hemos catalogado como respuestas de Tipo

4. El resto, en mayor o menor medida, permanecen anclados en las formas de argumentación propias del Paradigma 1. Estos hallazgos son preocupantes, porque la mayor parte de los estudiantes han mostrado estar imposibilitados para usar argumentos deductivos a la hora de justificar proposiciones geométricas, sus respuestas indican que pueden identificar hechos geométricos, pero no pueden presentar argumentos deductivos para explicarlos, lo cual resulta grave en estudiantes que cursan una carrera de Ingeniería. En la Tabla 2, puede observarse que las respuestas ubicadas fuera del Paradigma 2 no son homogéneas. En las respuestas de Tipo 1 podemos ver a los estudiantes más distantes del Paradigma 2 (seis en total) a los cuales se asocia además un desconocimiento recurrente de las definiciones de los objetos geométricos con los que han trabajado. La mayor cantidad de casos se presentaron en las respuestas de Tipo 2 (14 en total), las dificultades enfrentadas por estos estudiantes están relacionadas con la imposibilidad de ofrecer argumentos deductivos, en la medida en la que no identifican el punto de partida para validar un resultado geométrico. En todo caso, los estudiantes que dieron respuestas de Tipo 3 (siete en total), parecieran ubicados en una etapa de transición entre los dos paradigmas considerados, pero sus respuestas se mueven de un paradigma a otro dependiendo de la proposición que intentan validar.

Anotamos finalmente que el uso de GeoGebra ha resultado atractivo para los estudiantes, pero esto no se ha reflejado en mejorar la naturaleza de las argumentaciones que han presentado. Consideramos también que el presente estudio abre varias interrogantes que tendríamos interés en estudiar en el futuro, una de ellas tiene que ver con la enseñanza de la geometría en los niveles pre-universitarios, porque ahora tenemos indicios de que existen una serie de inconsistencias curriculares en este nivel, en lo que se refiere a la Geometría.

■ Referencias bibliográficas

- Arcavi, A., & Hadas, N. (2000). Computer mediated learning: an example of an approach. *Journal of Computers for Mathematical Learning* 5: 25–45.
- Descartes, R. (1954) *The Geometry*. New York: Dover.
- Houdement, C., & Kuzniak, A. (2003). Elementary geometry split into different paradigms, in M. Mariotti (ed.), *Proceedings of CERME 3*, Italy: ERME. http://www.mathematik.tu-dortmund.de/~erme/CERME3/Groups/TG7/TG7_Houdement_cerme3.pdf
- Morales, E., Rivera, H., Cárdenas, L., Conde, M., y Amavisca, R. (2016). *Matemáticas 2*. Hermosillo, México: Colegio de Bachilleres del Estado de Sonora.
- Morales, E., Cárdenas, L., Conde, M., Palafox, M., y Amavisca, R. (2018). *Matemáticas 3*. Hermosillo, México: Colegio de Bachilleres del Estado de Sonora.