

CRITERIOS PARA LA IDONEIDAD EPISTÉMICA Y COGNITIVA DEL CONCEPTO FUNCIÓN REAL EN LAS INGENIERÍAS

CRITERIA FOR THE EPISTEMICAL AND COGNITIVE SUITABILITY OF THE REAL FUNCTION CONCEPT IN ENGINEERING

Seydel Bueno García, Olga Lidia Pérez González, Nancy Montes de Oca Recio
Universidad de Camagüey (Cuba).
seydel.bueno@reduc.edu.cu, olga.perez@reduc.edu.cu, nancy.montes@reduc.edu.cu

Resumen

Existen insuficiencias con las prácticas matemáticas de los significados de las funciones reales de una variable real. El objetivo en la investigación es identificar los significados institucionales pretendidos con criterios de mejora para la enseñanza del concepto de función que podemos encontrar en los planes y programas de estudio de matemáticas, así como en los libros de texto básicos de las carreras de ingeniería. La metodología de análisis didáctico aplicada muestra, con la ayuda de algunas herramientas teóricas del Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemática, una síntesis de los principales significados institucionales, que son intencionados en planes de estudio, programas de la asignatura y libros de texto para el proceso de enseñanza-aprendizaje del concepto función, desde su significación global. Los criterios de mejora que se brindan para la enseñanza y el aprendizaje de este concepto en la educación superior, permiten el desarrollo del uso de las nuevas tecnologías.

Palabras clave: concepto de función, significados institucionales, criterios de mejora

Abstract

There are inadequacies in the mathematical practice of meanings of the real functions of a real variable. This research is aimed at identifying the institutional meanings intended, with improvement criteria, to teach the concept of function. Such meanings are included in mathematics curriculum and syllabuses, as well as in the basic textbooks of engineering degrees. The applied didactic-analysis methodology shows, supported by some tools of the Onto-semiotic approach to mathematical cognition and instruction, a summary of the main institutional meanings included in the curricula, subject syllabuses and textbooks for the teaching learning process of the concept of function, from its global signification. The improvement criteria, provided for the teaching and learning of this concept in higher education, allows developing the use of new technologies.

Key words: concept of function, institutional meanings, improvement criteria

■ Introducción

Una aspiración en las carreras de ingeniería de la Universidad de Camagüey *Ignacio Agramonte Loynaz* es mejorar los indicadores globales de calidad del Ministerio de Educación Superior, reflejados en los objetivos de trabajo del curso 2016-2017 (colectivo de autores, 2014). Un reciente análisis cuantitativo-cualitativo del proceso de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas en nuestro departamento, demuestra que la calidad de los aprendizajes de los estudiantes no permite alcanzar tal propósito. En los informes de la asignatura Matemática I, donde se imparte el contenido básico de cálculo diferencial e integral de funciones reales de una variable real, ha quedado confirmado el siguiente problema: el trabajo con las funciones y su aprendizaje aún no responde a una sólida comprensión de su estructura y apropiación en todos los temas de matemáticas impartidos en las carreras de ingenierías, lo cual ha provocado el pobre desenvolvimiento en el trabajo con los conocimientos de función, tanto en los docentes como en los alumnos.

En la actualidad, el aprendizaje de las funciones reales en la educación superior constituye una dificultad aún no resuelta. El estudio hecho por Amaya, Pino-Fan & Medina (2016) revela la falta de comprensión del concepto función y su identificación; así se corrobora en otros estudios hechos por Godino, Bencomo, Font & Wilhelmi (2006), donde afirman que el conflicto epistémico más marcado con el concepto de función, y que impacta en la formación de ingenieros es el distanciamiento entre el reconocimiento del concepto a nivel escolar y su uso consciente en el ámbito social.

El aprendizaje del concepto de función está ligado a su componente semiótico, que se refiere al significado numérico, algebraico, geométrico y verbal, pero que también interviene en las prácticas de enseñanza influenciadas por documentos rectores; y estas, a su vez, configuran un significado institucional que es llevado de forma planificada a su enseñanza. Debido a la manera en que este significado institucional o pretendido del concepto es implementado, se hace necesario caracterizarlo, pues se refleja en las prácticas operatorias de nuestros alumnos que se forman como ingenieros.

El objetivo de nuestra investigación es identificar los significados institucionales (prácticas institucionales) pretendidos con criterios de mejora para la enseñanza del concepto de función que podemos encontrar en los planes y programas de estudio de matemáticas, así como en los libros de texto básicos de las carreras de ingeniería. Estas prácticas serán caracterizadas y analizadas a través del complemento didáctico-matemático del Enfoque Onto-Semiótico (EOS) del Conocimiento y la Instrucción Matemática (Godino & Batanero, 1994; Godino *et al.* 2007), la idoneidad didáctica (Godino, Font, Contreras & Wilhelmi, 2006) del proceso de enseñanza del concepto función real de una variable real, de manera que solo se tome la dimensión epistémica y los criterios dados por Pino-Fan, Castro, Godino & Font (2013), que se da en este proceso instructivo en la actualidad.

■ Aspectos teóricos y metodológicos

La enseñanza de las matemáticas en la formación de un ingeniero es aquella donde todo ingeniero considera representaciones técnicas y científicas en términos matemáticos, con los cuales refleja los rasgos cuantitativos de los fenómenos que estudia. De tal modo, el objetivo de esta disciplina es lograr que el ingeniero domine el aparato matemático que lo haga capaz de modelar y analizar los procesos técnicos, económicos, productivos y científicos, de manera que utilice en ello tanto métodos analíticos como aproximados, y use eficientemente las técnicas de cómputo. El diseño de diferentes planes y programas de estudio ha dedicado atención al concepto de función, pues ha sido caracterizado en la formación del ingeniero como conocimiento previo, invariante del conocimiento, conocimiento básico y línea directriz para el estudio de diferentes temas de matemáticas. Estos planes y programas conciben el uso del texto básico (Stewart, 2012), de donde partimos para realizar el análisis epistémico de cómo emerge y se desarrolla, el conocimiento del concepto de función y sus significados en la formación del ingeniero. Aunque también el proceso de su enseñanza y aprendizaje puede utilizar otros textos que complementan su

tratamiento. Lo cierto es que su contenido es una prioridad indispensable para cualquier proceso de enseñanza de las matemáticas.

■ Fundamentos epistémicos del enfoque Onto-Semiótico para la construcción del conocimiento matemático

Una visión amplia sobre el significado de función se tiene a partir de sus representaciones, cuando se define como correspondencia entre conjuntos, relación entre magnitudes variables, representación gráfica, expresión analítica, correspondencia arbitraria y la función a partir de la teoría de conjuntos (Amaya *et al.* 2016). El concepto de función como se entiende hoy se consolidó en 1837, con el matemático Gustav Dirichlet, aunque Gottfried Leibniz en 1673 ya había expresado algunas ideas al respecto en sus trabajos (Parra, 2015). En el proceso de enseñanza de las matemáticas, donde también tiene lugar la apropiación de sus contenidos por los estudiantes, los significados de tales contenidos son transmitidos a partir de enfoques, concepciones y estrategias asumidas desde la didáctica. La apropiación de los significados se consolida en la medida en que son usadas las definiciones, propiedades y los procedimientos que los involucran. Estos son mediados por registros semióticos que permiten evaluar las operaciones que son realizadas con los significados.

Para describir la operatividad del concepto de función a partir de sus significados en el proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, y su implicación en la formación de ingenieros, según lo planteado en (Bueno, Pérez, 2018) es necesario recurrir a enfoques que brinden una herramienta metodológica que contribuya a caracterizar y describir, como se pretende en las diferentes directrices curriculares que aparecen en planes, programas y libros de texto de la asignatura, al igual que la articulación entre tales conocimientos significativos. Por esto en la presente investigación adoptamos el modelo teórico conocido como Enfoque Onto-Semiótico (EOS) del Conocimiento y la Instrucción Matemática, desarrollado en diversos trabajos por Godino y colaboradores (Godino & Batanero, 1994; Godino *et al.*, 2007) para lograr el objetivo propuesto.

Dicho marco teórico incluye un modelo epistemológico y cognitivo de las matemáticas, sobre bases antropológicas y socioculturales; un modelo cognitivo sobre bases semióticas de índole pragmática, y un modelo instruccional coherente con los anteriores. Para nuestro análisis es importante la elección de este enfoque, pues consideramos que no solo posibilita describir aspectos del aprendizaje de los sujetos que aprenden, sino que permite explicar cuáles son los factores que inciden en las dificultades y establecer criterios para orientar la construcción y perfeccionamiento del conocimiento matemático en la enseñanza y el aprendizaje. Los elementos fundamentales de este enfoque que resultan novedosos para la didáctica de las matemáticas, y que sustentan nuestro propósito, son los componentes epistémicos y sus configuraciones. De este enfoque tomaremos en cuenta la noción de idoneidad epistémica (Pino-Fan *et al.*, 2013) que se refiere al grado de representatividad de los significados institucionales pretendidos (o implementados) respecto a un significado de referencia, que en nuestro caso es el significado matemático o global del concepto de función.

Utilizaremos los criterios para la idoneidad epistémica dados por Pino-Fan *et al.*, (2013), contextualizados en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas en la Universidad de Camagüey, debido al trabajo sistemático que se hace con la funciones en los temas de límite y continuidad, derivada y cálculo integral con funciones de una variable real, sin descuidar que la tendencia al perfeccionamiento de los planes de estudio es integrar el sistema de conocimientos y reducir el número de horas para tratar los temas del cálculo diferencial e integral. Estos fundamentos epistémicos nos permiten analizar y describir sistemáticamente los objetos matemáticos primarios y su relación con las actividades de aprendizaje a partir de su descriptor, como se propone:

Situaciones/problemas: propuesta de situaciones que generan conversiones y tratamientos de variadas formas de representación del concepto de función, uso de medios tecnológicos y aplicaciones del concepto.
Conceptos/definiciones: características esenciales y no esenciales, propiedades comunes y no comunes que se

analizan y expresan en el lenguaje matemático (verbal, gráfico, simbólico). Clasificaciones y relaciones conceptuales que se determinan. *Elementos de representación semiótica*: implementación de procesos y tipos de representaciones de la actividad matemática que se proponen. *Proposiciones/propiedades*: adecuación de las explicaciones, deducciones, enunciados, comprobaciones y demostraciones al nivel que se trata. *Procedimientos y argumentos*: empleo de reglas, principios, pasos y estrategias que se utilizan para el análisis de significados.

En nuestra concepción, estos objetos matemáticos son utilizados en instituciones y destinados a la resolución de problemas y preparación del conocimiento que antecede al resto de las temáticas del cálculo diferencial e integral. La sólida apropiación de los significados garantiza el desarrollo de la práctica matemática. Las prácticas institucionales que están asociadas al concepto de función se refieren a la implementación planificada y concatenada del contenido matemático, en la documentación normativa (planes de estudio, programas de asignatura y libros de texto, entre otros elementos) que predominan en los docentes de matemática para el desarrollo del tema. Las prácticas personales se observan en el desempeño operacional de los estudiantes durante la interacción con el contenido matemático. Estos objetos que intervienen en las prácticas matemáticas institucionales y personales sobre el concepto de función real de una variable real, son propuestos en los planes de estudio, programas y libros de texto básicos.

La metodología aplicada en esta investigación, dirigida a identificar los significados institucionales o prácticas institucionales que se pretenden sobre el concepto de función real de una variable real, tiene en cuenta tres momentos principales: 1) La determinación de un significado global de referencia para el concepto de función; 2) La determinación del significado pretendido para el concepto de función en los planes y programas de estudios, y en los libros de texto considerados básicos; y 3) La aplicación de los fundamentos o criterios de idoneidad epistémica precisados con anterioridad, para valorar dichos significados y brindar criterios sobre su mejora.

Determinación de un significado global de referencia para el concepto de función

Las representaciones matemáticas se entienden como herramientas (signos o gráficos) que hacen presentes los conceptos y procedimientos matemáticos, con las cuales los sujetos registran y comunican su conocimiento; esto es, las estructuras matemáticas adquieren significado para el sujeto mediante el trabajo con las representaciones, y de aquí surge parte de su interés didáctico. Entre las formas de representación más generales de los contenidos matemáticos estudiados en el nivel superior en las carreras de ingeniería, se distinguen dos familias de sistemas: las representaciones simbólicas y las gráficas. Las simbólicas son de carácter alfanumérico (es un término más general que incluye letras y números, así como la combinación de estos). Las gráficas incluyen las de tipo figurativo, de carácter analógico, y su sintaxis viene dada por reglas de composición y convenios de interpretación. Los registros semióticos incluyen ambos tipos de representaciones, al igual que en su aprendizaje se implementan e interactúan estas representaciones.

Las funciones son los objetos fundamentales con los que trata el cálculo diferencial e integral, donde sus representaciones tabular, verbal, gráfica y analítica también se pueden transformar y combinar para modelar matemáticamente fenómenos del mundo real. Las funciones siempre surgen cuando una cantidad depende de otra (Stewart, 2012), por tal motivo, su generalización se puede modelar cuando nos encontramos con conjuntos de variables ligadas entre sí.

Significados pretendidos para el concepto de función

La idoneidad epistémica, se refiere al grado de representatividad de los significados institucionales implementados (o previstos), respecto de un significado de referencia (Godino, Bencomo, Font & Wilhelmi, 2006). Por considerar que los criterios dados por Pino-Fan *et al.* (2013) en el análisis epistémico de la derivada son generales, los tomaremos en cuenta para el análisis de los significados pretendidos del concepto abordado, y realizaremos algunos

ajustes en ellos, debido a la evolución de las exigencias del proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en la actualidad.

I. Representatividad de los campos de problemas (CP) propuestos

Este criterio refleja las tareas (problemas) matemáticas que requieren de los objetos y significados matemáticos que promueven el aprendizaje de los significados definidos en el entorno del concepto de función. CP1: determinación de relación entre magnitudes. CP2: cálculo y estimación de valores funcionales. CP3: representación de funciones en situaciones intra-matemáticas. CP4: modelación de situaciones prácticas mediante funciones. CP5: representación de funciones en computadoras u otros dispositivos electrónicos.

II. Procesos de representación activos en el planteamiento y solución de las tareas

Este criterio se refiere a los distintos tipos de representaciones (lenguaje matemático) utilizados para referirse a los diferentes objetos matemáticos, así como los tratamientos y conversiones entre ellos, que tienen una alta significación en el desarrollo del concepto de función en la actualidad.

III. Representatividad de los elementos regulativos y argumentativos

En este criterio se toma en cuenta los elementos regulativos y argumentativos (definiciones, proposiciones, procedimientos y argumentos) relativos al concepto de función, que son mediados a través de elementos lingüísticos y que sirven para identificar con claridad los significados más usados por los docentes y estudiantes durante el estudio de este concepto.

IV. Conocimientos previos a la profundización del concepto de función

Este criterio se refiere a las formas previas de definir, analizar y representar el concepto de función, permitiendo a la vez caracterizar la comprensión y resolución de ejercicios y problemas, como forma de actividad matemática, sobre los tipos de representaciones y los procedimientos para la conversión y el tratamiento entre estos.

V. Representatividad de los significados institucionales pretendidos (o implementados) respecto al significado global de referencia

En este criterio se concibe los contenidos matemáticos que aparecen en los planes de estudio, programas de las asignaturas y los significados que se les da en los textos básicos como los significados institucionales pretendidos de referencia. Los significados que se pretenden con el concepto de función pueden ilustrarse a partir de la configuración epistémica dada por Godino, Bencomo, Font & Wilhelmi (2006), la cual considera objetos matemáticos primarios alrededor de las representaciones semióticas del concepto de función, que pueden ser descritos y caracterizados.

Para comparar los significados globales o de referencias del concepto de función con los pretendidos en las carreras de ingeniería, utilizamos la noción de configuración epistémica dada por Godino, Bencomo, Font & Wilhelmi (2006), representada en la figura 1. Esta configuración muestra los principales componentes epistémicos históricos, así como sus contenidos y relaciones, que se utilizan en la construcción del concepto función real de una variable real, en el proceso de enseñanza y aprendizaje. Solo que se reconfigura, debido al nivel de enseñanza y a la introducción del uso de computadoras en la actualidad, que permiten la introducción y el uso del lenguaje, procedimientos, entre otros elementos computacionales. Esta noción permite identificar y describir sistemáticamente los objetos matemáticos primarios (problemas, elementos lingüísticos, conceptos, proposiciones, procedimientos y argumentos) puestos en juego durante la solución de las prácticas matemáticas propuestas.

■ Configuraciones epistémicas

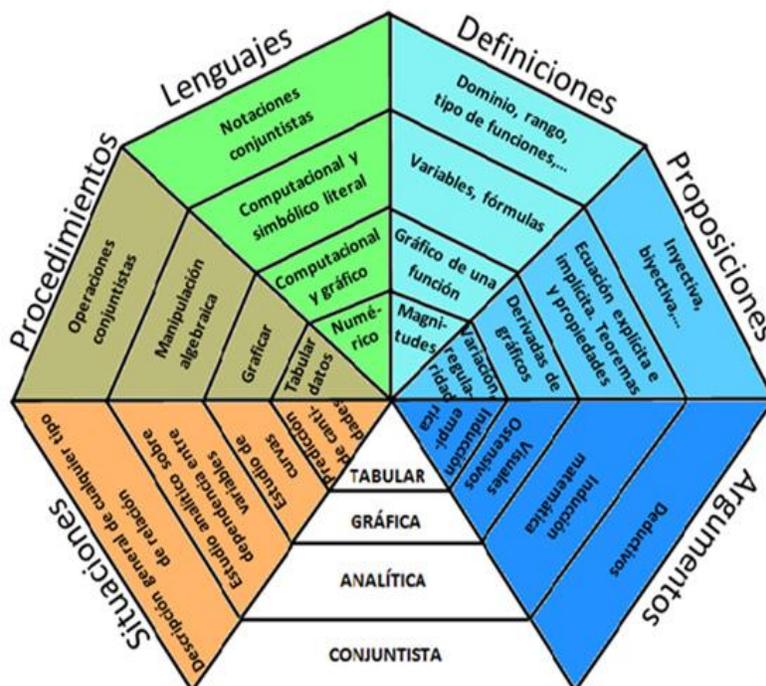


Figura 1. Representación de la configuración epistémica históricamente utilizada por textos y programas de matemáticas en la enseñanza del concepto de función real de una variable real.

■ Aplicación de los criterios de idoneidad epistémica y criterios de mejora que resultan

Se abordan cuatro tipos de *situaciones/problemas*: las que plantean alguna relación conjuntistas entre magnitudes de naturaleza geométrica, física, etc., que buscan establecer correspondencias; las que ejemplifican, sistematizan y profundizan el uso de las representaciones y definiciones de las funciones, sus propiedades generales y particulares y la aplicación de modelos analíticos; que analizan gráficas (curvas) de mayor composición y comportamientos diversos para determinar propiedades generales y particulares, al igual que a la interpretación de magnitudes y las que utilizan principalmente tablas para realizar análisis e interpretaciones, como también conversiones entre las representaciones funcionales.

Se introducen conceptos/definiciones relacionados con las clasificaciones de funciones polinómicas, racionales, algebraicas, trascendentes, y el concepto de función por parte y/o por secciones. Entre las propiedades/proposiciones que se introducen podemos señalar las propiedades sobre las operaciones con funciones, las transformaciones sobre las funciones, nociones del comportamiento asintótico de una función, el estudio de propiedades particulares y generales de funciones no elementales, por ejemplo, su forma gráfica. Son ampliadas las propiedades y proposiciones sobre las funciones compuestas, en cuanto a su determinación y su análisis. Dentro de las características se encuentra la extensión del estudio del concepto de función, la variedad de representaciones funcionales, donde algunas son sistematizadas, se profundizan y otras son ampliadas, como es el caso de las funciones por partes. La propuesta de tareas con el uso de asistentes matemáticos es mucho más eficaz para la comprensión de los conceptos y propiedades, y la realización de tareas con tales elementos cognitivos del aprendizaje.

La tabla 1 muestra el tipo de conversión que se activa (significados pretendidos y personales) entre las representaciones de una función, en la resolución de los campos de problemas que hemos considerado en este libro

de texto, tanto en el planteamiento del problema, como en su solución, así vamos a interpretar la información que nos brinda. Por ejemplo, la celda marcada con una x indica que el libro de texto considera problemas que requieren la conversión entre los distintos registros semióticos que se mencionan en la tabla por cada campo de problemas. Si un problema plantea representar gráficamente una función algebraica dada su ecuación, es un problema que requiere la conversión de analítica a gráfica. Las celdas que poseen color indican que el proceso de conversión no se aplica por una razón lógica, es la misma representación y solo se ejecuta un tratamiento. Las celdas sin selección ni color nos muestran pocos ejemplos y tareas dirigidas en este sentido.

Tabla 1. Tabla de doble entrada con las principales conversiones que se realizan en la solución de problemas donde emergen significados que se pretenden del concepto función.

Campo de problemas (CP)	Representaciones para $f(x)$						
	Emergentes Previas	Verbal	Gráfica	Analítica	Tabular	Secciones	Computacional
CP1: Determinación de relación entre magnitudes (establecer reglas o leyes).	Verbal		x	x	x		
	Gráfica			x	x	x	
	Analítica		x		x		x
	Tabular		x	x		x	x
	Secciones		x		x		x
	Computacional		x	x	x		
CP2: Cálculo y estimación de valores funcionales.	Verbal	x					
	Gráfica		x				
	Analítica			x			
	Tabular				x		
	Secciones					x	
	Computacional						x
CP3: Representación de funciones en situaciones intramatemáticas.	Verbal		x	x			
	Gráfica			x	x	x	
	Analítica		x		x		x
	Tabular		x	x			x
	Secciones		x				x
	Computacional		x	x	x	x	
CP4: Modelación de situaciones prácticas mediante funciones.	Verbal		x	x			
	Gráfica			x	x	x	
	Analítica		x		x		x
	Tabular		x	x			x
	Secciones		x				x
	Computacional		x	x	x	x	
CP5: Representación de funciones en máquinas computadoras u otros dispositivos electrónicos.	Verbal						
	Gráfica						
	Analítica		x		x		x
	Tabular		x				x
	Secciones						x
	Computacional						

Persiste aún en la enseñanza del concepto de función la prevalencia de significados algebraicos y gráficos, tales como el ejemplo 1:

Encuentre el dominio y grafique la siguiente función.

$$g(x) = \frac{3x + |x|}{x}$$

Ejemplo 1. Conversión de la analítica a la gráfica.

Sin embargo, se incrementa el trabajo con funciones numéricas y verbales en problemas prácticos que apoyan la comprensión y significatividad del concepto, mediante un cubrimiento más completo de sus formas de representación, tal como se presenta en los problemas presentados en los ejemplos 2 y 3.

Un contenedor rectangular sin tapa tiene un volumen de 10m³. La longitud de su base es dos veces su ancho. El material para la base cuesta \$10 por metro cuadrado, y el material para los lados cuesta \$6 por metro cuadrado. Expresé el costo de los materiales, como una función del ancho de la base.

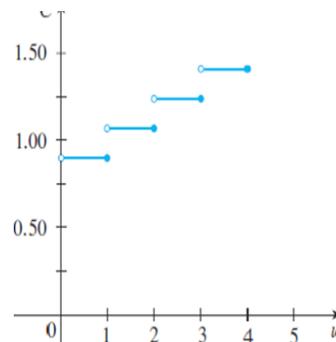
$$C(w) = 20w^2 + \frac{180}{w}$$

Ejemplo 2. Conversión de la verbal a la analítica, requiere de un tratamiento más complejo que la identificación de una ley por simple inspección.

Se tiene que C(w) es el costo de enviar por correo paquetes con peso w. Representa mediante una función por secciones a C(w) a partir de la tabla dada y luego la gráfica de esta función C(w).

w (onzas)	C(w) (dólares)
0 < w ≤ 1	0.88
1 < w ≤ 2	1.05
2 < w ≤ 3	1.22
3 < w ≤ 4	1.39
4 < w ≤ 5	1.56
⋮	⋮
⋮	⋮

$$C(w) = \begin{cases} 0.88 & \text{si } 0 < w \leq 1 \\ 1.05 & \text{si } 1 < w \leq 2 \\ 1.22 & \text{si } 2 < w \leq 3 \\ 1.39 & \text{si } 3 < w \leq 4 \\ \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots \end{cases}$$



Ejemplo 3. Conversión de la representación tabular a secciones y luego a gráfica.

En este sentido, es necesario que tales significados sean sistematizados durante la actividad matemática y la práctica-profesional que se realiza vinculada con el concepto.

- Criterio 1: La inserción de múltiples significados del concepto función en la instrucción facilita y complementa el diseño de actividades matemáticas vinculadas con la profesión. De acuerdo con lo planteado por Pino-Fan, Guzmán, Font & Duval (2017), la representación semiótica que se moviliza en cada contexto (algebraico, gráfico, numérico) es amplia, pues son incorporados gráficos, ecuaciones, tablas y elementos lingüísticos, entre otros elementos. Para esto, los procedimientos, métodos, estrategias, etc., que se dirijan al tratamiento deben ser generales, de manera que lo particular de cada representación pueda ser relacionado con lo esencial del concepto.
- Criterio 2: La conversión de registros semióticos en el trabajo con funciones es considerada un procedimiento heurístico esencial para el entendimiento y la solución de tareas y ejercicios, como forma de resolver problemas.

- Criterio 3: En el trabajo con funciones la conversión y el tratamiento es el componente esencial para la comprensión y la resolución de ejercicios. El análisis de propiedades de las funciones en la enseñanza se realiza fundamentalmente sobre la base de distinguir propiedades generales y particulares en sus más diversas formas de representación. Esto implica que debe procurarse mediante herramientas didácticas que permiten la racionalidad del pensamiento matemático, tales como la interpretación representacional del concepto y sus propiedades.
- Criterio 4: El análisis funcional como actividad fundamental del trabajo con funciones requiere del uso racional de acciones de didácticas, las cuales pueden ser: la descripción, la interpretación, la variación de condiciones, la modificación, etc., que conlleven a la determinación de propiedades.

Para abordar las prácticas operativas fueron objeto de evaluación los ejercicios tratados por cada campo de problemas en los alumnos que cursan las carreras de ingeniería industrial, mecánica y ciencias alimentarias, que conforman una muestra de 128 estudiantes. El propósito de la evaluación en cada uno de estos problemas consistió en valorar la obtención de la conversión y la ejecución del tratamiento, de manera que se tenga en cuenta que son dos procesos paralelos y verticales que ejecuta el sujeto que aprende cuando se enfrenta a los problemas que hemos descrito. De manera general, pudimos determinar que los resultados de los problemas no son favorables cuando se centran en la obtención de registros de forma gráfica y analítica a partir de otros, pues solo 48% de los estudiantes logra resultados satisfactorios en este sentido. Sin embargo, la motivación por realizar tareas de este tipo mejora, pues constituye algo novedoso en el conocimiento de las funciones para el quehacer del ingeniero. Los mejores resultados, 62%, se obtienen cuando los alumnos realizan tareas donde interactúa el registro analítico con el gráfico, o viceversa.

De manera global, en este análisis sobre las prácticas operativas de los estudiantes se manifiesta que los algoritmos utilizados en el tratamiento son usados de forma eficiente, pero después de que el profesor ofrece niveles de ayuda, con baja efectividad para el desarrollo cognitivo del estudiante. Por tal motivo, es necesario que en las tareas que realicen los alumnos evidencien el trabajo eficiente con los componentes epistémicos, sobre sus interpretaciones y justificaciones en el conocimiento de las funciones reales de una variable real.

■ Conclusiones

Hemos presentado un análisis didáctico de los principales significados epistémicos que se pretenden en los planes y programas de estudio, al igual que en libros de texto, para la enseñanza de las matemáticas en las ingenierías. Los significados epistémicos que están presentes de manera frecuente en el trabajo con funciones son los 6 expresados en la tabla 1, aunque existen otros significados como los diagramas de flechas y de máquinas, que son solamente ilustrativos para comprender el concepto de función. Se presentaron algunos resultados en el orden cognitivo, que desarrollan los estudiantes. Como aspecto importante a tener en cuenta desde la perspectiva de nuestro análisis, está que los registros semióticos asociados al concepto de función articulan con el objeto y con los diferentes tipos de problemas; además de que profundizan el trabajo en la conversión y el tratamiento entre variadas formas de representaciones.

En resumen, tenemos que la enseñanza y el aprendizaje del concepto de función en las ingenierías, los docentes y alumnos encuentran un aumento de los registros semióticos sobre la representatividad del concepto, incluido de forma ascendente el computacional, así como su complejidad. Los procesos de conversión y tratamiento entre representaciones están reflejados por campos de problemas. Las clasificaciones, procedimientos de solución, habilidades, proposiciones, entre otros elementos, conforman el significado epistémico idóneo para realizar tareas de aprendizaje.

■ Referencias bibliográficas

- Amaya, T. R., Pino-Fan, L. R. & Medina, A. (2016). Evaluación del conocimiento de futuros profesores de matemáticas sobre las transformaciones de las representaciones de una función. *Educación Matemática*, 28(3), 111-144.
- Bueno, S. & Pérez, O. (2018). Prácticas actuales de la idoneidad epistémica y cognitiva del concepto función real de una variable real en carreras de ingeniería. *Revista Educación Matemática*, 30(2), 202-231.
- Colectivo de autores. (2014). *Objetivos de trabajo de la organización para el año 2016*. La Habana: Ministerio de Educación Superior de Cuba.
- Godino, J. D. & Batanero, C. (1994). Significado institucional y personal de los objetos matemáticos. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 14(3), 325-355.
- Godino, J. D., Batanero, C. & Font, V. (2007). *Un Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemática*. Recuperado de <http://funes.uniandes.edu.co/558/>
- Godino, J., Bencomo, D., Font V. & Wilhelmi, M. (2006). Análisis y valoración de la idoneidad didáctica de procesos de estudio de las matemáticas. *Paradigma*, XXVII (2), 221-252.
- Godino, J., Font, V., Contreras, A. & Wilhelmi, M. (2006). Una visión de la didáctica francesa desde el Enfoque Ontosemiótico de la Cognición e Instrucción Matemática. *Revista Latinoamérica de Investigación en Matemática Educativa*, 9(1), 117-150.
- Parra, Y. (2015). *Significados pretendidos por el currículo de matemáticas chileno sobre la noción de función* (Tesis de maestría, inédita). Universidad de Los Lagos. Chile.
- Pino-Fan, L., Castro, W., Godino, J. & Font, V. (2013). Idoneidad epistémica del significado de la derivada en el currículo de bachillerato. *Paradigma*, XXXIV (2), 123-150.
- Pino-Fan, L., Guzmán, I., Font, V. & Duval, R. (2017). *Analysis of the Underlying Cognitive Activity in the Resolution of a Task on Derivability of the Absolute-Value Function: Two Theoretical Perspectives*. PNA, 11(2), 97-124.
- Stewart, J. (2012). *Cálculo de una variable. Trascendentes tempranas*. (7ª edición). México: Cengage Learning.