Clame Acta Latinoamericana de Matemática Educativa
SECCIÓN 2 / PROPUESTAS PARA LA ENSEÑANZA DE LAS MATEMÁTICAS
VOL 33, NÚMERO 2, AÑO 2020

DIFICULTADES OCASIONADAS POR LA UTILIZACIÓN DE PROTOTIPOS GEOMÉTRICOS EN EL APRENDIZAJE DE EJES DE SIMETRÍA

DIFFICULTIES ON THE USE OF GEOMETRIC PROTOTYPES IN LEARNING SYMMETRY AXES

Julio Cesar Contreras Reyes, Carlos Alberto González Salazar, Evelia Reséndiz Balderas
Universidad Autónoma de Tamaulipas (México).
julio_43@live.com.mx, a2153030001@alumnos.uat.edu.mx

Resumen
Este trabajo presenta un estudio de caso que documenta la implementación de una situación de aprendizaje diseñada para el desarrollo de la comprensión de los ejes de simetría en triángulos. Se llevó a cabo con estudiantes de tercer grado de Primaria. Estuvo conformada por cuatro momentos: observaciones frente a grupo, diseño de la situación de aprendizaje, implementación y redacción del informe correspondiente. Como fundamento se utilizó la teoría socioepistemológica de la matemática educativa propuesta por Cantoral, Reyes-Gasperini y Montiel (2014), que contempla dimensiones sociales, cognitivas, epistemológicas y didácticas. Se muestra la utilización de distintas representaciones gráficas que contribuyó a mejorar la consolidación de conocimientos y a un desarrollo en la visualización espacial de los alumnos.

Palabras clave: ejes de simetría, geometría, socioepistemología

Abstract
This paper presents a case study that provides evidence of the implementation of a learning situation designed for the development of understanding the axes of symmetry, specifically in triangles. The research was carried out with primary school third- grade students. It consisted of four stages: observations in front of the group, design of the learning situation, implementation, and writing of the corresponding report. It was based on the socio-epistemological theory of mathematics education proposed by Cantoral, Reyes-Gasperini and Montiel (2014), which includes social, cognitive, epistemological and didactic dimensions. It shows the use of different graphic representations which contributed to enhance the consolidation of knowledge and the development of the students' spatial visualization.

Key words: symmetry axes, geometry, socio-epistemology

Introducción

Existe una gran cantidad de factores internos y externos al aula de clase, que influyen en el proceso de enseñanza-aprendizaje. En las últimas décadas, la matemática educativa ha tenido un creciente interés por considerar cuestiones de tipo contextual, afectivo, social, político, moral y de equidad, para el entendimiento de la realidad educativa.

La matemática educativa cuenta con sus propios objetivos de estudio, es por esto que es considerada por muchos no solo una práctica, sino una disciplina científica o campo de investigación (Artigue, 2013; Cantoral, Reyes-Gasperini y Montiel, 2014). Al respecto, Artigue (2013, p. 47) mencionó que "no se puede negar que en las dos últimas décadas hemos visto importantes cambios, y en particular la influencia creciente de los enfoques socioculturales".

La matemática escolar tiene como uno de sus principales objetivos el desarrollo del pensamiento espacial y geométrico. Uribe, Cárdenas y Becerra (2014, p.145), menciona que el desarrollo del pensamiento espacial tiene la finalidad de desarrollar "la facultad de reconocer y discriminar estímulos visuales e interpretarlos asociándolos con experiencias anteriores". Otros autores como Reséndiz, Correa, Salazar y Sánchez (2016, p. 30) definen a la visualización como "el estudio de las posibles formas en las que el pensamiento visual puede provocar atracciones y generalizaciones en el proceso de transformación en pensamiento abstracto".

Entre los estudiantes, el pensamiento matemático se va desarrollando a medida que estén en condiciones para tomar el control de sus actividades matemáticas, orquestadas por el profesor. Cordero (2006) menciona que los alumnos desarrollarán progresivamente este modo de pensar, a través de múltiples condiciones estructurales; debe, por así decir, esto debe ser el resultado de confrontaciones con cierto tipo de obstáculos encontrados a lo largo de sus actividades. Cantoral y Montiel (2001) afirman que al utilizar una estrategia de graficación, ya sea para construir, interpretar o transformar una representación gráfica, se está abriendo, al mismo tiempo, una manera particular de pensamiento matemático en el estudiante.

Diversos autores han abordado a la visualización en sus trabajos de investigación. Tal es el caso de Cantoral et al. (2000), quienes afirman que la visualización se puede entender como la habilidad para representar, transformar, generar, comunicar, documentar y reflejar información visual. En este aspecto, se habla de un proceso mental muy utilizado en distintas áreas del conocimiento matemático y, en general, del científico.

El vocablo visualización se utiliza, por lo general, en referencia a figuras o representaciones gráficas externas o internas; es decir, sobre un soporte material – papel, pantalla, etc. – o en la mente (Duval, 1999). Por otro lado, Arcavi y Hadas (2000) afirman que la visualización generalmente se refiere a la habilidad para representar, transformar, generar, comunicar, documentar y reflejar sobre información visual.

La capacidad de formar imágenes mentales, de abstraer y manipular conceptos matemáticos, se encuentra fuertemente relacionado al pensamiento visual. Para ello, se requiere desarrollar la habilidad de interpretar y entender información figurativa sobre el concepto, manipularla mentalmente y expresarla sobre un soporte material.

Tomando en cuenta que el campo de estudio con el que se trabajaría es el matemático, se optó por utilizar el término visualización matemática. Cantoral, Farfán, Cordero, Alanís, Rodríguez y Garza (2000), hacen referencia al término pensamiento matemático para representar el cómo piensan las personas que se dedican profesionalmente a la matemática. El pensamiento matemático incluye, por un lado, pensamiento sobre tópicos matemáticos y, por otro, procesos avanzados del pensamiento como abstracción, justificación, visualización, estimación o razonamiento bajo hipótesis.

Investigaciones como las reportadas por Fripp y Varela (2012), Reséndiz et al. (2016), Scaglia y Moriena (2005) y Rey (2004), documentan que, usualmente, la enseñanza de la geometría se hace con limitadas representaciones de objetos matemáticos, lo que trae como consecuencia que los alumnos le asignen propiedades erróneas a las representaciones geométricas. Al respecto, Reséndiz et al. (2016, p.40) mencionan que por la “falta de experiencias variadas (y en contextos diferentes) de los alumnos con objetos geométricos, la construcción de significados que se hacen sobre el objeto queda limitada”.

Estas escasas representaciones geométricas son denominadas prototipos o estereotipos geométricos. Scaglia y Moriena (2005) definen a los prototipos geométricos como modelos que se utilizan como puntos de referencia cognitivos y se construyen, entre otras razones, por la constante utilización de representaciones gráficas estereotipadas a lo largo de la enseñanza en los conceptos geométricos.

Barrantes y Zapata (2008) mencionan que existen diversos obstáculos y errores dentro de la geometría escolar, clasificando estas dificultades como: simbología visual del concepto, distractores de orientación, distractores de estructuración e imágenes reales de conceptos.

Estos errores son replicados constantemente por los libros de texto y los profesores, lo que ocasiona enormes dificultades para el aprendizaje de temas geométricos de mayor complejidad. Incluso cuando los estudiantes se encuentran con representaciones de figuras geométricas no estereotipadas tienden a formar un rechazo: “Si el dibujo posee características visuales distintas a las del modelo, algunos alumnos no reconocen o rechazan esa representación gráfica, sin analizar si responde o no a la definición del concepto” (Scaglia y Moriena, 2005, p. 106).

Godino y Ruiz (2002) hacen mención de algunas dificultades didácticas como lo son la utilización de palabras para hacer referencia a los objetos matemáticos abstractos y a la realidad concreta, dentro de los libros de texto se siguen presentando estas dificultades.

Como se pudo documentar en la revisión bibliográfica, existen varias problemáticas y deficiencias en la manera tradicional de enseñar geometría, como la utilización de prototipos geométricos estereotipados lo cual produce una escasa concepción y limitada de representaciones geométricas en el pensamiento matemático de los estudiantes. Este fue uno de los motivos por el cual se buscó atender estas dificultades por medio de nuestra sencilla situación de aprendizaje.

El principal objetivo de esta investigación fue atender algunas de las problemáticas que existen en la geometría escolar durante los primeros años de educación primaria. En específico, se trabajó con el obstáculo que representa la utilización de prototipos geométricos en el aprendizaje de ejes de simetría para el tercer grado de Primaria. Esto contribuyó a que los estudiantes pudieran desarrollar su visualización espacial, y su pensamiento matemático en general.

Fundamentos teóricos

Tomando en cuenta la naturaleza de la investigación, optamos por utilizar la teoría socioepistemológica de la matemática educativa como nuestro principal referente teórico, este enfoque nos brinda categorías, métodos y herramientas que permiten el estudio de la construcción social del conocimiento matemático Cantoral, Reyes-Gasperini y Montiel (2014).

Cualquier tipo de conocimiento es considerado valido dentro de la teoría socio-epistemológica, ya sea que este tenga un origen culto, técnico o popular para la realización del estudio de los fenómenos didácticos relacionados al conocimiento matemático. Una de muchas tareas que se abordan en esta teoría consiste en estudiar dichos fenómenos, ligado a la construcción del conocimiento matemático, teniendo como principal objetivo la democratización del conocimiento, oponiéndose a las practicas tradicionalistas para la enseñanza de esta disciplina (Cantoral et al., 2014).

Simetría

La simetría es normalmente un concepto que se encuentra relacionado con estética, perfección y orden. Podemos encontrar en distintos contextos de la vida, y disciplinas la presencia de este concepto, como lo son el arte, la arquitectura, la ciencia e incluso en la naturaleza (Morones, 2002; Olkhovaia, 2005; Bohorquez, Franchi, Hernández, Salcedo y Morán, (2009).

Bohorquez et al. (2009, p. 478) retoman las aportaciones de Weyl (1989), mencionando que el concepto de simetría puede entenderse desde diferentes maneras: desde una idea relacionada con la proporción o desde una perspectiva más matemática y formal, como una "invariabilidad de una configuración de elementos bajo un grupo de transformaciones auto mórficas".

Para esta investigación, se hará uso de la definición empleada por Soto (2011) para el entendimiento de la simetría y ejes de simetría. Dentro de las representaciones geométricas, se entiende a la simetría como una propiedad presente en sólo algunas, las cuales tienen correspondencia en tamaño y forma respecto a un segmento o una línea en particular. El segmento que divide a una figura geométrica en dos partes iguales, es el eje de simetría. El uso de los prototipos geométricos mencionados anteriormente por Barrantes, Balletbo, y López (2014) afecta también al entendimiento de la simetría en el ambiente escolar, ya que los estudiantes suelen utilizar representaciones geométricas con configuraciones estereotipadas para identificar los ejes de simetría.

Por otro lado, Bohorquez et al. (2009) realizaron una investigación donde se registró la preferencia por parte de los estudiantes, para hacer uso de representaciones geométricas simétricas para dar solución a problemas geométricos. Estos autores hacen mención que, al solicitarles a los estudiantes la demostración de propiedades generales, de triángulos, optan frecuentemente por utilizar la representación geométrica tradicional del triángulo isósceles, lo que origina que se introduzcan arbitrariamente condiciones no dadas en el enunciado.

La simetría ha tenido gran relevancia en el campo de las matemáticas y las físicas, no solo en cuestiones artísticas y de arquitectura. El uso de la simetría es empleado para darle explicación a un gran número de situaciones, como el esclarecimiento de fenómenos y/o la modelación de otros (Bohorquez et al., 2009).

Morones (2002, p.173) Documenta que el círculo y la esfera, eran para los griegos objetos perfectos de dos y tres dimensiones correspondientemente. Este autor también menciona que "El círculo es simétrico respecto a cualquier línea recta que pase por su centro y la esfera lo es respecto a cualquier plano que la corte pasando por su centro". Otro de los campos en los cuales la simetría tiene un papel fundamental es en la física, ya que esta guarda una profunda relación con sus leyes de conservación y los conceptos fundamentales de esta ciencia (Morones, 2002).

Metodología

En relación a las características y perspectiva teórica, el estudio de caso es de tipo cualitativo y de corte socioepistemológico. La investigación consistió en cuatro fases: observaciones frente a grupo, diseño de la situación de aprendizaje, implementación en el aula y redacción del informe y conclusiones correspondientes.

En la primera fase de la investigación con el objetivo de conocer aspectos característicos de la clase se llevaron a cabo observaciones en un grupo de tercer grado de Primaria, con el fin de obtener información de la dinámica del grupo.

Durante la segunda fase, se realizó el diseño de la situación de aprendizaje, se tomaron en cuenta la información que se obtuvo anteriormente durante la observación, considerando las características específicas del grupo. Durante la tercera fase se llevó la situación de aprendizaje, en el aula donde se realizaron las observaciones anteriormente, ya que se consideró para su diseño, dividiéndose en tres etapas: Inicio, desarrollo y cierre.

Diseño de la situación de aprendizaje

Se sustentó la actividad en la teoría socioepistemológica, por lo tanto, la actividad consistió en tres fases: inicio, desarrollo y cierre. A continuación, se describe brevemente la actividad para posteriormente explicar los momentos de la teoría para realizar el diseño.

Descripción de la actividad

Para la actividad de inicio se formaron equipos previamente planeados por las características del grupo, esto para la realización de las actividades de modo fluido, a continuación, se les solicitó a los alumnos que elaborarán las representaciones geométricas que conocían de un triángulo, una vez realizado esto seleccionamos varios alumnos al azar para que pasaran a realizar una de las representaciones que habían dibujado.

Posterior a esto pasamos a realizar la actividad de desarrollo. Se les entregó material didáctico con distintas configuraciones y diseños de las representaciones de los triángulos.

Se les pidió a los equipos recortar y manipular material didáctico que se les entregó, en el cual podrían identificar las distintas representaciones que hay de un triángulo. Se trabajó con las distintas representaciones que hay de un triángulo, con el material didáctico pudieron doblar, comparando así sus lados y su simetría. Se les solicitó describir las figuras a partir de sus lados y sus características (tamaño, forma, posición, número de ejes).

Y por último volvimos a entregar copias del material anteriormente mencionado y la actividad de cierre consistió en, utiliza el material impreso para plasmar distintas representaciones de triángulos (con distintas posiciones y Características). Se solicitó que en equipos identificaran y trazaran los ejes de simetría de las representaciones que aparecen en ellos.

Se empleó la teoría socioepistemológica para la creación de la situación de aprendizaje y también para el análisis de las observaciones, ya que esta teoría se considera para el estudio de la educación matemática en distintas ramas: social, cognitiva, epistemológica y didáctica (Reyes- Gasperini y Cantoral, 2014).

Dimensión social

Se planificó que los estudiantes trabajaran en grupos de máximo cuatro integrantes, ya que el trabajo en equipo es fundamental para la construcción del conocimiento matemático. Los alumnos por medio de la comparación de ideas, llevan a cabo una adquisición del conocimiento de un modo más concreto.

La teoría socio-epistemológica considera a la matemática como un elemento de la cultura, producto de la actividad humana. Desde esta perspectiva teórica, "la significación que construirá a partir de la actividad de relacionarse al saber matemático como aquél que es producto de la cultura, le permitirá entender aquellas nociones que las miradas platónicas consideran como la matemática escolar" (Reyes-Gasperini y Cantoral, 2014, p. 367).

Dimensión cognitiva

Los estudiantes suelen hacer uso de representaciones geométricas estereotipadas, solamente pueden identificarlos cuando estas se encuentran únicamente en algunas posiciones y diseños con elementos muy generales. Cuando pasan al reconocimiento de dichas representaciones geométricas, con características no estereotipadas, suele causar conflictos, debido a que solo tomaban en cuenta una representación usual, afectando el entendimiento general de las representaciones, ya que se considera a esta como la única (Scaglia y Moriena, 2005).

Tomando en cuenta esta problemática, se planificaron trabajos en los que el estudiante pudiese manipular el material didáctico, con la intención de que interactúe, mida, recorte, doble e incluso pudiese rayar sobre él, brindándole al estudiante la oportunidad de construir su propio conocimiento. Del mismo modo se les solicitó a los estudiantes que realizaran configuraciones diferentes, y que participaran entre ellos debatiendo si la representación mostrada por sus compañeros cumplía con su definición propia de ésta.

Dimensión epistemológica

La filosofía tiene como una de sus ramas a la epistemología, en esta se tiene como principal objetivo, entender los problemas que rodean al conocimiento científico. Etimológicamente viene del griego episteme, que significa "conocimiento verdadero", esta definición tradicionalmente es empleada para referirse al conocimiento científico. Es descrita como una ciencia encargada de discutir acerca del conocimiento mismo (Martínez y Ríos, 2006).

En esta dimensión se estableció el tipo de conocimiento que queríamos abordar, siendo en este caso un enfoque constructivista debido a que la teoría socio-epistemológica acepta como conocimiento una enorme variedad de familiaridades relativas, tomando como valido el saber popular, culto, y técnico, esto a que, en conjunto, conforman la experiencia y sabiduría humana (Cantoral et al., 2014).

Dimensión didáctica

Durante el diseño de la situación de aprendizaje se optó por que los alumnos manipularan distintas representaciones geométricas no estereotipadas, (triángulos en distintas posiciones, ángulos, medidas y formas) con la intención que las pudiesen manipular y recortar, de tal modo que tracen los ejes simétricos, de un modo más dinámico a lo tradicional.

Ballester (2009) hace mención sobre la utilización de recursos manipulativos para la enseñanza de geometría suele resultar en un aprendizaje más dinámico y motivante para los alumnos. Rojas, Cruz, Escalona, Estrada, y Sánchez (2012) documentan que con la impartición de la geometría del espacio se propicia con el desarrollo de la visualización bidireccional. La construcción de representaciones mentales y procesos que una persona relaciona con objetos o sucesos percibidos por él como externos y, por otra parte, la construcción de objetos o sucesos que el individuo identifica con objetos y procesos en su mente.

Análisis de datos

En la actividad inicial de dicha situación se hizo un diagnóstico acerca de los conocimientos previos que tenían los alumnos del tema. Se les pidió a algunos de los alumnos que participaran, pasando al pizarrón y dibujando una representación de lo que concebían como un triángulo.

Las representaciones dibujadas tendrían una sola condición, la cual era que no se repitieran o fuesen iguales a las que ya estaban dibujadas en el pizarrón. Cuando los estudiantes terminaron de participar plasmando sus representaciones, se les pidió que debatieran si las figuras dibujadas por ellos realmente eran triángulos.

Uno de los estudiantes dibujó un triángulo escaleno, pronunciando exageradamente uno de sus ángulos. Cuando se les preguntó a sus demás compañeros si la figura que había plasmado su compañero era un triángulo, la mayoría de los alumnos argumentaba que no, ya que para ellos "estaba chueco". Posterior a esto se discutió si un triángulo isósceles trazado por una alumna, el cual contaba con uno de sus vértices como base.

Al cuestionar a los estudiantes si la figura elaborada por su compañera era un triángulo o no, se obtuvieron respuestas similares a las de la primera participación. La mayoría de ellos argumentaba que la figura era similar a un triángulo, pero lo descartaban, debido a que la figura se encontraba "al revés". Esto evidencia que, en cursos pasados, sus profesores o libros de texto sólo utilizaban escasas representaciones de figuras geométricas, lo que los privaba de ampliar su concepto y percepción. Ello les daba una visión muy limitada, corriendo el riesgo de ser un obstáculo para el estudio de temas de mayor complejidad (Rey, 2004).

Se cuestionó a los estudiantes si la figura hecha por su compañera era un triángulo o no, obteniendo respuestas similares, debido a que la mayoría de ellos mencionaban que no era un triángulo debido a que "estaba al revés". Lo cual demuestra que, en su escolaridad, los profesores o libros de texto, utilizaban insuficientes representaciones de figuras geométricas lo cual acorta su concepto y percepción del mismo. Lo que limitaba su visión, aumentando la posibilidad de ser un obstáculo para el entendimiento de temas más complejos (Rey, 2004).

Durante la actividad de desarrollo, se organizó a los estudiantes en equipos de cuatro integrantes. Se hizo entrega de tres hojas, conteniendo un particular tipo de triangulo -escaleno, isósceles o equilátero- (Figuras 1, 2, 3). Dichos triángulos contaban con diversas configuraciones con respecto al tamaño, posición y medidas de sus ángulos (triángulos isósceles y escaleno). Se les solicitó que recortaran los triángulos, para que tuvieran la posibilidad de interactuar con ellos. El principal objetivo de la actividad fue que encontraran los ejes de simetría de cada representación, si esta lo tenía.

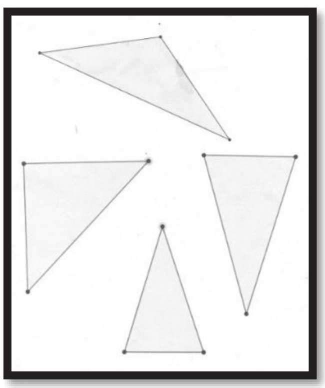

Figura 1

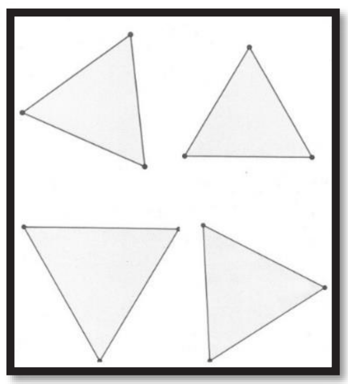

Figura 2

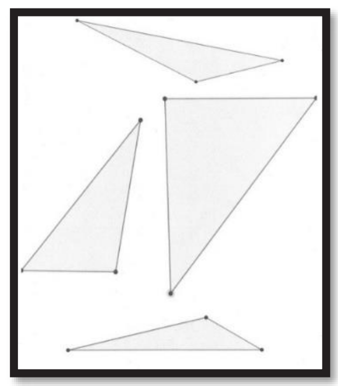

Figura 3

Por lo que se les solicitó que realizaran un doblez por la mitad a dichas figuras, de modo que pudiesen identificar, si al terminar de marcar el doblez, los triángulos resultantes eran iguales o no. En el caso que fuese igual, se les pidió que marcaran la línea que divide la figura en ambas partes.

Se logró identificar que el trabajo en colaboración fue algo que se les dificulto al principio de la actividad a la mayoría de los alumnos. Con el transcurrir de la actividad, empezaron a establecer una mejor relación, surgiendo como necesidad el compartir e intercambiar, ideas, opiniones e incluso estrategias entre ellos, lo que en su momento llevó a una construcción colectiva del aprendizaje. De este modo, los alumnos lograron percatarse que la técnica, utilizada para remarcar los ejes simétricos de los triángulos equiláteros no daba el mismo resultado que con los triángulos isósceles, y a su vez no obteniendo resultados con los triángulos escalenos.

Con esto, pudieron identificar que existen triángulos que tienen tres ejes de simetría (equiláteros), otros con solo un eje simétrico (isósceles) y algunos otros que no cuentan con ningún eje simétrico (escalenos), lo cual es enriquecedor para ampliar su visión acerca del concepto de simetría.

Las siguientes figuras son algunas de las representaciones con las que los estudiantes trabajaron, manipulándolas, recortándolas, doblándolas y señalando su eje de simetría en caso de que existiera (figura 4).

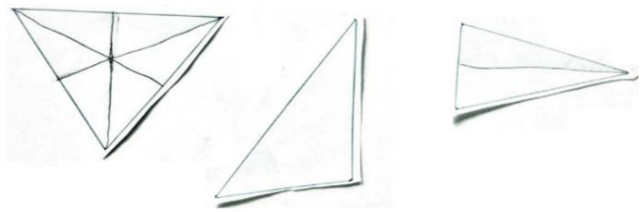

Figura 4

Durante la segunda parte, se les entregó hojas de trabajo similares con las que ya habían trabajado anteriormente. Para esta actividad solamente tuvieron que dibujar los ejes simétricos, sin poder realizar recortes ni dobleces en el material. Fue sencillo para algunos de los estudiantes, dibujar los ejes simétricos de cada triángulo, ya que antes de marcarlos llegaron a un consenso recapitulando todos los conocimientos adquiridos durante la actividad.

En las figuras 5, 6 y 7 se puede identificar las hojas de trabajo de un equipo al azar, en las que se realizó la actividad. Se puede percatar que el equipo dejó triángulos escalenos sin dibujo, lo que funciona como evidencia de que los estudiantes lograron identificar que no se cuenta con ejes simétricos por las peculiaridades de dichas figuras (Figura 5). Para los triángulos isósceles, los alumnos encontraron los lados que eran similares, esto les ayudo para dibujar el eje simétrico (Figura 7).

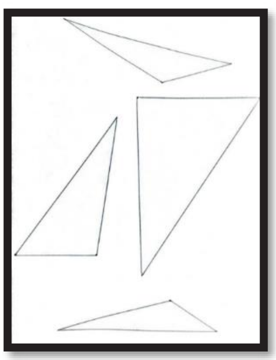

Figura 5

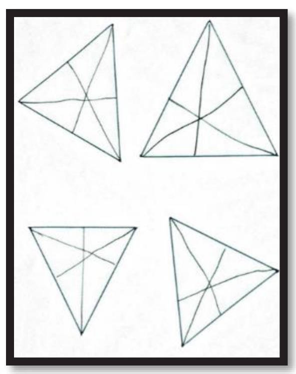

Figura 6

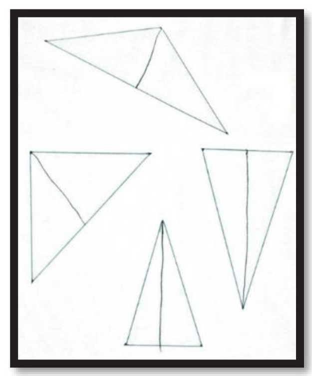

Figura 7

Los alumnos presentaron algunas dificultades en la hoja que tenía la representación gráfica de triángulos equiláteros, puesto que batallaron para identificar el punto medio de sus lados para unirlo con su vértice opuesto, dibujando así el eje simétrico. Aunque se precipitaron con este detalle, los alumnos lograron encontrar que esta clase de triángulo tiene tres ejes simétricos.

En la actividad de cierre se le pidió a cada grupo, que escogieran uno de sus integrantes para narrar, al resto del salón, cuales habían sido sus estrategias para desarrollar las actividades, del mismo modo cual había sido la conclusión grupal que se construyó.

Esta actividad tuvo como objetivo que los estudiantes retomaran y argumentaran los conocimientos que habían obtenido durante la clase.

> Alumna (AA): Este es el triángulo que no se puede doblar a la mitad.
> Maestro (M): ¿Por qué no se puede?

AA: Porque éste es más largo, éste es más corto y éste mucho más chico.
(Refiriéndose a los lados del triángulo)
M: Entonces, ¿cómo son sus lados?
AA: Éste mide 10, éste mide 7, éste mide 14. Si se dobla, no quedan igual los pedazos.

En la transcripción anterior, se puede identificar la participación de una alumna acerca de las conclusiones que construyó su equipo. La figura que describió era un triángulo escaleno, el cual se utilizó a lo largo de la actividad. Comentó que eran distintos los tres lados de ese triángulo: "éste es más largo, éste es más corto y éste mucho más chico", no identificando ningún eje de simetría: "si se dobla no quedan igual los pedazos".

En la geométrica del espacio, para poder lograr una interacción satisfactoria de sujeto-objeto, fue obtenida por medio que los estudiantes visualicen constantemente, e interactúen con el objeto. Aportando a que se pueda estimular, desarrollar, y activar los procesos lógicos del pensamiento, obteniendo un conocimiento geométrico espacial nuevo, llevando a los alumnos a tener la posibilidad de plantear, argumentar, profundizar, reflexionar y valorar conjeturas. (Rojas et al., 2012).

AA: Este triángulo primero se dobla a la mitad, después lo volteamos y también lo podemos doblar a la mitad, y, por último, si se vuelve a girar, también se dobla a la mitad. Se puede doblar tres veces, de diferentes maneras, y en las tres quedan las mitades iguales.
M: ¿Cómo son sus lados entre sí?
AA: Los tres son iguales.

En la anterior transcripción se puede observar que la estudiante identificó, solamente unas de las características del triángulo equilátero, comentando acerca de sus lados, que "los tres son iguales". Mencionó también que el triángulo equilátero tiene tres ejes de simetría: "se puede doblar tres veces, de diferentes maneras, y en las tres quedan las mitades iguales."

Las representaciones gráficas permiten al alumno comprender los conceptos de manera más motivante que si no se usan, o si sólo se aplican formas verbales o descriptivas. Por lo tanto, comprobamos que la representación por medios visuales es una importante manera de comunicar la geometría (Ballester, 2009). Para el caso de los triángulos escalenos tomamos como referencia la participación de un alumno de otro equipo.

Para comprender conceptos de una manera más motivante, el docente debe utilizar representaciones gráficas, ya que, si no se utilizan o solo se usan de forma verbal o descriptiva, no se tendrá un aprendizaje óptimo y concreto. Es por esto que se comprueba que la representación por el medio visual es un modo significativo de transmitir la geometría (Ballester, 2009). En el caso de los triángulos escalenos, se utilizó la aportación de un estudiante de otro equipo:

Alumno (AO): Este triángulo lo doblo, y después lo abro, sólo se puede doblar una vez.
M: ¿Entonces cómo son sus lados entre sí?
AO: (los mide) Éste mide 9, éste mide 9 y éste mide 13. Tiene dos lados iguales y uno más grande.
M: ¿Entonces, cuántos ejes de simetría tiene?
AO: Tiene una… y dos, tiene dos ejes.

El estudiante mencionó que el triángulo isósceles, contaba con dos de sus lados iguales y uno distinto. Lo que nos gustaría destacar fue su argumentó, en el que menciona que solo se podía doblar una vez el triángulo, pero al momento de cuestionarle acerca de los ejes de simetría resultantes, dijo que la representación, contaba con dos, puesto que lo confundió el eje simétrico resultante, con los triángulos que se produjeron al doblar la figura.

Al aprender geometría es de gran importancia el proceso cognitivo que se emplea en la visualización. Se requiere de una representación gráfica (dibujo), para la creación de la representación mental (figura); considerando los elementos representativos de las figuras y/o cuerpos geométricos, es la forma en la que los alumnos desarrollan su razonamiento en la resolución de problemas geométricos (Reséndiz et al., 2016).

Conclusiones

A lo largo de la investigación se analizó diversas complicaciones en la enseñanza tradicional de la geometría, como lo es el uso de prototipos geométricos y las dificultades que representó para el desarrollo del pensamiento matemático y geométrico. Consideramos que se lograron los objetivos planeados, ya que los alumnos fueron capaces de ampliar su concepto acerca de las representaciones geométricas, construyéndolo de manera colectiva.

Es importante destacar que la aplicación de distintas representaciones gráficas durante la enseñanza de la geometría, también de material didáctico concreto. Esto contribuye a mejorar la consolidación de conocimientos y a un desarrollo mayor en la visualización espacial de los alumnos.

Uno de los principales aciertos de la actividad fue la colaboración que hubo en el grupo. Tomamos en cuenta que uno de los factores que determinan una efectiva práctica educativa es conocer a fondo el contexto inmediato de los alumnos, la forma en que se relacionan, sus dudas, opiniones e intereses, de tal modo que el diseño fuese lo más adaptado posible, considerando intereses específicos del grupo.

Para el alumno es importante familiarizarse con la descripción verbal de algunas representaciones graficas de los objetos geométricos, lo que permitirá la interpretación de iconos como el reconocimiento del objeto por medio de ellos.

Para comprender la manifestación del objeto geométrico a entender, es necesario brindarle diversos ejemplos. La enseñanza de la geometría tradicionalmente se hace por medio de representaciones únicas de los objetos geométricos, lo que ocasiona que los estudiantes determinen pseudo-propiedades a dichos objetos, como lo es la posición y la dimensión. (Fripp y Varela, 2012). Esto quiere decir que, a falta de prácticas variadas, y en contextos múltiples, con las representaciones geométricas, originan que los alumnos deduzcan representaciones limitadas.

Referencias bibliográficas

Arcavi, A. y Hadas, N. (2000). Computer Meditated Learning: An Example of an Approach, *International Journal of Computers for Mathematical Learning, 5(2),* pp. 63-85.

Artigue, M. (). La educación matemática como un campo de investigación y como un campo de práctica: Resultados, Desafíos. *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática*, *11*. 43-59. Brasil: CIAEM.

Ballester, S. (2009) Didáctica de la geometría, *Revista Digital Innovación y Experiencias, vol. 20.* 1-8.

Barrantes, M.; Balletbo, I. y López, M. (2014). La componente visual en geometría en los libros de texto de secundaria, *Revista Premisa, 16* (62), 24-35.

Barrantes, M. y Zapata, M. (2008). Obstáculos y errores en la enseñanza aprendizaje de las figuras geométricas, *Campo Abierto, 27 (1),* 55-71.

Bohorquez, H., Franchi, L., Hernández, A., Salcedo, S. y Morán, R. (2009). La concepción de la simetría en estudiantes como un obstáculo epistemológico para el aprendizaje de la geometría, *Educere, 13 (45),* 477-489.

Cantoral, R., Farfán, R., Cordero, F., Alanís, J.A., Rodríguez, R. y Garza, A. (2000). *Desarrollo del pensamiento matemático*, México: Trillas.

Cantoral, R. y Montiel, G. (2001). *Funciones: visualización y pensamiento matemático*, México: Prentice Hall.

Cantoral, R.; Reyes-Gasperini, D. y Montiel, G. (2014). Socioepistemología, matemáticas y realidad, *Revista Latinoamericana de Etnomatemática, 7 (3),* 91-116.

Cordero, F. (2006). La institucionalización del conocimiento matemático y el rediseño del dME, En G. Martínez Sierra (Ed), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 19*, 824-830. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Duval, R. (1999). Semiosis y pensamiento humano. Registros semióticos y aprendizajes intelectuales (M. Vega Restrepo, Trad.) (Título original: Semiosis et Penseé Humaine. Registres sémiotiques et apprentissages intellectuels), Colombia: Instituto de Educación y Pedagogía, Universidad del Valle.

Fripp, A. y Varela, C. (2012). Pensar geométricamente, *4º Congreso Uruguayo de Educación Matemática. (4)* (pp. 11-16). Montevideo: CUREM.

Godino, J. y Ruíz, F. (2002). *Geometría y didáctica para maestros. Manual para el estudiante*. Recuperado el 10 de diciembre de 2019 de: https://www.ugr.es/~jgodino/edumat-maestros/manual/4_Geometria.pdf

Martínez, A., & Ríos, F. (2006). Los Conceptos de Conocimiento, Epistemología y Paradigma, como Base Diferencial en la Orientación Metodológica del Trabajo de Grado. *Cinta de Moebio, (25),* 1-13.

Morones, R. (2002). La simetría izquierda-derecha en la naturaleza*, Ciencia UANL, vol. 5* 173-179.

Olkhovaia, E. (2005). La unidad del mundo y la simetría, Franciscanum. *Revista de las Ciencias del Espíritu, 140, (1)*75-84.

Reséndiz, E.; Correa, S.; Salazar, M. y Sánchez, G. (2016). *Diseño de objetivos de aprendizaje de matemáticas básicas (Geometría)*, México: Pearon Educación.

Rey, J. (2004). Dificultades generadas por los prototipos geométricos, cuando los modelos ayudan, pero no tanto", En Premisa, 6 (22), 7-32.

Reyes-Gasperini, D. y Cantoral, R. (2014). Socioepistemología y empoderamiento: la profesionalización docente desde la problematización del saber matemático, *Boletim de Educação Matemática, 28 (48),* pp. 360-382.

Rojas, O., Cruz, M., Escalona, M., Estrada, M., y Sánchez, J., (2012). El principio heurístico de la visualización y su carácter rector para la enseñanza aprendizaje de la geometría del espacio En R. Flores (Ed), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 25*, 44-54. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Scaglia, S. y Moriena, S. (2005). Prototipos y estereotipos en geometría, *Educación Matemática, 17 (3),* 105-120.

Soto, E. (2011). *Diccionario Ilustrado de Conceptos Matemáticos*. Consultado el 20 de noviembre de 2018 de: http://www.aprendematematicas.org.mx/.

Uribe, S., Cárdenas, O. y Becerra, J. (2014). Teselaciones para niños: una estrategia para el desarrollo del pensamiento geométrico y espacial de los niños, *Educación Matemática, 26(2),* pp. 135-160.