

FACTORIZACIÓN DE EXPRESIONES ALGEBRAICAS

FACTORIZATION OF ALGEBRAIC EXPRESSIONS

Nelsy Rocío González Gutiérrez, Laura Ximena Casas Rodríguez
Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia (Colombia).
nelsy.gonzalez@uptc.edu.co, laura.casas@uptc.edu.co

Resumen

En las últimas décadas se ha fortalecido el estudio sobre didáctica de la matemática surgiendo consigo grandes teorías enfocadas a mejorar la enseñanza y el aprendizaje de esta rama. Desde esta perspectiva, surge esta investigación, cuyo propósito es identificar e implementar en el aula de clase diferentes representaciones semióticas presentes en la factorización de expresiones algebraicas. Se busca analizar empleando la metodología de tipo cualitativo los procesos cognitivos de tratamiento y conversión que realizan estudiantes de grado octavo. De igual manera, describir el papel que juega la comunicación como mediador en el paso de un registro de representación a otro.

Palabras clave: expresiones algebraicas, representaciones semióticas, formación, tratamiento, conversión

Abstract

The study of mathematics didactics has been improved during the last decades what has led to the emergence of great theories focused on enhancing mathematics teaching and learning. From this prospect, this research arises. It is aimed at identifying and implementing different semiotic representations, present in the factorization of algebraic expressions, in the classroom. By using a qualitative-type methodology, it seeks to analyze the treatment-and-conversion cognitive processes carried out by eight-grade students. Likewise, it seeks to describe the role of communication as a mediator in the conversion of a representation register into another

Key words: algebraic expressions, semiotic representations, formation, treatment, conversion

■ Introducción

Esta investigación surge en el 2019 como resultado del estudio de la Maestría en Educación Matemática de la Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia, y la participación en el grupo colaborativo de investigación Somos Maestr@s. Además, de la constante reflexión sobre la labor docente y pedagógica, y las dificultades de los estudiantes de grado octavo al enfrentarse al álgebra elemental, las cogniciones, ideas, herencias y diferentes puntos de vista que se tiene de ésta, teniendo en cuenta lo propuesto por Mason, Graham, Pimm & Gower (1999) al considerar que “el álgebra no se puede considerar ni enseñarse como un paquete separado que se inicia una vez que se haya terminado una serie de contenidos que (supuestamente) corresponden al programa de aritmética o geometría” (p.3).

A lo largo del escrito se describen aspectos importantes respecto a la teoría de las representaciones semióticas propuesta por el filósofo y psicólogo en formación Raymond Duval, quien ha centrado gran parte de sus estudios e investigaciones en la indagación interdisciplinaria de Didáctica de la Matemática y Ciencias Cognitivas. Por otro lado, se abordan temas relacionados con el álgebra elemental específicamente la factorización de expresiones algebraicas.

■ Marco teórico

La investigación se apoya en el estudio de representaciones semióticas presentes en la enseñanza y aprendizaje de un objeto matemático; y dado que “las representaciones semióticas incluido cualquier lenguaje, aparecen como herramientas para producir conocimiento” (Duval & Sáenz, 2016, p. 62), aquí esta teoría será fundamental. Así pues, las representaciones juegan un papel fundamental en el proceso de comunicación y en la construcción de objetos matemáticos (Duval, 2004).

Para Tamayo (2006) “desde la perspectiva de las ciencias cognitivas las representaciones son consideradas como cualquier noción, signo o conjunto de símbolos que significan algo del mundo exterior o de nuestro mundo interior” (p.39). En otras palabras, las representaciones pueden ser estimadas como la imagen que aparezca en el cerebro y la proyección de esta plasmada en el diario vivir. Estos conjuntos de signos o símbolos pueden ser internos o externos, los diagramas, las figuras, los dibujos son representaciones externas con propósitos comunicativos y se emplean consciente o inconscientemente en la cotidianidad, estas representaciones externas son también conocidas como representaciones semióticas (Tamayo, 2006).

Ahora bien, es importante destacar que las representaciones semióticas juegan un papel importante en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Las representaciones permiten el acceso a los objetos matemáticos, esto se fundamenta en que la actividad matemática se realiza necesariamente en un contexto de representación (Duval & Sáenz, 2006). De ahí, se resalta la importancia de emplear las representaciones semióticas con el objetivo de lograr un aprendizaje con mayor significado para los estudiantes.

En el desarrollo de la actividad cognitiva del estudiante, se emplean distintos registros de representación aparte del lenguaje natural y los símbolos. Las transformaciones del registro de representación que se realizan son el *tratamiento* y la *conversión*. Así pues, se hace referencia al tratamiento como “la transformación de una representación inicial en otra representación terminal, respecto a una cuestión, un problema o una necesidad” (Duval, 1999, p.42). Es decir, al hablar de tratamiento, la transformación produce otra representación dentro del mismo registro y al realizar la conversión “la transformación de la representación de un objeto, de una situación o de una información dada de un registro, es una representación del mismo objeto o de la misma información en otro registro” (Duval, 1999, p.44). En efecto, la conversión es el cambio de registro sin cambiar el objeto.

Por otra parte, es importante destacar que el álgebra no puede considerarse como un proceso aparte o separado de los conocimientos presentes en la aritmética o la geometría, sino que ésta involucra los pensamientos numérico y métrico respectivamente, concluyendo en una formación conjunta. Mason *et al* (1999) destacan que la parte formal del álgebra es indiscutible, que la construcción del pensamiento algebraico tiene lugar a lo largo de un proceso paralelo y continuo dentro de un trabajo de actividades aritméticas y geométricas.

Por otra parte, la clase de matemáticas desde generaciones anteriores ha sido designada como difícil y aburridora, por tal razón el profesor tiene la tarea de cambiar ese paradigma (Mason *et al*, 1999). Por su parte Jiménez, Suárez & Galindo (2010) hacen referencia a que “convertir la clase de matemáticas en algo significativo es, sin lugar a dudas, uno de los grandes desafíos de los profesores y de los investigadores en educación matemática” (p.177). De ahí, que la interacción con los estudiantes es parte fundamental del proceso comunicativo e investigativo que se debe generar en el aula de clase.

De lo anterior, se destaca que la comunicación es indispensable para entablar lazos de afinidad con las personas y también se hace necesaria en la orientación de un conocimiento matemático. Ahora bien, se deben tener en cuenta las prácticas culturales, el contexto, y en sí la actividad que realiza la comunidad en general para captar lo que se quiere transmitir. Esta idea se sustenta con la afirmación que realizan Jiménez, Suárez & Galindo (2010) ya que “La influencia del contexto está relacionada con el ambiente de trabajo escolar y social, la organización y el funcionamiento de la escuela, los recursos existentes y las expectativas de los padres y la comunidad” (p.177).

La comunicación es considerada como un proceso de interacción social, en esta, los consensos, el diálogo o los debates siempre están presentes, según Ponte *et al* (1997, citado por Jiménez, Suárez & Galindo, 2010), la comunicación se refiere a la interacción entre los diversos sujetos que hay en una clase, empleando un lenguaje propio, que es una mezcla del lenguaje cotidiano y del matemático. (p.180).

De ahí, que cuando hay interacción comunicativa y existen buenos comunicadores, “la negociación de significados aparece de manera natural, la cual se refiere al modo en que los alumnos y el profesor exponen unos a otros su forma de entender los conceptos y los procesos matemáticos, los perfeccionan y los ajustan al conocimiento matemático” (Jiménez, Suárez & Galindo, 2010, p.179). Así mismo, cuando se presenta un buen ejercicio de comunicación, permite fortalecer la argumentación pues, “es preciso reflexionar sobre cómo contribuyen las estrategias de comunicación centradas en el trabajo en grupo y la heurística del solucionar-escucha en el desarrollo de la argumentación en clase de matemáticas” (Jiménez & Pineda, 2013, p.104).

■ Metodología

El desarrollo de este estudio se centró en el paradigma de la investigación de corte cualitativo, de tipo interpretativo y específicamente en la investigación en el aula. Partiendo del hecho que ésta es una acción efectuada por los profesores, que incluyen dentro de su trabajo diario una indagación acompañada de una auto reflexión crítica sobre su actividad dentro del aula de clase, con la finalidad de mejorar la enseñanza y generar en los estudiantes interacción con el aprendizaje.

El propósito de esta investigación es doble: la retroalimentación o información de retorno que el docente da al estudiante sobre su progreso en el aprendizaje, y las acciones de transformación de la metodología de la materia o área de conocimiento, para llegar con mayor efectividad a los estudiantes (Restrepo, 2009, p.108)

De esta manera, al realizar un proceso de reflexión sobre sí mismo, teniendo en cuenta actuaciones dentro del aula de clase y al analizar lo que se observa, sirve como instrumento para la toma de decisiones de realimentación y búsqueda del mejoramiento continuo en la labor pedagógica que se desempeña.

En esta investigación se elaboró un diseño que incluyera la teoría de representación semiótica, en especial los procesos cognitivos de tratamiento y conversión que los estudiantes construyen o deducen al realizar la factorización de expresiones algebraicas, así como la relación que existe entre las bases teóricas y lo que el estudiante quiere dar a conocer.

Inicialmente se parte de la temática que se desarrolla, que corresponde a la factorización de expresiones algebraicas relacionada con la teoría de representaciones semióticas. A partir de esta relación se realiza la secuencia didáctica y ésta a su vez está conformada por cuatro situaciones didácticas. A partir de la implementación de las situaciones didácticas se pretende realizar la concepción, experimentación, formulación y validación e institucionalización del conocimiento y finalmente evaluar los procesos cognitivos de tratamiento y conversión que realizan los estudiantes.

■ Resultados

Para hacer análisis de la información generada por parte de los estudiantes, al enfrentarse a una secuencia didáctica acerca de la factorización del trinomio cuadrado perfecto se hace necesario tener en cuenta las categorías de análisis previamente establecidas como lo son la correspondencia semántica, univocidad semántica terminal e igual orden de aprehensión, esto para determinar la congruencia o no congruencia de una representación y verificar que el proceso cognitivo de conversión sea adecuado. De igual manera, analizar las reglas de tratamiento, los procedimientos que se realizan al interior de cada registro de representación y el papel de la comunicación en cada proceso cognitivo, las tareas de producción y las tareas de comprensión.

A continuación, se describen los resultados obtenidos, al realizar explorar una situación contextualizada para la factorización trinomio cuadrado perfecto y efectuar la expansión del binomio elevado al cuadrado.

Ítem 1.

Representación de partida lenguaje natural – representación de llegada gráfica.

Una finca, cuya forma semeja una figura geométrica que tiene todos los lados congruentes, y se ha parcelado en cuatro partes, con el objetivo de sembrar tres productos agrícolas distintos. La parcela más grande y la más pequeña se pueden representar por medio cuadrados, y las otras dos parcelas se representan por medio de rectángulos congruentes.

Dibuje y describa las figuras geométricas que considere cumplen las condiciones y representen adecuadamente la figura de la finca.

Los estudiantes lograron generar representaciones mentales realizando el proceso de formación.

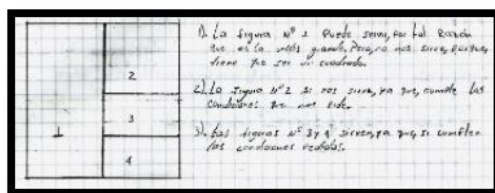


Figura 1. Construcción geométrica realizada por E13.

El estudiante E13, realiza la representación indicando que la figura que denominó 1, no cumple la condición, pero las figuras 2,3 y 4 sí. Por tanto, la representación producida tiene aceptabilidad respecto al registro inicial. El registro

es no congruente al no cumplir la correspondencia semántica, pues la representación de la parcela más grande no es cuadrada.

La representación anterior no cumple el criterio de transformabilidad, que consiste en mantener las características de lo que se quiere representar. El estudiante no tiene claridad al realizar la representación gráfica, hay ausencia de nociones básicas de geometría.

Por otro lado, algunos estudiantes logran concretar los procesos cognitivos de formación, conversión y tratamiento, enunciados a continuación.

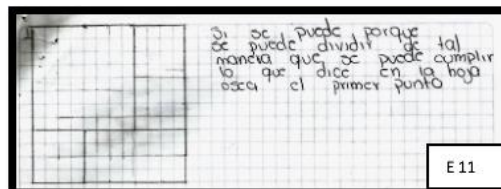


Figura 2: Construcción geométrica y descripción realizada por E11.

El estudiante E11 realiza el proceso de conversión, existe congruencia con el registro de salida. Al hacer el tratamiento, la interpretación textual de lo propuesto y del gráfico, la paráfrasis que realiza corresponde con el registro de llegada.

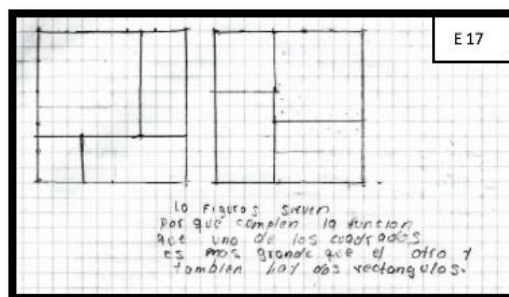


Figura 3: Construcción geométrica y descripción realizada por E17.

El estudiante E17, realiza dos representaciones congruentes a lo indicado en la representación del lenguaje natural. Además, la descripción textual coincide con la representación elaborada, realiza paráfrasis del registro inicial. Por lo tanto, se concluye que logra las tres actividades cognitivas.

Las representaciones son adecuadas, los estudiantes logran realizar la conversión de los enunciados del lenguaje natural a representación geométrica. De lo anterior, se puede afirmar que los estudiantes realizan transformaciones intencionales pues “toman al menos el tiempo de un control consiente y que se dirigen exclusivamente a los datos previamente observados” (Duval, 1999, p. 39). Además, los estudiantes forman representaciones semióticas al recurrir a signos de representación, para distinguir, incorporar y construir los registros finales.

Ítem 2.

Representación de partida lenguaje natural – representación de llegada gráfica.

La siembra de los productos se distribuye en las cuatro parcelas de la siguiente manera: El área que ocupa el cultivo de tomate, está dividida en dos partes iguales, estas son equivalentes al área que ocupa el cultivo de papa que

corresponde a la parcela más grande. Un cuarto del área de la parcela del cultivo de papa o la mitad de una parcela del cultivo de tomate, es equivalente al área de la parcela del cultivo de lulo, que es la parcela más pequeña y se representa por medio de una figura geométrica que tiene todos lados congruentes. Realice la representación gráfica teniendo en cuenta las características anteriores y realice la descripción de la representación que ha realizado de cada una de las parcelas.

Al realizar la descripción de cada una de las parcelas el estudiante muestra más claridad para elaborar la representación, tienen criterios para aceptar o rechazar el cambio de registro. Algunas gráficas construidas por los estudiantes son las siguientes:

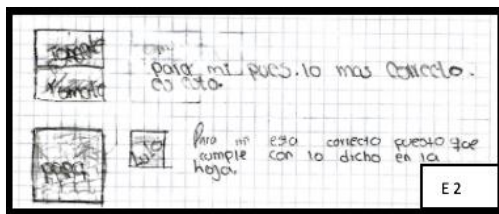


Figura 4: Representación geométrica realizada por E2.

El estudiante E2 realiza el proceso cognitivo de conversión, pues las condiciones del registro inicial se mantienen en el registro final, existe congruencia entre los registros de representación, el tratamiento interno al lenguaje natural, es decir, la paráfrasis es correcta, realiza comprensión y análisis de las representaciones geométricas.

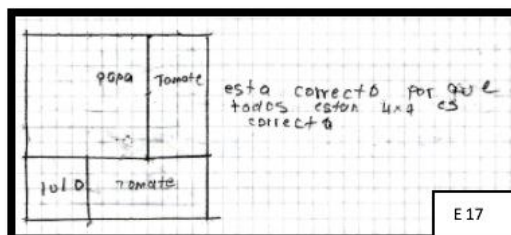


Figura 5: Representación geométrica realizada por E17.

El estudiante E17 realiza el proceso la conversión, el paso de registros es correcto. Además, la transformabilidad en la representación se conserva, realizando una descripción análoga empleando valores numéricos, el tratamiento interno corresponde a lo que visualiza en la representación geométrica.

Los procesos cognitivos de formación, tratamiento y conversión son evidentes, los estudiantes logran el paso de registros de representación. Respecto a la formación, ellos recurren a signos para revelar la visión o imagen mental que tiene del objeto, realizan la producción de lo percibido y relacionan las condiciones dadas. El tratamiento se evidencia al sustituir el registro de escritura de partida denominado paráfrasis al hacer la transformación interna del lenguaje natural y la anamorfosis al formar nuevas representaciones gráficas a partir del registro figural. Finalmente, se resalta que los estudiantes realizan las tareas de producción y comprensión, pues movilizan la formación de representaciones semióticas su tratamiento y conversión.

Ítem 3.

Reúnanse con un compañero, comparen las representaciones gráficas que cada uno realizó y argumenten por qué las consideran adecuadas, recuerde que todo debe quedar escrito. Luego, consoliden una sola representación, en la que describan las características de cada parcela.

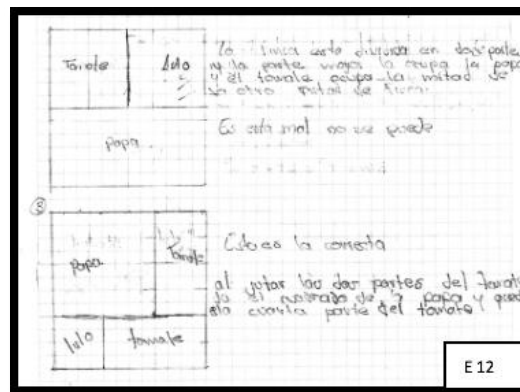


Figura 6: Consolidado representación gráfica y lenguaje natural realizada por E12.

El estudiante E12, luego de reunirse con su compañero detecta errores que presentó en la representación del punto anterior, describe la nueva representación y rechaza la anterior diciendo “no se puede”. Se evidencia que el estudiante supera el obstáculo que se presenta en la conversión y hay una producción discursiva de texto por parte del alumno. En este caso articular, el alumno realiza de manera acertada los procesos cognitivos de tratamiento y conversión luego de evidenciar los errores cometidos, replanteando la idea y construyendo las representaciones correctas, finalmente logra la movilización de los sistemas semióticos de representación.

El paso de un registro de representación a otro es sin duda “la actividad cognitiva menos espontánea y más difícil de adquirir por los alumnos” (Duval, 1999, p. 46). Se requiere de concentración para que el cambio de registro no genere obstáculos ya que las tareas de construcción de figuras solicitan concentración entre el registro discursivo, las características del registro, las representaciones mentales y el objeto. Se evidencia que los estudiantes al interactuar con su par logran generar la conversión al registro gráfico, aclaran las dudas, realizan conjeturas y finalmente realizan la representación gráfica incluyendo algunas descripciones y justificaciones de lo escrito realizando el proceso cognitivo de tratamiento.

Ítem 4.

Representación lenguaje natural - representación gráfica - representación algebraica.

Tenga en cuenta las siguientes afirmaciones para luego solucionar las preguntas.

- La medida de un lado de la parcela del cultivo de papa es (p). Además, la parcela está representada por un cuadrado.
 - Un lado del cuadrado donde está sembrado el lulo mide (l).
1. ¿Cuál es la expresión algebraica que representa el área de la parcela del cultivo de papa?
 2. ¿Cuál es la expresión que representa el valor del lado de la finca?
 3. ¿Cuál es la expresión algebraica que representa el área total de la finca?

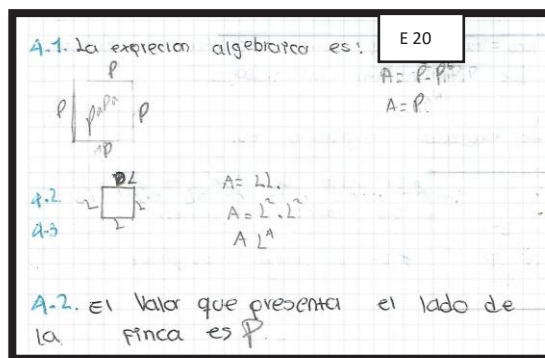


Figura 7: Conversión al registro algebraico realizada por E20.

El estudiante E20 realiza la representación gráfica que cumple las características dadas en el registro del lenguaje natural, es decir las representaciones son congruentes en la conversión al registro gráfico. En el registro algebraico presenta dificultad, pues no hay congruencia entre los registros, además de realizar cálculos no apropiados. El proceso de tratamiento que el estudiante realiza no es apropiado.

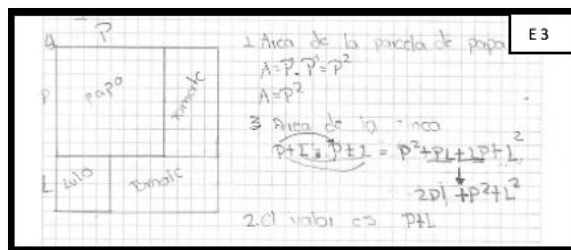


Figura 8: Conversión al registro algebraico realizada por E3

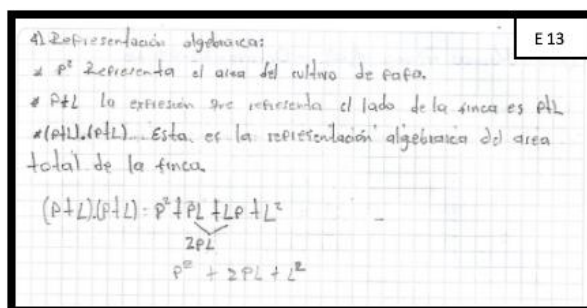


Figura 9: Conversión al registro algebraico realizado por E13

En estas últimas representaciones, los estudiantes E3 y E13 en conjunto realizan las tres actividades cognitivas posibles. Pasan del registro del lenguaje natural al geométrico y luego al algebraico. Realizan el tratamiento al interior del registro algebraico para lograr concluir el área total representada por el trinomio cuadrado perfecto, partiendo de nociones básicas de geometría. Finalmente, la formación es la primera que debe surgir en la mente del estudiante para realizar los diferentes registros de representación semiótica, logrando con ello la movilización de los registros.

Los estudiantes logran realizar y concretar los procesos cognitivos de formación, tratamiento y conversión. Al inicio se presenta cierto grado de dificultad, los estudiantes generan representaciones carentes de las características

iniciales, no interiorizan la información para hacer el transformabilidad de registros, al comparación y visualización con el compañero, el estudiante debe dar a conocer las razones por las cuales realizó la representación, justificar cada característica y respaldar con argumentos su idea, en ese momento ellos logran evidenciar los errores que han cometido, pero es a partir de ahí que generan nuevas ideas mentales que se representan por medio del registro gráfico y que son congruentes con el registro de salida, logrando acercarse a lo que se quiere que aprendan la factorización de trinomio cuadrado perfecto teniendo en cuenta el contexto, saberes previos y análisis e interpretación de situaciones. A partir de aplicar esta situación de enseñanza, se evidencia la movilización de registros de representación y la transformabilidad de los sistemas semióticos.

■ Conclusiones

Algunos estudiantes muestran temor y apatía con la ejecución de nuevas metodologías, pues siempre la clase se había tornado similar. Al realizar las secuencias de enseñanza los estudiantes sienten duda de escribir sus propias consideraciones y temen cometer errores. Luego de generar confianza en ellos se logra familiarizarse y concretar ideas, consideraciones y aportes muy importantes para el proceso investigativo.

Las representaciones semióticas son un instrumento fundamental para el desarrollo de actividades matemáticas, de esta manera, se pretende que los estudiantes por medio de diversos registros de representación consigan comprender, analizar y aprender temas que para ellos son confusos, complicados y abstractos como lo es el álgebra elemental para el grado octavo, lo anterior, concordando con lo escrito por Duval (1999) “toda actividad cognitiva humana, se basa en la complementariedad de estas dos representaciones” (p. 39), al hacer referencia a las transformaciones intencionales y cuasi-instantáneas que realizan los estudiantes cuando emplean diversas representaciones.

La interacción que existe entre el estudiante y su par es de gran ayuda, pues los estudiantes deben realizar la justificación de cada una de las representaciones construidas. Al realizar este ejercicio se debe evidenciar una coherencia entre las representaciones y la argumentación dada, de esta manera se logra evidenciar la existencia de algunos errores cometidos, pero de igual manera la enmienda inmediata de estos, consolidando representaciones acordes con las condiciones iniciales.

Los estudiantes desarrollan el tratamiento dentro de cada registro de representación, realizan transformaciones internas ya sea del registro gráfico o geométrico (anamorfosis) del lenguaje natural (paráfrasis) y del algebraico (cálculos con expresiones algebraicas).

La argumentación, la descripción y la socialización como parte del proceso comunicativo es destacable. Inicialmente los estudiantes no logran generar ni consolidar aportes coherentes con los registros, pero finalmente, se alcanzan aportes significativos en la consolidación de representaciones empleando el registro de lenguaje natural, destacando que en la expansión informacional que realizan algunos de ellos revelan la “movilidad simultánea de la red semántica de un lenguaje natural y los conocimientos pragmáticos del medio sociocultural” (Duval, 1999, p. 113).

■ Referencias bibliográficas

- D'Amore, B. (2006). Objetos, significados, representaciones semióticas y sentido. *RELIME Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, IX(1), 177-197.
- Duval, R. (2017). *Understanding the Mathematical Way of Thinking - The Register of Semiotic Representations*. (T. M. Campos, Ed.) Dunkerque, Francie: Proem.
- Duval, R., & Saénz, A. (2016). *Comprensión y aprendizaje en matemáticas : perspectivas semióticas seleccionadas*. Bogotá: Universidad Distrital Francisco José de Caldas.

- Duval, R. (2004). *Semiosis y pensamiento humano: Registros semióticos y aprendizajes intelectuales*. (Segunda ed.). (P. Lang, Ed., & M. Vega Restrepo, Trad.) Cali, Colombia: Universidad del Valle.
- Duval, R. (1999). *Semiosis y pensamiento humano. Registros semióticos y aprendizaje intelectual*. (M. V. Restrepo, Trad.) Santiago de Cali, Colombia: Artes Gráficas Univalle.
- Jiménez, A., Suárez, N., & Galindo, S. (2010). La comunicación: Eje en la clase de matemáticas. *Praxis & Saber*, *I*(2), 173-202.
- Mason, J., Graham, A., Pimm, D., & Gowar, N. (1999). *Rutas y raíces del y hacia el álgebra*. (L. Acebedo, Ed., & C. Agudelo Valderrama, Trad.) Tunja: UPTC.
- Restrepo, B. (2009). Investigación de aula: Formas y actores. *Revista educación y pedagogía*, *XXI*(53), 103 -112.
- Tamayo, O. (2006). Representaciones semióticas y la evolución conceptual en la enseñanza de las ciencias y las matemáticas. *Revista Educación y Pedagogía*, *XVIII*(45), 37-49.