PRÁCTICAS ASOCIADAS AL ÁREA DE FIGURAS PLANAS

PRACTICES RELATED TO THE AREA OF PLANE SHAPES

María José Castro, Myriam Nuñez, Christiane Ponteville
Facultad de Farmacia y Bioquímica. Universidad de Buenos Aires (Argentina)
mjcastrogonzalez@gmail.com; myriam@ffyb.uba.ar; chponteville@gmail.com

Resumen
Se realizó un análisis cualitativo de exámenes de alumnos de la asignatura Matemática de las carreras de Farmacia y Bioquímica de la Facultad de Farmacia y Bioquímica de la Universidad de Buenos Aires. Este análisis permitió identificar prácticas asociadas con los contenidos vinculados al cálculo de áreas de figuras planas. Se analizaron las resoluciones desarrolladaspor los alumnos,de los ejercicios correspondientes a los exámenes de dicha asignatura. La temática evaluada fue el cálculo de áreas involucrando la construcción de representaciones gráficas.

Palabras clave: figuras planas, áreas, integrales definidas

Abstract
This paper presents a qualitative analysis carried out with students' Mathematics-subject exams in Pharmacy and Biochemistry degree courses at the Faculty of Pharmacy and Biochemistry, from the University of Buenos Aires. This analysis allowed identifying practices associated with the contents involved in the calculus of plane shape areas. The students' solutions of the exercises corresponding to mathematics exams were analyzed. The topic evaluated was the calculus of areas involving the construction of graphical representations.

Key words: plane shapes, areas, definite integrals

Introducción

Los docentes identifican un conjunto de dificultades en el aprendizaje de los conceptos del Análisis Matemático. Es posible estudiar sus orígenes y diversas formas didácticas de tratarlos planteándose como dificultades centrales la comprensión de los procesos al infinito en la conceptualización del límite, de la derivada y de la integral y la utilización de los diversos modos de representación que constituyen una forma de análisis potente del concepto matemático (Duval, 1993). Además, estas dificultades pueden ser analizadas desde los terrenos epistemológico, didáctico y psicológico (Túregano, 1998). En el plano didáctico, por ejemplo, se asocian tales dificultades con el enfoque algebraico y reduccionista de la enseñanza del cálculo (Milevicich, 2008).

Entre los obstáculos epistemológicos que deben atravesar los alumnos, se puede identificar, dualidad del lenguaje utilizado: conviven en el discurso matemático escolar de los cursos de cálculo el lenguaje propio del análisis con el de la geometría analítica. Las ideas asociadas a las integrales definidas aparecen de manera formal en los desarrollos de cálculo infinitesimal del siglo XVII, aunque sus ideas germinales se presentan ya en el desarrollo de la matemática griega. De esta manera en la organización clásica de los cursos de análisis, los temas vinculados al área quedaron circunscriptos a aplicaciones directas de conceptos infinitesimales (Boyer, 1996). Así, resulta que la geometría y la medida aparecen en general con un carácter instrumental utilizadas para la ejercitación de otros contenidos como, por ejemplo, cálculos aritméticos, resolución de ecuaciones, entre otros.

La introducción de la tecnología, gracias a la interacción y dinamismo que posee, ha producido el surgimiento de múltiples propuestas didácticas nuevas, a la vez que plantea un nuevo debate respecto de los alcances del análisis matemático vinculado a la habilidad de manipular el pensamiento visual y el analítico (Aranda y Callejo, 2017).

Integrales definidas y áreas

Este trabajo se origina al observar los inconvenientes que alumnos en el primer año de la Universidad enfrentan al abordar los conceptos vinculados al área en el contexto de las integrales definidas. El desarrollo de las ideas matemáticas vinculadas al concepto de área tiene su origen en las percepciones más antiguas de ideas matemáticas y en su uso empírico.

A lo largo de las diferentes instancias del curso, se busca que los alumnos puedan relacionar las representaciones analítica y gráfica de curvas; para que luego, dicha representación sea traducida mediante un proceso infinitesimal como es la integral definida, instrumento que permite el cálculo de áreas definidas por dichas curvas.

Todo este proceso requiere de razonamientos sobre gráficas planas, favorecidos por el proceso de visualización concebida como la construcción mental de los objetos o de los procesos que un individuo asocia con objetos o con eventos percibidos en el exterior (Zaskis, Dubinsky y Dautermann,1996). En este contexto, las representaciones gráficas de funciones cobran importancia en su vinculación con las figuras planas.

Experiencia realizada

El diseño curricular de las carreras de Farmacia y Bioquímica (Facultad de Farmacia y Bioquímica de la Universidad de Buenos Aires) está dividido en cuatrimestres (un total de 10 en Farmacia y 11 en Bioquímica). Estos cuatrimestres se distribuyen en tres ciclos diferentes: Ciclo Básico Común (para las carreras de las Ciencias de la Salud, cuatrimestre 1ero y 2do), Ciclo Común (cuatrimestre 3ero a 6to) y Ciclo Superior (de Farmacia o de Bioquímica, a partir del 7mo cuatrimestre). Ambas carreras tienen en común los dos primeros ciclos (Universidad de Buenos Aires, Plan Bioquímica 2008, Modificatoria 2016); (Universidad de Buenos Aires, Plan Farmacia 2008, Modificatoria 2016).

La asignatura Matemática corresponde al 3er cuatrimestre y los alumnos acceden a cursarla luego de haber aprobado la asignatura homónima del Ciclo Básico Común, donde se imparten contenidos vinculados a funciones, elementos de cálculo diferencial y cálculo integral.

La guía de trabajos prácticos de la materia está organizada siguiendo los lineamientos del Análisis Matemático clásico. En lo que respecta a las integrales, la ejercitación propuesta se estructura según el siguiente orden: integrales indefinidas, familia de primitivas, integrales definidas, teorema del cálculo integral y aplicaciones de la integral. Dentro de las aplicaciones, la guía plantea el cálculo de áreas, las cuales se presentan de manera paulatina, incrementando el grado de dificultad de las áreas propuestas.

Los ejercicios de los exámenes tienen como objetivo principal el cálculo de áreas entre curvas de tipo exponencial, trigonométrica, polinómica, raíz cuadrada y recta. Ninguno de los enunciados contaba con el gráfico que mostrara en forma explícita la región de la cual se debía calcular su área. Para poder dar respuesta al ejercicio se esperaba que los alumnos, por ejemplo, identificaran los puntos de intersección entre curvas, realicen una representación gráfica de la región, establezcan posiciones relativas entre curvas y expliciten la o las integrales necesarias para calcular el área pedida por el ejercicio.

De los exámenes parciales rendidos por los alumnos durante el primer cuatrimestre de los años 2016 y 2019 y segundo cuatrimestre de 2018, se analizaron aquellos que involucraban el cálculo de área. Los mismos poseían diferente grado de dificultad tanto en la construcción de la gráfica como en el cálculo de las primitivas involucradas en la resolución.
Los enunciados de los ejercicios cuyas resoluciones se analizaron son:

Ejercicio 1
Calcular el área definida por las curvas definidas por
$$y = x^2 \cdot cos(x) \ ; \ el\ eje\ x \ ; \ x = 0 \ ; \quad x = \pi$$
Ejercicio 2
Calcular el área de la región encerrada por las curvas
$$y = e^x \quad , \quad y = e^{-x} \quad , \quad x = -1 \quad , \quad x = 2$$
Ejercicio 3
Hallar el área limitada por las gráficas de
$$y = \sqrt{3x} \quad ; \quad y = -x \quad ; \quad x = 3$$
Dibujar las funciones y representar gráficamente la región correspondiente.

Se analizaron un total de 91 ejercicios resueltos:

Ejercicios resueltos	Cantidad
Ejercicio 1	14
Ejercicio 2	31
Ejercicio 3	46

En el análisis se tuvieron en cuenta las formas de desarrollo de la resolución, la simbología y las estrategias gráficas utilizadas.

Análisis de las resoluciones del Ejercicio 1

A continuación, se presenta la representación gráfica de la región planteada en este ejercicio:

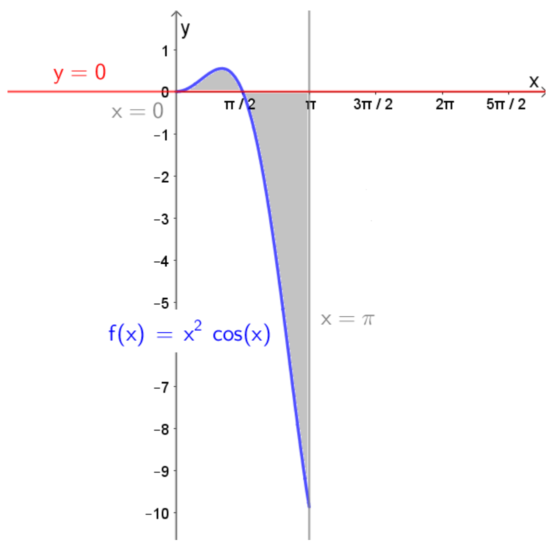

Figura 1: Representación gráfica correspondiente al Ejercicio 1 realizada con GeoGebra

Del análisis de las resoluciones del Ejercicio 1 se pudo observar que los estudiantes no realizan representaciones gráficas, ni figuras de análisis. Sólo en una de ellas se plantea en forma correcta la solución, identificando que el área total se debe calcular como la suma de dos áreas, pero no se explicita la estrategia utilizada para llegar a los límites de integración, ni al argumento de la integral.

Otra de las resoluciones asocia la identificación de los límites de integración obteniendo correctamente los ceros de la función estudiada, pero, identifica al eje x como la función identidad $(f(x) = x)$ para definir el argumento de la integral no percibiendo la presencia de dos áreas a ser calculadas.

Seis de las resoluciones alternan los elementos simbólicos presentes en el enunciado, para proponer diversas integrales combinando los símbolos formales correspondientes al enunciado del ejercicio. Por ejemplo:

$$\int_0^{\pi} x^2 cos(x)dx \quad ; \quad \int_0^{\pi} x^2 cos(x) - x\, dx \quad ; \quad \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} -x^2 cos(x)dx$$

Análisis de las resoluciones del Ejercicio 2

Las resoluciones del Ejercicio 2 pueden caracterizarse de la siguiente manera:

Siete alumnos plantearon en forma correcta el cálculo del área siguiendo las estrategias siguientes: encontraron los límites de integración, vieron que eran dos integrales las que tenían que calcular, plantearon bien los argumentos de las integrales y las calcularon en forma correcta.

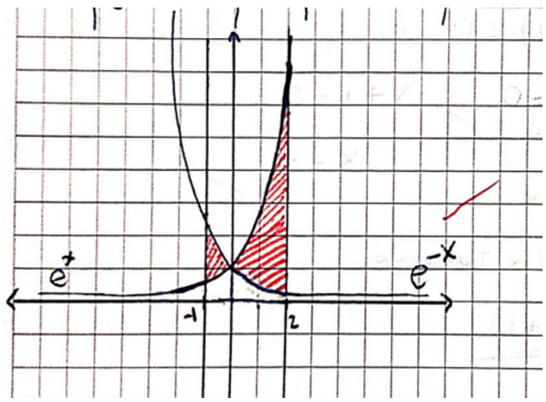

Figura 2: Representación gráfica correcta de uno de los exámenes

Otras herramientas utilizadas para la resolución:

- Cinco de los estudiantes representaron gráficamente la región. La Figura 2 muestra lo realizado por un estudiante.
- Análisis del valor de las funciones intervinientes en los intervalos $(-\infty; 0)$ y $(0; +\infty)$ para identificar los argumentos de las integrales.
- una de las resoluciones analizadas llega al resultado planteando las dos integrales y basándose en la gráfica de la Figura 3

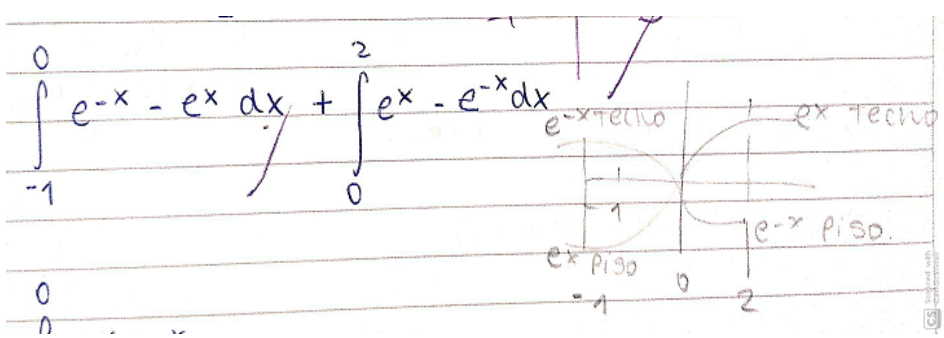

Figura 3: Resolución analítica correcta y gráfica realizada

Se identificaron nueve gráficas con un fallido intento de representar la región involucrada en el ejercicio que condujeron a planteos erróneos (Ver Figura 4).

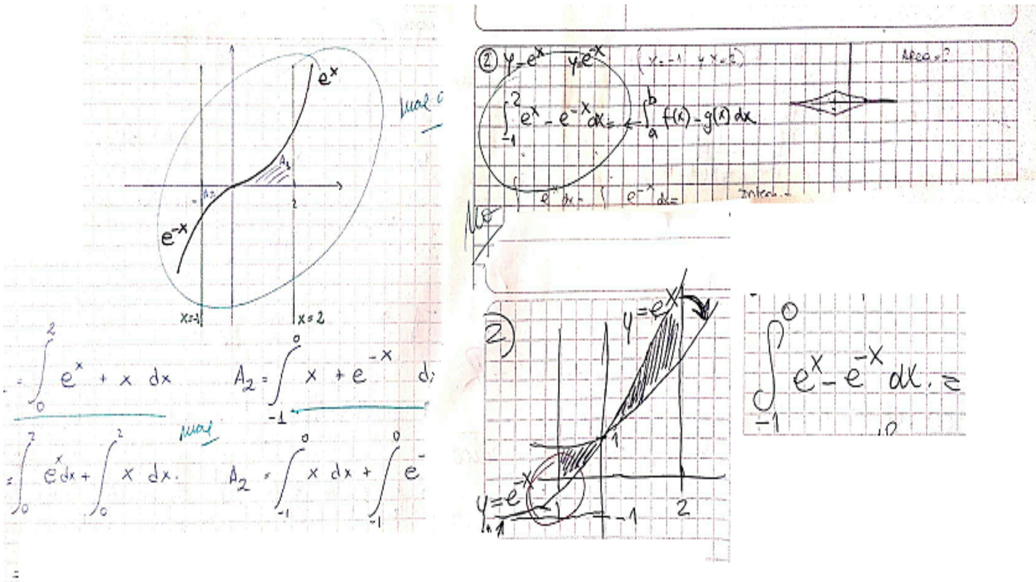

Figura 4: Gráficas y planteo de integrales del Ejercicio 2

Tres de los estudiantes lograron representar gráficamente las funciones exponenciales del ejercicio, no así las rectas que le permitían delimitar la región. Esto los llevó, como se muestra en la Figura 5, a representar una región diferente.

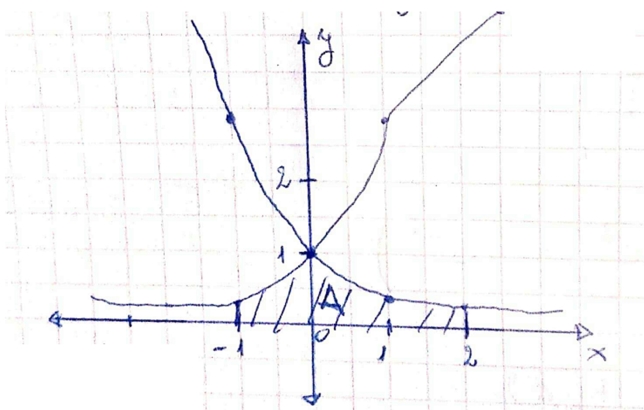

Figura 5: El área indicada no es la correcta para el Ejercicio 2

Los planteos de las integrales definidas realizados respecto del área correspondiente a la figura fueron tanto correctos como incorrectos. A continuación, se muestran las integrales planteadas:

$$\int_{-1}^{0} (e^x - 0)\ dx + \int_{0}^{2} (e^x - 0) dx \ \ ; \ \ \int_{-1}^{2} (e^x - e^{-x}) dx \ \ ; \ \ \int_{-1}^{2} e^x + e^{-x}\, dx$$

En ocho resoluciones no realizan ninguna representación gráfica, proponiendo integrales que no representan el valor del área. Se evidencia una combinación formal de la información contenida en el ejercicio sin ningún criterio que lo relacione con la posición relativa de las curvas, ni de sus puntos de intersección. Se muestran algunos ejemplos:

$$\int_{-1}^{??} e^x - e^{-x} \;\; ; \;\; \int_{-1}^{2} e^x - e^{-x} dx\,;$$

$$\int_{0}^{2} e^x - \int_{0}^{2} e^{-x} \; ; \int_{-1}^{2} e^{-x} + e^x dx \;\; ; \int_{-1}^{0} e^{-x} dx + \int_{0}^{2} e^x dx$$

Seis alumnos no tuvieron propuesta para la resolución del ejercicio, ni gráfica ni analíticamente.

Análisis de las resoluciones del Ejercicio 3

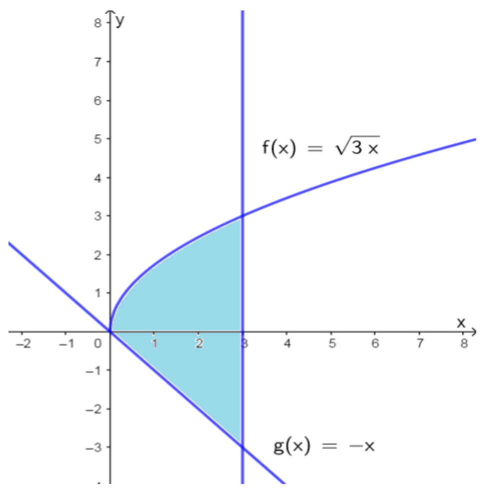

Figura 6: Representación gráfica correspondiente al Ejercicio 3 (GeoGebra)

El enunciado del Ejercicio 3 pedía explícitamente la realización de la gráfica, mientras que los dos primeros no lo hacían. La Tabla 1 resume la información obtenida:

Tabla 1: Descripción de la realización de gráficas en la resolución del Ejercicio 3

Gráfica de manera correcta	56,5%
Gráfica aproximada	10,9%
Gráfica incorrecta	8,7%
No realizan la representación gráfica	23,9%

a) Gráficas correctas

Entre las tácticas empleadas por los estudiantes que pudieron representar gráficamente la región de interés y el valor final del área encontramos que:

- A partir de la gráfica eligieron bien los límites de integración y argumento de la integral. En seis de las resoluciones el resultado final correspondía al valor del área y en otras once el resultado final fue equivocado ya que cometieron un error en el cálculo de la primitiva al no utilizar método de sustitución para hallar la primitiva de $\sqrt{3x}$ a pesar de un planteo pertinente del problema.

- Un alumno elige correctamente el argumento de la integral utilizando un método en donde compara valores de las funciones en un punto. El resultado final de la integral fue equivocado, cometiendo el mismo error del caso anterior en el cálculo de la primitiva.

- Para el cálculo de los límites de integración plantean:
    - $\sqrt{3x} = -x$

$$3x = x^2 \quad \rightarrow \quad 0 = x^2 - 3x \quad \rightarrow 0 = x(x-3) \quad \rightarrow \quad x = 0, x = 3$$

- no tienen en cuenta que parten de una ecuación cuya única solución es x = 0: llegaron a los límites correctos de integración por medio de un mal procedimiento. El planteo del argumento de la integral es correcto. De estos, tres alumnos obtienen el valor del área y 2 alumnos no llegan al resultado por no utilizar el método de sustitución en el cálculo de la integral de $\sqrt{3x}$.

- Un alumno divide el área en dos partes considerando las regiones definidas por el $eje\ x$. A1 encima del $eje\ x$, A2 debajo del $eje\ x$. Calcula en forma correcta los límites de integración, identifica argumentos de las integrales y obtiene el resultado esperado como muestra la Figura 7.

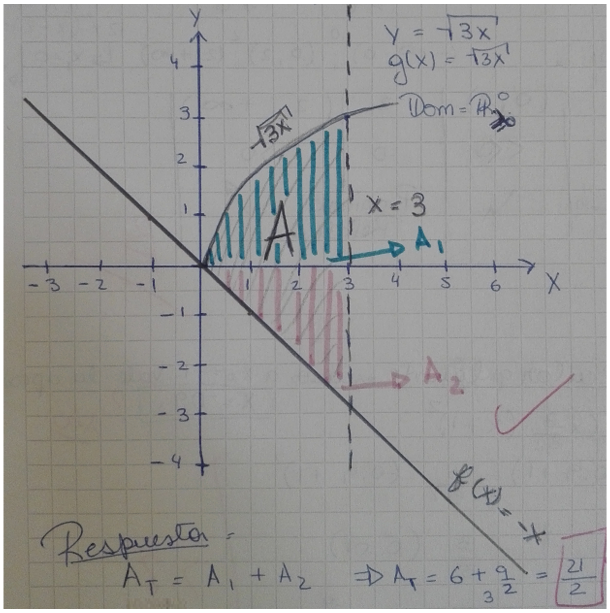

Figura 7: Representación gráfica correspondiente al Ejercicio 3 dividiendo el área en dos partes

b) Gráficas aproximadas

- Un alumno utiliza una tabla de valores para graficar la función de interés, pero, la representación gráfica obtenida se asemeja a una recta, ver Figura 8.

- Un alumno plantea acertadamente el área (límites de integración + argumento integral + valor final), y 3 alumnos se equivocan en el valor final (error en el cálculo de las integrales, sustitución).

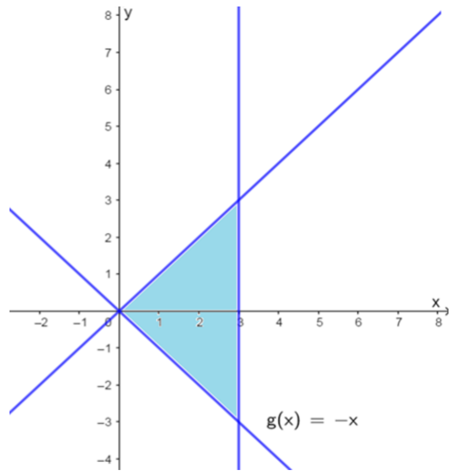

Figura 8: Representación gráfica que reproduce a la $\sqrt{3x}$ como una recta (GeoGebra)

c) Gráficas incorrectas

Los cuatro alumnos de esta categoría confunden como graficar la recta $x = 3$; interpretándola como una recta horizontal, como puede verse en la Figura 9.

Teniendo en cuenta las gráficas propuestas por los alumnos, plantearon coherentemente los límites y el argumento de la integral, equivocándose en el resultado final al no utilizar el método de sustitución para el cálculo de la integral.

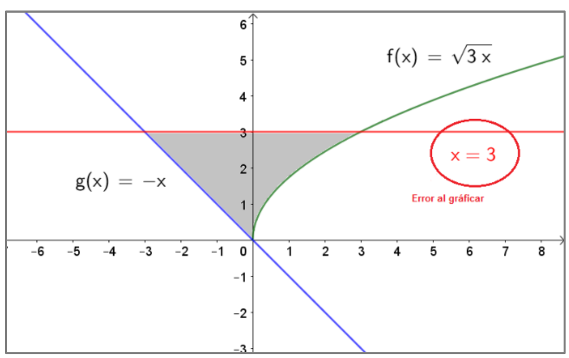

Figura 9: Representación incorrecta de la recta $x = 3$ (GeoGebra)

d) Resolución sin representación gráfica del ejercicio

Al no realizar la gráfica no están respondiendo a una de las consignas del ejercicio. Ninguno de los alumnos llegó a calcular el valor del área: 7 alumnos cometen errores algebraicos en el planteo de las ecuaciones para hallar los límites de integración, 4 alumnos propusieron desarrollos incoherentes con el problema, por ejemplo, derivadas.

Conclusiones generales

A partir de los análisis realizados pudimos identificar algunos hábitos presentes en el trabajo de los alumnos. Las conclusiones obtenidas se organizan alrededor de varias temáticas: la realización de representaciones gráficas, la definición analítica del conjunto plano correspondiente, el uso de límites de integración, los métodos de integración, coherencia de los diferentes registros utilizados, el resultado obtenido, entre otros.

Respecto del Ejercicio 1 se identifica ausencia de herramientas de construcción de gráficas planas relacionados con funciones, falta de consideración de posiciones relativas de curvas y la presencia de asociación según los elementos algebraicos formales sin considerar percepciones geométricas.

En el Ejercicio 2, se identifica que el planteo de gráficas incorrectas conduce, en general, a una resolución incorrecta. Además, la caracterización del área limitada en forma errónea, aunque las curvas están bien realizadas, muestra que la idea de región limitada no está siendo comprendida por los alumnos.

Las resoluciones del ejercicio 3 permiten mostrar que los alumnos eligen diversos caminos para obtener la gráfica. La posición relativa de curvas muestra la concepción presente respecto de las regiones en el plano y su identificación a través de funciones analíticas.

En general, podemos decir que las representaciones gráficas contribuyen a identificar elementos involucrados en el planteo de la integral. Se presentan dificultades al relacionar expresiones algebraicas con figuras planas, al utilizar gráficas aproximadas, al construir una combinación de símbolos algebraicos formales para identificar los elementos de la integral definida. Se cometen errores de resolución de ecuaciones de intersección de curvas, se identifican deficiencias de estrategias de representación de curvas y regiones asociadas y se favorece la obtención de puntos de intersección obtenidos a partir de gráficas.

Estas conclusiones se constituyen en elementos imprescindibles para repensar y reformular actividades vinculadas a la enseñanza del cálculo de áreas de figuras planas.

Referencias bibliográficas

Aranda, C. y Callejo, M.L. (2017). Formas de aproximar el área bajo una curva: un estudio con estudiantes de bachillerato. *Enseñanza de las ciencias. 35(1),* 157-174

Boyer, C. (1996). *Historia de la matemática*. Madrid: Alianza.

Duval, R. (1993). Registres de representation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensé. *Annales de Didactique et de Science Cognitives.* 5, 37-65.

Milevicich, L. (2008). La enseñanza y aprendizaje del cálculo integral en el contexto de primer año de la universidad. En P. Lestón (Ed), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 21,* 339-349. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Túregano Moratall, P. (1998). Del área a la integral. Un estudio en el contexto educativo.
Enseñanza de las ciencias. 16(2), 233-249.

Universidad de Buenos Aires, Facultad de Farmacia y Bioquímica (2016). *Plan de Estudios de la Carrera de Bioquímica. Plan 2008, Modificatoria 2016 (Consejo Superior 6196/2016).*
Buenos Aires: Universidad de Buenos Aires.

Universidad de Buenos Aires, Facultad de Farmacia y Bioquímica (2016). *Plan de Estudios de la Carrera de Farmacia. Plan 2008, Modificatoria 2016 (Consejo Superior 6228/2016).*
Buenos Aires: Universidad de Buenos Aires.

Zaskis, J.; Dubinsky, E. y Dautermann, G. (1996). Using visual and analytic strategies: A study of students undestanding of permutation and symetry groups. *Journal of Research in Mathematics Education. 27(4)*, 435-457.