

SENTIDOS DEL CERO Y LA NEGATIVIDAD EN LA ENSEÑANZA DE LOS NÚMEROS ENTEROS

SENSES OF ZERO AND NEGATIVITY IN THE TEACHING OF WHOLE NUMBERS

Celia E. Villagra, Marcela E. Chorolque
Universidad Nacional de Salta (Argentina).
villagrachelia@gmail.com, marcelachorolque@gmail.com

Resumen

En este documento se analiza la producción e intervención de los docentes que asisten a un taller sobre enseñanza de números enteros, donde, además, se busca que valoren la gestión del error y acuerden algunos puntos de partida para la apropiación de las nociones vinculadas a los números enteros, enfatizando la importancia del cero y de la negatividad. La mayoría de los docentes pueden anticipar los errores que cometen sus estudiantes en la realización de diferentes tareas vinculadas a los números enteros, pero inicialmente los atribuyen a obstáculos propios de los estudiantes. También se pone de manifiesto que los docentes desconocen la naturaleza dual del cero, los distintos sentidos del signo menos y los significados de la sustracción. Se concluye que la mayoría de los errores de los estudiantes son reforzados por la metodología utilizada por el docente o por las decisiones que toma sobre cómo enseñar los números enteros.

Palabras clave: números enteros, cero, negatividad, obstáculos

Abstract

This report makes an analysis on the production and intervention of teachers who are involved in a workshop about the teaching of whole numbers; where it is also wanted that teachers assess the error handling, and agree on some starting points for the acquisition of notions linked to whole numbers, making emphasis on the importance of zero and negativity. Most teachers are able to anticipate errors students make when doing different tasks related to whole numbers, but they initially attribute them to students' own barriers. It is also evidenced that students do not know dual zero nature, the different senses of minus sign and subtraction meanings. The findings from this analysis suggest that most of the students' errors are caused by the methodology used by the teacher or by the decisions the teacher makes on how to teach whole numbers.

Key words: whole numbers, zero, negativity, barriers

■ Introducción

Por lo general la enseñanza de los números enteros suele desarrollarse en el último año de la escuela primaria o en el primer año del nivel secundario. Los docentes de los niveles mencionados manifiestan que sus estudiantes, tienen dificultades al operar con números enteros, particularmente con la adición y sustracción, trasladándose luego a la operatoria con las expresiones algebraicas. Es así que los estudiantes, cometen diferentes tipos de errores cuando operan con los números enteros. Becerra, Buitrago, Calderón, Gómez, Cañadas y Gómez (2012) caracterizan los errores y dificultades considerando además las dificultades en el uso del lenguaje matemático en situaciones aditivas, para dar sentido a un resultado negativo y en la interpretación en la sustracción de los números enteros.

El alto nivel de formación que tengan los docentes no asegura una apropiación científica del concepto de número entero, provocando que su enseñanza se remita, en la mayoría de los casos, a la ejemplificación y no hacia la profundización de los conceptos científicos que ayudan a comprender qué son los números enteros, asintiendo que los conceptos intuitivos circulen al interior de las aulas.

Maca Díaz (2016) recomienda replantear la apropiación que sobre el número entero tienen los docentes, con el fin de direccionar el sentido que les dan los estudiantes a los números enteros. Para ello el docente de matemática tiene que generar estrategias y acciones que lleven al estudiante a relacionar los aprendizajes y conocimientos previos con los que están por conseguir. “En esto recae la función de los objetos de aprendizaje (recursos y materiales didácticos) que el mediador debe emplear para generar los escenarios que lleven a poner a sus estudiantes en situación de aprender” (Villarruel, 2009, p. 2). Por lo tanto, se hace necesario que el docente tenga una formación continua y reflexione sobre cuestiones que interesan a la Didáctica de la Matemática en cuanto a la apropiación de objetos matemáticos por parte del estudiante, en este caso de los números enteros.

Como ya se mencionó, los estudiantes tienen dificultades tanto operativas como conceptuales en la adquisición de la estructura numérica de los enteros, que se ponen de manifiesto en la aparición de distintos errores cuando resuelven actividades en las que utilizan este conjunto numérico. Por lo general, estos errores, son producto de los obstáculos vinculados con la comprensión de los números negativos y del cero.

En este documento, más adelante, se precisará la concepción de error y obstáculo que se sustenta. Gallardo, Santos y Hernández (2010) consideran que para poder comprender el cero es necesario que se identifiquen los distintos “sentidos del uso” de este número: nulo, implícito, total, aritmético, algebraico. En cuanto a la negatividad es importante la comprensión de la triple naturaleza del signo menos (binaria, unaria y el simétrico de un número).

En este trabajo se pretende reflexionar sobre las concepciones que tienen los docentes sobre los errores frecuentes cuando los estudiantes ordenan, operan o resuelven ecuaciones con números enteros y a partir de ellos analizar y discutir sobre los obstáculos que los provocan. De esta manera se busca acordar algunos puntos de partida para la apropiación de las nociones vinculadas a los números enteros, enfatizando la importancia del cero y de la negatividad, como elementos fundamentales en la construcción del concepto de número signado que también influye sobre la capacidad en el manejo del lenguaje algebraico. Se tiene en cuenta el marco conceptual sobre la importancia del cero y la negatividad en cuanto a su emergencia, para proporcionar herramientas que permitan comprender la naturaleza de los errores frecuentes de los estudiantes, pudiendo anticiparlos y tomar decisiones sobre cómo gestionarlos.

Propósito y alcance

El propósito es intervenir en la reflexión docente sobre los errores frecuentes de los estudiantes en la operatoria con números enteros, identificando los obstáculos de enseñanza y epistemológicos que los provocan, particularmente en situaciones donde se pone de manifiesto la negatividad y el uso del cero. También se pretende que los profesores

valoren los aportes de las investigaciones en Didáctica de la Matemática, en cuanto a la negatividad y el cero, al uso de los modelos de neutralización y de desplazamiento y a la inclusión de los juegos para propiciar aprendizajes.

■ Marco conceptual de la propuesta de taller

El cero y los negativos

Desde los inicios históricos de la Matemática se pueden encontrar reflexiones acerca de las dificultades que permiten generar los números enteros para su comprensión y total aceptación. Este campo numérico sufrió el reconocimiento y la legitimación durante un largo proceso, requiriendo de mucho tiempo para que los matemáticos reconocieran, aceptaran y legitimaran los números negativos, por lo que no debería resultar tan extraño que los estudiantes presenten dificultades a la hora de construir conocimientos en torno a ellos. Es decir que las dificultades señaladas tanto operativas como conceptuales que tienen los estudiantes, en la adquisición de las estructuras numéricas de los enteros, son producto de los obstáculos vinculados con la comprensión de los números negativos, que han sido descritos detalladamente desde hace mucho tiempo, en particular por Glaeser (1981) y Cid (2000).

Janvier (1985), Bell (1986), Vergnaud (1989), Gallardo (1994) y Cid (2002) han realizado investigaciones sobre las dificultades de los estudiantes con los números enteros y han concluido que las más importantes son las relacionadas con la conceptualización de los números negativos en el ámbito aritmético y algebraico.

Como lo afirma Schubring (1988) se asume que los números negativos no constituyen un concepto aislado en la matemática, pero pusieron en tela de juicio los pilares de la filosofía por cuanto no necesariamente podrían entenderse como una cantidad ya que ninguna realidad del mundo exterior podía asignársele a estos números.

Gallardo y Hernández (2007) realizan una revisión histórica de la emergencia del cero y la negatividad y se encontraron con diversos obstáculos y discrepancias en la génesis y uso de estos. Las autoras señalan:

Es así que el cero y los negativos surgen del manejo de oposición o conceptos como el del vacío o el de no ser, que son fundamentales para la construcción de la negatividad, pero que, sin embargo, se mantiene oculta hasta muchos siglos después. Resulta fascinante la búsqueda del porqué el cero y los negativos fueron muy difíciles de aceptar. (Gallardo y Hernández, 2007, p 3)

Gallardo y Hernández consideran que para poder comprender el cero es necesario que se identifiquen los distintos “sentidos del uso” de este número:

- Cero nulo, “no tiene valor, es la nada, el vacío”;
- Cero implícito, no aparece escrito, es verbal y utilizado durante el proceso de resolución de la tarea;
- Cero total, está formado por parejas de opuestos ($+n$, $-n$ con $n \in \mathbb{N}$);
- Cero aritmético, surge como el resultado de una operación aritmética;
- Cero origen es localizado sobre la recta numérica o bien como un elemento que separa los números positivos de los negativos;
- Cero algebraico, emerge como resultado de una operación algebraica o bien es solución de una ecuación.

Modelos para la enseñanza de los números enteros

Cid y Bolea (2010) señalan que por lo general en la escuela se introducen los números positivos y negativos a través de los enteros y en un registro aritmético, justificando la necesidad y el significado de los mismos a través del uso de diversos modelos concretos. A continuación, se presentan algunos modelos propuestos por diversos

investigadores con los que se puede trabajar el tema de números enteros en el aula, y que también fueron clasificados por Gallardo y Hernández (2007).

Modelos concretos de neutralización

Cid y Bolea (2010) refieren que en un modelo de neutralización los números enteros expresan medidas de cantidades de magnitud que pueden tener el mismo sentido o sentidos opuestos y los signos predicativos indican el sentido de la cantidad de magnitud, mientras que los signos operativos binarios y unarios se relacionan con las acciones de añadir, quitar, reunir o separar fichas o bloques de dos colores, bolas que se ensartan en dos varillas distintas, deudas y haberes o pérdidas y ganancias, ejércitos que se enfrentan cuerpo a cuerpo; cargas eléctricas positivas o negativas, sumandos y sustraendos, acciones de añadir o quitar u operadores aditivos; juegos o clasificaciones con puntuaciones positivas o negativas, clavijas con tres posiciones, estimaciones con errores por exceso o defecto; seres u objetos que pueden estar valorados positiva o negativamente, entrando o saliendo de un recinto, cubitos que calientan o enfrían un líquido; balones de helio y sacos de arena que elevan o bajan un globo, fichas de dominó en las que los puntos situados en una de las partes de la ficha neutralizan a los situados en la otra parte.

En la práctica docente, es frecuente el uso del modelo de pérdidas y ganancias con el que los estudiantes pueden obtener el conocimiento de adición, ya que lo relacionan fácilmente con su vida cotidiana, saben cuánto ganan o cuanto pierden. También los docentes suelen utilizar este modelo con lo que Freudenthal (1991) denomina nivel referencial porque para resolver adiciones y sustracciones en otros contextos, el estudiante siempre recurre al contexto referencial de pérdidas y ganancias.

Hernández y Gallardo (2006) realizaron una investigación con un grupo de estudiantes de segundo año de la escuela secundaria utilizando el modelo concreto “modelo de bloques”, para la introducción de las operaciones con números con signo en aritmética y álgebra elemental. Concluyeron que los modelos de enseñanza no son paradigmáticos, debido no sólo a las contradicciones intrínsecas surgidas de su propia construcción, sino también, ineludiblemente, a las tendencias cognitivas de los estudiantes. Pero también señalaron que una de las alumnas que participó en la investigación poseía una concepción dual del cero, generalizada a partir del modelo de bloque y que otro de los estudiantes concibió las adiciones y sustracciones con números signados, pero siempre atados a la representación del modelo.

Modelos de desplazamiento

En un modelo de desplazamiento los números enteros expresan desplazamientos o posiciones; los signos predicativos, el sentido del desplazamiento o la situación de la posición a uno u otro lado de la posición origen; los signos operativos binarios, la composición de desplazamientos o aplicación de un desplazamiento a una posición para obtener otra posición; y los unarios, mantenimiento o cambio del sentido de desplazamiento.

Personajes u objetos que avanzan o retroceden a lo largo de un camino, peldaños que se suben o bajan, termómetros o escalas de diversas magnitudes, ascensores que bajan a los garajes o suben a los pisos; globos que se elevan o que se hunden por debajo del nivel del mar, variaciones en el nivel de agua de un depósito; desplazamientos representados por vectores unidireccionales que actúan sobre posiciones (puntos) de la recta numérica.

Bell (1986) muestra que hay niños que no saben dibujar correctamente la escala de un termómetro, ya que cuando tienen que calcular la diferencia entre dos temperaturas, realizan siempre una resta independientemente de los signos de las mismas, que no interpretan adecuadamente la expresión “más abajo” o “más arriba”.

Obstáculos

La noción de obstáculo epistemológico fue acuñada por Bachelard (1987) utilizada para identificar las dificultades que las personas tienen al aprender algo nuevo. Posteriormente Brousseau (1989) se refiere a los obstáculos epistemológicos y didácticos o de enseñanza. Éstos últimos son los que surgen del modo como se enseñan los conocimientos de acuerdo a un modelo educativo específico. Los obstáculos epistemológicos son dificultades intrínsecas de los conocimientos. Es posible encontrarlos en la historia de los conceptos mismos, lo cual no implica que se habrán de reproducir en situación escolar necesariamente las mismas condiciones históricas en que se han superado.

El primer artículo encontrado sobre obstáculos de aprendizaje en cuanto a los números enteros fue en Glaeser (1981). De acuerdo con este artículo publicado, los obstáculos son los siguientes:

- Falta de aptitud para manipular cantidades negativas aisladas. La primera referencia que se tiene de este obstáculo es en la obra de Diofanto donde se hace mención de la dificultad de operar con la diferencia y con el producto de dos números negativos. Fue entonces cuando enuncia la regla de los signos, pero sigue sin aceptar las operaciones con números negativos separados y mucho menos las soluciones negativas a un problema.
- Dificultad para dar sentido a las cantidades negativas aisladas. Durante toda la historia de las matemáticas han surgido diversos estudiosos que encuentran soluciones negativas de ecuaciones, pero no aceptan que sea así, justificándose en que el problema está mal redactado o bien que simplemente es una solución inconsistente.
- Dificultad para unificar la recta real. Se concebía a los números enteros como algo real pero que se oponía a los números positivos, ello *favorecía al modelo de dos semirrectas opuestas funcionando separadamente*.
- La ambigüedad de los dos ceros. Durante el trayecto de los números negativos existieron diversos cuestionamientos acerca de la existencia del cero y de cantidades inferiores a éste. Las diversas opiniones llegaban muchas veces a la misma conclusión “*no puede existir menos que nada*”.
- El estancamiento en el estadio de las operaciones concretas. Solamente si se superaban los obstáculos ya mencionados se podría seguir con operaciones concretas.

La gestión del error

Es necesario que los docentes tomen conciencia que analizar los errores de sus estudiantes y comprender la causa de los mismos les permite poder anticiparlos y de esta manera gestionarlos a través de las interacciones, buscando que el estudiante aprenda a partir del trabajo con los propios errores. La gestión del error por parte del docente se debe realizar a través de preguntas oportunas al alumno, para ello es importante tener una comprensión de la naturaleza del mismo. Los errores forman parte del proceso de aprendizaje y como lo señalan Brousseau, Davis y Werner (1986), los alumnos piensan frecuentemente acerca de sus tareas matemáticas de un modo distinto a lo que esperan los docentes, sin embargo, esa vía de pensamiento tiene una lógica que puede resultar inesperadamente útil en algunos casos y por ello se elogia. Otras veces este modo personal de pensamiento omite algo que es esencial y entonces lo denominamos error. Pero en ambos casos siempre hay una lógica que es necesario que el docente conozca y analice. Particularmente en el aprendizaje de números enteros, los mismos docentes suelen mencionar errores muy frecuentes de sus estudiantes cuando operan con números enteros, sin embargo, muchas veces sólo se atribuyen los mismos a obstáculos epistemológicos y no a decisiones didácticas de los propios docentes.

Se considera que es necesario realizar un tratamiento didáctico del error y en ese sentido se adhiere a Martinand (1989) que expresa "el error no es un defecto del pensamiento sino el testigo inevitable de un proceso de búsqueda" y también remarca que el error debe estar al servicio del alumno. Desde este enfoque habría que prever los errores y considerarlos vitales en el proceso de aprendizaje.

Los juegos en la enseñanza de números enteros

Para predisponer al aprendizaje es importante que los estudiantes estén motivados a partir de la generación de un clima adecuado en la clase, inclusión de material didáctico, el uso de problemas interesantes y también por la incorporación de actividades lúdicas.

Se entiende por juego a toda actividad cuya finalidad es lograr la diversión y el entretenimiento de quien la desarrolla. Según Piaget (1985) “los juegos ayudan a construir una amplia red de dispositivos que permiten al niño la asimilación total de la realidad, incorporándola para revivirla, dominarla, comprenderla y compensarla”. Es importante que el juego tenga un alto contenido matemático que los estudiantes deben comprender para llegar a ser buenos jugadores, a través del juego se pueden crear ambientes que inciten a pensar de forma matemática.

Chamoso, Duran, García, Martín y Sánchez (2004) caracteriza a los juegos como actividades atractivas que los estudiantes fácilmente aceptan, logrando interesarlos y desarrollar el espíritu competitivo. Además, el juego estimula el desarrollo social de los estudiantes, favoreciendo las relaciones con otras personas, la expresión, la empatía, la cooperación y el trabajo en equipo, la aceptación y seguimiento de unas normas, la discusión de ideas, y el reconocimiento de los éxitos de los demás y comprensión de los propios fallos.

Particularmente interesa incluir juegos como recursos didácticos donde se consideren la neutralización y el desplazamiento. Se busca construir el sentido dual del cero, a través de la neutralización donde se hace hincapié en el cero total y de los desplazamientos donde se manifiesta el cero nulo.

■ Metodología del taller: trabajo con los profesores

En este trabajo se analiza la producción de los docentes del nivel secundario y formadores de formadores sobre las actividades de un taller que se realiza en el marco de la Relme 33. Se tiene en cuenta la realización de las actividades del mencionado taller y las intervenciones de los asistentes durante la puesta en común de las mismas.

En el Taller se genera un espacio para reflexionar sobre los errores que pueden cometer los estudiantes cuando resuelven tareas vinculadas con el orden, comparación y la operatoria básica con los números enteros. Interesa que además de reconocerlos, los docentes reflexionen sobre la naturaleza de los mismos y los asocien a algún tipo de obstáculo.

Se abordan los obstáculos epistemológicos poniendo de manifiesto la emergencia de la negatividad y del cero. Por eso en el desarrollo conceptual se hace hincapié en los diferentes sentidos del cero y en la triple naturaleza del signo menos.

También se hace referencia a los obstáculos de enseñanza, particularmente a aquellos ligados a la elección del docente en cuanto al modelo que utiliza para enseñar números enteros. Se procura que los asistentes experimenten con algunos modelos concretos, pudiendo reconocer ventajas y desventajas de la implementación de estos. Se presenta el modelo de bloques como lo denominaron Hernández y Gallardo, que tiene su versión simplificada con el uso de fichas de diferentes colores, brindando posibilidad de que experimenten con las mismas mientras resuelven problemas. Se genera un espacio de reflexión para la valoración del error como fuente de aprendizaje para los estudiantes y se habilita un espacio para la discusión de estrategias que posibiliten una apropiada gestión del mismo por parte del docente.

El taller se realiza en dos encuentros de una hora y media cada uno y las actividades proporcionadas a los docentes son las siguientes:

Primer encuentro

1. En grupo se analizan actividades con números enteros, destinadas a alumnos del ciclo básico de la escuela secundaria. Además, se identifican errores frecuentes de los estudiantes cuando resuelven las mismas.
2. Se realiza una puesta en común propiciando el intercambio entre los grupos.
3. Se promueve el debate entre los coordinadores sobre la naturaleza de los errores y realizan aportes utilizando diapositivas.
4. Se realiza el desarrollo conceptual acerca de los distintos significados del signo menos y del cero.

Segundo encuentro

1. En grupo, los docentes caracterizan las actividades de iniciación que suelen utilizar para el conjunto de los números enteros y/o su operatoria.
2. Se realiza una puesta en común con aportes de los coordinadores en cuanto a modelos implícitos en dichas actividades de iniciación.
3. Se presentan los diferentes modelos de enseñanza de números enteros.
4. Los docentes utilizan los modelos de bloques (gráfico y concreto) para resolver actividades destinadas a alumnos del secundario. Analizan ventajas y obstáculos sobre el uso de los mismos.
5. Se Manipulan los juegos: “la escoba del cero”, “el juego de la oca”, “dominó de operaciones con números enteros”.

Las actividades que analizan los docentes fueron diseñadas teniendo en cuenta los tipos de tareas sobre números enteros, que con mayor frecuencia se utilizan en primer año de la escuela secundaria. Se proponen tres actividades destinadas a estudiantes de primer año del nivel secundario:

1. Realiza las siguiente sumas y restas (puedes utilizar la recta numérica)
 - a) $10 - (-5) =$
 - b) $(-3) - (-6) =$
 - c) $(-2) + (+7) =$
 - d) $4 + (-5) =$
 - e) $2 + 0 =$
2. Contesta las preguntas
 - a) En América, el punto más alto es la montaña Aconcagua, situada en Argentina, que se encuentra a 6.962 metros sobre el nivel del mar. Mientras que el punto más bajo se encuentra en el Valle de la Muerte, en Estados Unidos, una depresión situada a 86 m bajo el nivel del mar. ¿Cuál es la diferencia de altura entre el Monte Everest y la montaña Aconcagua?
 - b) ¿Qué lugar está más cerca del nivel del mar, el Mar Muerto o el Valle de la Muerte? ¿Cuántos metros?
3. Si el número n está comprendido entre -15 y -10, indica cuáles de las siguientes expresiones son verdaderas, justifica la respuesta:
 - a. $-n$ es mayor o igual que 10
 - b. n es positivo
 - c. El siguiente de n está entre -16 y -11
 - d. El anterior de n puede ser -14

Figura 1. Actividades para analizar

Fuente: elaboración propia

También se retoman algunas intervenciones y reflexiones interesantes de la puesta en común de las actividades mencionadas.

■ Resultados

Los docentes identifican la mayoría de los errores frecuentes de los estudiantes:

- Uso incorrecto de la regla multiplicativa de los signos en las adiciones y sustracciones de enteros. La expresión de un docente al respecto fue: “cuando están sumando dos números de igual signo, por ejemplo, dos números negativos, dicen menos por menos es más y colocan signo más al resultado”.
- Resuelven las adiciones o sustracciones ignorando el signo unario del número o aplicando regla de multiplicación. Algunos docentes expresaron: “no miran algunos signos por ejemplo en $(-3) - (-6)$ no tienen en cuenta el signo menos del seis y entonces el resultado es -9 ”; “En $(-2) + (+7)$ dicen menos por más menos y el resultado será negativo”.
- Resuelven los problemas de enunciado verbal sin expresar los signos de cada número priorizando el signo de la operación. Un docente manifiesta “...van a hacer una resta y no le asignarán el signo menos a la depresión, por ejemplo 6962-86”
- Para ordenar los números sólo prestan atención al valor absoluto del número y no al signo del número. Un docente dice “en el problema dado como es un contexto real, se lo imaginan y se dan cuenta quien está más cerca del cero, pero si fuera un contexto matemático o inclusive de temperaturas no miran el signo”.
- Asumen que $-n$ es un número negativo y que n es un número positivo. Un profesor acota “el signo del número es el signo de la letra”.

Las intervenciones de los docentes asistentes al taller evidencian que no reconocen que la sustracción puede tener distintos significados ya que ellos mismos manifiestan que en general asocian la operación con una diferencia. Además, un grupo reducido de docentes desconoce la regla que para restar enteros se debe sumar al minuendo el opuesto del sustraendo. Para ellos se debe hacer supresión de paréntesis teniendo en cuenta el signo que precede al mismo o utilizar la regla de la multiplicación y posteriormente aplicar las reglas de la adición de enteros.

Respecto a cómo introducen el conjunto de los números enteros, la mayoría reconoce que lo presentan en el contexto de la vida cotidiana, por lo general en situaciones de deudas, de nivel del mar, del tiempo antes y después de Cristo. Ninguno de los docentes presentes se refiere a la necesidad de dar solución a la resta de números naturales. Ninguno utiliza material concreto.

Al analizar la naturaleza de los errores que pueden cometer los estudiantes, en general los atribuyen a que los estudiantes confunden las reglas de los signos de las operaciones o también a que no diferencian los signos de los números del de la operación que interviene. También expresan que los alumnos siguen intentando aplicar las reglas que gobiernan las operaciones con los números naturales.

Cuando se les presenta la doble naturaleza del cero (todo y nada) los docentes expresan que desconocen la dualidad del cero.

La mayoría conoce dos sentidos del signo menos, como sustracción (binaria) y cómo signo del número (unaria), pero no como opuesto o simétrico. También se reflexiona sobre el hecho de que usualmente se presentan los números negativos dentro del conjunto de los enteros, hecho que refuerza en los estudiantes, la idea de que cualquier número negativo es entero.

Cuando se trabaja con los bloques (modelo de neutralización), los docentes lo hacen sin dificultad y consideran que es un buen recurso sobre todo para contribuir al cálculo mental cuando los números enteros son de diferentes signos. Ante la inclusión de juegos los profesores aceptan el uso de estos para motivar a los estudiantes, pero reconociendo las ventajas y desventajas de los mismos.

De las intervenciones de la puesta en común entre los profesores asistentes y los coordinadores del taller se acuerda que se hace necesario hacer hincapié en que los estudiantes reconozcan la triple naturaleza del signo menos y la dualidad del cero utilizando actividades que permitan diferenciarlos. También incorporar problemas de sustracción con distintos sentidos de la operación sustracción y generando espacios para discutir con los estudiantes sobre esos sentidos. Respecto a la supresión de paréntesis hay consenso respecto a que se debe evitar el uso de la regla de signos de la multiplicación.

■ Conclusiones

Durante el taller los docentes identifican muchos de los errores que cometen los estudiantes. Por lo general atribuyen la naturaleza de los mismos a dificultades propias de los estudiantes. Tienen una visión muy reducida sobre los obstáculos que los provocan y por lo general no asumen la gran influencia que ejercen sobre tales errores. Por ejemplo, el hecho de que muchos de los profesores promueven que para sumar o restar números enteros se supriman los paréntesis utilizando la regla de los signos de la multiplicación o que algunos desconozcan que la sustracción puede transformarse en una adición utilizando el opuesto del sustraendo. La mayoría de los errores de los estudiantes son reforzados por la metodología utilizada por el docente o por las decisiones que toma sobre cómo enseñar los números enteros.

También se pone de manifiesto que los docentes desconocen la naturaleza dual del cero, los distintos sentidos del signo menos y los significados de la sustracción. Lo que hace ver la necesidad de que en la formación inicial los docentes aborden marcos teóricos sobre la enseñanza y aprendizaje de diferentes objetos matemáticos, en particular de los números enteros.

Se considera que una de las dificultades de la enseñanza de los números enteros es que se subestima el tema considerando que todos los docentes tienen dominio sobre el mismo, pero en realidad tienen dominio sobre la operatoria y reglas prácticas, no así sobre la construcción del sentido de los enteros, particularmente del cero y los números negativos.

Se cree que estos resultados están relacionados con dos aspectos fundamentales: el primero es la formación inicial de los docentes ya que no se aborda o es insuficiente el tratamiento de la enseñanza y aprendizaje de los números enteros y de los obstáculos que provocan los errores que evidencian los estudiantes del nivel secundario. El segundo aspecto es la falta de momentos de reflexión sobre el cómo se enseña. No existen instancias para la reflexión del cómo y para qué se pretende enseñar desde una lógica diferente a la convencional. Los docentes, al momento de seleccionar los contenidos, hacen una opción por lo que conocen y dominan, además que sus concepciones y creencias sobre cómo y qué enseñar están sujetas a sus propias experiencias cuando aprendieron los números enteros en la escuela secundaria y seguramente que también en la formación como docentes. Es importante llegar a acuerdos a la luz de investigaciones en didáctica de la matemática sobre obstáculos en la enseñanza y aprendizaje de objetos matemáticos particulares.

Respecto al uso de modelos concretos, los docentes reconocieron la utilidad de los mismos para motivar e interesar al estudiantado y concluyeron que cada uno de los recursos que se utilicen tiene ventajas y desventajas, pero que hay que animarse a utilizarlos sobre todo valorando los logros de aprendizaje que posibilitan.

■ Referencias bibliográficas

- Bachelard, G. (1987). *La formación del espíritu científico*. México: Editorial Siglo XXI.
- Becerra, O.; Buitrago, M.; Calderón, S.; Gómez, R.; Cañadas, María C.; Gómez, P. (2012). *Adición y sustracción de números enteros*. En Gómez, Pedro (Ed.), *Diseño, implementación y evaluación de unidades didácticas matemáticas en MAD 1* (pp. 19-75). Bogotá: Universidad de los Andes.
- Bell, A. (1986). *Enseñanza por diagnóstico: algunos problemas sobre los números enteros*. *Enseñanza de las Ciencias*, 4(3), 199-208
- Brousseau, G. (1989). *Les obstacles épistémologiques et la didactique des mathématiques*. En N. Bednarz y C. Garnier (Eds), *Construction des savoirs*, (pp. 41-63). hal-00516581v1
- Brousseau, G.; Davis, R. B. y Werner, T. (1986). *Observing Students at Work*. En B. Christiansen, A. G. Howson, y M. Otte (Eds). *Perspectives on Mathematics Education*. Dordrecht, D. Reidel Publishing Co.
- Chamoso, J., Durán, J., García Sánchez, J., Martín, J. y Sánchez, M. (2004) *Análisis y experimentación de juegos como instrumentos para enseñar matemática*. Recuperado de <http://www.redined.mec.es/oai/indexg.php?registro=00720073000328>
- Cid, E. (2000). Obstáculos epistemológicos en la enseñanza de los números negativos. XIV Jornadas del Seminario Interuniversitario de Investigación en Didáctica de las Matemáticas, Cangas, España. Recuperado de <http://www.ugr.es/~jgodino/siidm/boletin10.htm>
- Cid, E. (2002). Los modelos concretos en la enseñanza de los números negativos. *Actas de las X Jornadas para el Aprendizaje y Enseñanza de las Matemáticas*, (2), 529-542
- Cid, E. & Bolea, P. (2010). *Diseño de un modelo epistemológico de referencia para introducir los números negativos en un entorno algebraico*. En A. Bronner, M. Larguier, M. Artaud, M. Bosch, Y. Chevallard, G. Cirade & C. Ladage (Eds.), *Diffuser les mathématiques (et les autres savoirs) comme outils de connaissance et d'action*. Montpellier, (pp 576-582). Francia: Université de Montpellier
- Freudenthal, H. (1991). *Revisiting Mathematics Education*. China Lectures. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers
- Gallardo, A (1994). *El estatus de los números negativos en la resolución de ecuaciones algebraicas*. Tesis doctoral. CINVESTAV. México.
- Gallardo, A. & Hernandez, A (2007) *Emergencia de los números enteros*. Recuperado de <http://www.matedu.cinvestav.mx/~maestriaedu/docs/asig5/Agallardo.pdf>
- Gallardo, A., Santos, N., Hernández, J. A. (2010). *La aparición simultánea de los sentidos de uso de los números negativos y el cero en alumnos de secundaria. Un estudio de caso*. En M.M. Moreno, A. Estrada, J. Carrillo, & T.A. Sierra, (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIV* (pp. 303-314). Lleida: SEIEM. Recuperado de <http://www.matedu.cinvestav.mx/~maestriaedu/docs/asig5/Agallardo.pdf>
- Glaeser, G. (1981). *Épistémologie des nombres relatifs*. *Recherches en didactique des mathématiques*, 2(3), 303-346.
- Hernández, A. y Gallardo, A. (2006). La extensión del dominio numérico de los naturales a los enteros vía los modelos concretos de bloques. *Educación Matemática*, 18(1), 73-97.
- Janvier, C (1985). *Comparison of models aimed at teaching signed integers*. En: 9 Conference of the international group for the Psychology of Mathematics
- Maca Díaz, A. (2016). *La enseñanza de los números enteros, un asunto sin resolver en las aulas*. Plumilla Educativa N° 17.
- Martinand, J. (1989). *Pratiques de reference, transposition didactique et savoirs professionnels en sciences et techniques*. *Les Sciences de l'Éducation*, 2, pp. 23-29.
- Piaget, J. (1985): *Seis estudios de Psicología*. Origen/Planeta, México.
- Schubring, G. (1988), 'Discussions épistémologiques sur le statut des nombres négatifs et leur représentation dans les manuels allemands et français de mathématiques entre 1795 et 1845'. En C. Laborde (ed.), *Actes du premier Colloque Franco-allemand de 14 Didactique des Mathématiques et de l'Informatique*, (137-145). Grenoble. La Pensée Sauvage Editions.

- Vergnaud, G. (1989), *L'obstacle des nombres négatifs et l'introduction à l'algèbre*. En N. Bednarz y C. Garnier (eds.), *Construction des savoirs. Obstacles et conflits*, (pp. 76-86). Quebec. Les Editions Agence d'ARC.
- Villarruel, F. (2009). *La práctica Educativa del maestro mediador*. *Revista Iberoamericana de Educación*, 50(3), 1-12. Recuperado de <http://www.rieoei.org/deloslectores/2957Fuentes.pdf>