

UNA METODOLOGÍA PARA TIPIFICAR ERRORES EN EL APRENDIZAJE DE LA MATEMÁTICA EN LA UNIVERSIDAD DE LAS CIENCIAS INFORMÁTICAS

A METHODOLOGY TO TYPIFY ERRORS IN MATHEMATICS LEARNING AT THE UNIVERSITY OF COMPUTER SCIENCE

Pedro Alvarez Barreras, María del Carmen Rivalta Valladares
Universidad de las Ciencias Informáticas. Universidad de la Habana(Cuba).
palvarez@uci.cu, maricarmen@matcom.uh.cu

Resumen

El presente trabajo constituye un acercamiento teórico práctico a los errores en el aprendizaje de las Matemáticas en la Universidad de las Ciencias Informáticas. En el mismo se propone una tipificación de errores y una metodología para ponerla en práctica, que se adecua al Proceso de Enseñanza Aprendizaje de la asignatura Matemática I. En este artículo se analizan diferentes conceptualizaciones y caracterizaciones de error, así como tipificaciones del mismo a partir de la fuente que lo origina, y de esta manera justificar la conceptualización y tipificación asumida. Se utilizan talleres como recurso de la investigación-acción participativa en los que se muestra como a través del intercambio colectivo de experiencias y saberes, los profesores implicados en el contexto del problema a resolver, fueron capaces de someter la propuesta de tipificación de errores y la metodología a una constatación empírica mediante un ejercicio real.

Palabras clave: tipificación, errores, aprendizaje, matemática

Abstract

The present work constitutes a practical-theoretical approach to the errors in Mathematics learning at the University of Computer Science. It proposes a typification of errors and a methodology to put it into practice; which is suitable to the teaching learning process of Mathematics I. In this article, different conceptualizations and characterizations of error are analyzed, as well as its typification from the source that originates it; and in this way, to justify the assumed conceptualization and typifications. Workshops are used as a resource for participatory action- research where it was possible to show how, through the collective exchange of experiences and knowledge, the teachers involved in the context of the problem to be solved, were able to submit the proposal of error typification and the methodology to an empirical observation through a real exercise.

Key words: typification, errors, learning, mathematic

■ Introducción

Al tratar de explicar y solucionar los problemas que originan el bajo rendimiento académico que tienen los estudiantes en el Proceso de Enseñanza Aprendizaje (PEA) de la asignatura Matemática I, que se imparte en el primer año de la carrera de Ingeniería en Ciencias Informáticas, se aplicaron medidas y alternativas a nivel institucional, que si bien han contribuido a mitigar alguno de los problemas, persiste aún este bajo rendimiento, que se constata fundamentalmente en las pruebas parciales y en los exámenes finales. Por otro lado, en los informes de asignatura que se elaboran al finalizar estos exámenes, se mencionan un grupo de dificultades agrupadas por contenidos, que no reflejan de forma explícita el concepto que delata la dificultad: *el error*.

Existe una arraigada concepción en muchos profesores de que el error es una dificultad, algo negativo que se debe evitar a toda costa y que cuando se manifiesta hay que erradicar de inmediato. Sin embargo, se comparte la idea que expresan diferentes investigadores, tales como, (Socas Robayna, 1997), (Rico, 1998), (Bachelard, 2000), (Godino, Batanero, Font, 2003), (Brousseau, 2007), (Cid Castro, 2015), (Estenoz Pino, 2016), entre otros, quienes defienden que el error es consustancial al conocimiento y ha formado parte del propio desarrollo de la ciencia en su devenir histórico, por lo que juega un rol importantísimo en el PEA de cualquier asignatura.

Sobre los errores que manifiestan los estudiantes (Socas Robayna, 1997) y (Rico, 1998), hacen un análisis histórico de este proceso de investigación, que ha tomado diferentes caminos y muestra una multiplicidad de enfoques diferentes. Según Mulhern (1989), citado por (Rico, 1998), desde el punto de vista metodológico las investigaciones sobre errores se pueden agrupar en las siguientes categorías:

1. Contar simplemente el número de soluciones incorrectas a una variedad de problemas.
2. Análisis de los tipos de errores cometidos.
3. Análisis de patrones de error. Tales análisis pueden revelar errores sistemáticos que sean síntoma de concepciones inadecuadas.
4. Construir problemas de tal modo que puedan provocar errores en los individuos.

La primera categoría evidentemente no da mucha información sobre la naturaleza del error para poder tratarlo y es la que más se emplea, sobre todo para realizar informes finales de asignaturas. La tercera categoría; según plantea el propio autor, no facilita encontrar la fuente del error por lo complejo que se hace seguir la línea de pensamiento de los estudiantes. La última categoría, presupone una dedicación profesionalizada en la investigación, lo cual se le hace difícil a un profesor que debe cumplir con una carga docente alta; siendo esta una característica del claustro de la Facultad Introdutoria de las Ciencias Informáticas (FICI), que además, es un claustro joven, con poca experiencia docente.

La mayor cantidad de investigaciones se encuadran metodológicamente en el segundo tipo. En este caso al analizar los tipos de errores que manifiestan los estudiantes, se procura hacer una clasificación de los mismos, ver en qué medida se desvían de la respuesta correcta e inferir las posibles causas o fuentes que los provocan. Como resultado de este proceso varios autores han propuesto diferentes tipificaciones de errores según su fuente, de acuerdo a criterios que pueden diferir unos de otros y muestran una dispersión en cuanto a la focalización de sus causas que resulta poco viable, por ejemplo, para profesores que trabajan en las condiciones de la FICI explicadas anteriormente.

Las razones expuestas, guiaron esta investigación a asumir una tipificación de errores en la Matemática I y a diseñar una metodología que permitirá orientar a los profesores, de manera asequible, a identificarlos y clasificarlos para su posterior tratamiento.

■ Marco teórico

Conceptualización de error

Según aparece en el diccionario Larousse el error es “Concepto o expresión falsos, no conformes a la verdad: *el examen estaba plagado de errores*” (Pequeño Larousse Ilustrado, 2008, p. 401), expresándose en una primera acepción una idea general del término. No obstante, en el ejemplo mostrado se puede leer entre líneas la connotación negativa que este concepto tiene, pues casualmente el ejemplo se refiere al ámbito educativo.

A continuación, se muestran algunas conceptualizaciones y caracterizaciones de error, establecidas en investigaciones relativas al contexto de la enseñanza y el aprendizaje de las Matemáticas, con la finalidad de llegar a una que se ajuste a los intereses de esta investigación.

- Según Godino “hablamos de *error* cuando el alumno realiza una práctica (acción, argumentación, etc.) que no es válida desde el punto de vista de la institución matemática escolar” (Godino, Batanero, Font, 2003, p. 73).
- Según Rico “Cuando un alumno proporciona una respuesta incorrecta a una cuestión matemática que se le plantea se puede decir que su respuesta es errónea, y la solución proporcionada es un error en relación con la cuestión propuesta” (Rico, 1998, p.76).
- Socas Robayna considera el error como “...la presencia en el alumno de un esquema cognitivo inadecuado y no solo como una falta específica de conocimiento o de un despiste.” (Socas Robayna, 1997, p. 125).
- Rivalta Valladares considera que “un estudiante comete errores en el aprendizaje, cuando al realizar una tarea evidencia una carencia parcial o total de los contenidos específicos o no específicos, o muestra alguna equivocación, según los contenidos declarados en el proyecto curricular o los formalizados en el proceso, aceptados científicamente” (Rivalta Valladares, 2018).

En estas conceptualizaciones de una forma u otra se aprecia como elemento común, que el error es una producción del estudiante que no se corresponde con el conocimiento oficialmente aceptado por la ciencia, pero en las tres primeras no se aclara que aspectos de esas producciones son los errados, que permitan de alguna manera focalizar con más precisión donde está el error.

Si se tiene en cuenta que el conocimiento del cual se está tratando es el contenido de la enseñanza de la Matemática, el cual se asume en esta investigación como “...el contenido específico (conceptos, leyes, teorías, procedimientos y métodos privativos de una ciencia o disciplina en particular) y el contenido no específico (habilidades lógicas, habilidades de carácter general, procedimientos algorítmicos, heurísticos, habilidades de estudio, los valores a desarrollar. (Hernández F., López, s/f)

Por ello para los fines de esta investigación, se justifica considerar como conceptualización de error la dada por Rivalta Valladares (2018).

Fuentes del error

Según Socas Robayna (1997) hay tres direcciones que pueden orientar al profesor a la hora de inferir la fuente del error y que no son necesariamente disjuntas:

- 1) Errores que tienen su origen en un obstáculo.
- 2) Errores que tienen su origen en ausencia de sentido.
- 3) Errores que tienen su origen en actitudes afectivas y emocionales.

La *ausencia de sentido* se puede explicar en situaciones donde hay carencias en la comprensión de los contenidos matemáticos, tanto los específicos (conceptos, teoremas, procedimientos, etc.) como no específicos (habilidades generales matemáticas, habilidades lógicas, etc.). Las *actitudes afectivas y emocionales* impactan siempre el aprendizaje, y si éstas no se traducen en una motivación positiva hacia el mismo, no es de extrañar que se manifiesten errores en las producciones de los estudiantes.

El obstáculo como fuente de errores, por su importancia y sobre todo, por la atención que ha recibido en la investigación en educación matemática será tratado en la siguiente sección.

La noción de obstáculo como fuente de errores

Las investigaciones sobre obstáculos tienen sus orígenes en los trabajos de Gastón Bachelard, epistemólogo francés que, en su obra, “La formación del espíritu científico” de 1938, acuñó el término de *obstáculo epistemológico*; aunque planteó que el mismo se aplicaba a los conocimientos científicos de la Física y otras ciencias, no así a los conocimientos matemáticos (Bachelard, 2000).

No fue hasta el año 1976 que el profesor francés Guy Brousseau contextualizó el concepto de obstáculo al campo de la enseñanza de las Matemáticas como parte de su Teoría de las Situaciones Didácticas. En dicha teoría la noción de *obstáculo* es esencial, pues el profesor durante el proceso de enseñanza-aprendizaje deberá ir creando situaciones en las que el objetivo fundamental es ir venciendo dichos obstáculos.

Los autores Palarea y Socas plantean que, tanto Bachelard como Brousseau caracterizan un obstáculo como “... aquel conocimiento que ha sido en general satisfactorio durante un tiempo para la resolución de ciertos problemas, y que por esta razón se fija en la mente de los estudiantes, pero que posteriormente este conocimiento resulta inadecuado y difícil de adaptarse cuando el alumno se enfrenta con nuevos problemas.” (Palarea Medina, Socas Robayna, 1994, p. 93). Esta conceptualización de obstáculo es la que se asume en esta investigación.

A su vez los obstáculos, como fuentes de error pueden tener, según Brousseau, orígenes diferentes:

- *Los de origen ontogenético*, tienen que ver con el desarrollo cognitivo del estudiante.
- *Los de origen didáctico*, están relacionados con la elección metodológica del profesor dentro del sistema didáctico.
- *Los de origen epistemológico*: Están vinculados con la dificultad intrínseca del concepto a aprender y pueden ser rastreados a lo largo de la historia de la Matemática, en la génesis misma de los conceptos.

En esta investigación no se tiene en cuenta el obstáculo de origen *ontogenético*, pues los estudiantes que cursan la universidad, a diferencia de los de otras edades, ya alcanzaron una madurez en su desarrollo cognitivo.

Tipificación de errores a partir de las fuentes que los originan

Como ya se ha analizado, para dar un tratamiento adecuado a los errores que manifiestan los estudiantes, es importante primeramente identificar las causas o fuentes que los originan. En este sentido se analizó el *obstáculo* como fuente de errores en el aprendizaje y se explicó como en la Teoría de las Situaciones Didácticas de Brousseau este concepto es esencial, al punto de no considerarse prácticamente otras posibles fuentes del error. Ahora bien, existen múltiples tipificaciones realizadas por diferentes autores que abren el diapasón de estas posibles fuentes. Se muestran a continuación las más significativas a juicio de los autores:

Según Radatz (1979) citado por (Rico, 1998)

- Errores debidos a la dificultad del lenguaje.

- Errores debidos a dificultades para obtener información espacial.
- Errores debidos a un aprendizaje deficiente de hechos, destrezas y conceptos previos.
- Errores debido a rigidez del pensamiento.
- Errores debidos a la aplicación de reglas o estrategias irrelevantes.

Según Movshovitz et al. (1987) citado por (Rico, 1998)

- Errores debidos a datos mal utilizados.
- Errores debidos a una utilización incorrecta del lenguaje.
- Errores debidos a inferencias no válidas lógicamente.
- Errores debidos al uso de teoremas o definiciones deformados.
- Errores debidos a la falta de verificación en la solución.
- Errores técnicos: errores de cálculo, de procedimiento en algoritmos básicos.

Estas tipificaciones se sustentan, en relacionar los errores con contenidos propios de la Matemática, con habilidades del pensamiento lógico, uso del lenguaje, etc., pero se aprecia en ellas cierta dispersión en cuanto a la focalización de las fuentes de los errores, o sea, estas tipificaciones no facilitan, a juicio de los autores, que los profesores de la FICI tengan una estructuración mejor ordenada de dichas fuentes.

Si se analizan detalladamente las tipificaciones mencionadas se puede apreciar como los tipos de errores que se declaran tienen su manifestación en acciones realizadas por los estudiantes. Según la teoría de la actividad, sea un concepto, un procedimiento o una habilidad matemática los contenidos no solo se asimilan sino se manifiestan mediante acciones, pues como expresa la psicóloga rusa Nina Talízina: "...no se puede separar el saber del saber hacer, porque saber siempre es saber algo, no puede haber un conocimiento sin una habilidad, sin un saber hacer. Entonces para llegar a algún acuerdo sobre qué es saber, siempre hay que determinar los tipos de habilidades, gracias a las cuales funcionan, se expresan los conocimientos" (Talízina, 1984, p. 48).

Continuando el análisis de las tipificaciones mencionadas, los autores de esta investigación se plantearon la necesidad de reescribir y reagrupar los tipos de errores que estos autores expresan, de manera que la nueva tipificación así obtenida, expresara las fuentes de los errores en términos de constructos que tengan implícitas las acciones que deben realizar los estudiantes para mostrar su aprendizaje, a saber, en términos de contenidos específicos y en términos de contenidos no específicos. Por supuesto, ya se había estado de acuerdo en incluir también los obstáculos como posibles fuentes de errores.

De lo planteado anteriormente se asume en esta investigación la siguiente tipificación de errores tomada de la definición operacional de error dada en (Rivalta Valladares, 2018):

- Error originado por carencia en los contenidos específicos (conceptos, procedimientos, proposiciones, etc.)
- Error originado por carencia en los contenidos no específicos (Habilidades Generales Matemáticas, etc.)
- Error originado por obstáculo (didáctico, epistemológico)

Aquí las Habilidades Generales Matemáticas, son consideradas como un conjunto de "verbos bien definidos, que sirven para unificar el lenguaje en la formulación de los objetivos en los programas de asignaturas matemáticas" (Delgado Rubí, 1999).

■ Resultados

Metodología para tipificar errores en el aprendizaje de la Matemática I en la UCI

A partir del análisis documental realizado y de las características propias de esta investigación se procedió a diseñar una metodología que facilite el trabajo de tipificación a los profesores de la FICI, la misma se expone a continuación:

Objetivo general:

Tipificar los errores que manifiestan los estudiantes en el PEA de la Matemática I como un primer paso para el posterior tratamiento de los mismos.

Fundamentación:

Esta metodología responde a la necesidad que tienen los profesores de la asignatura Matemática I de tipificar los errores que manifiestan sus estudiantes en el aprendizaje de la asignatura, según la fuente de los mismos y usando una terminología estandarizada en el contexto de la FICI.

Aparato conceptual que sustenta la metodología:

Esta metodología se sustenta en los conceptos fundamentales siguientes:

Contenido matemático: El contenido como categoría de la didáctica responde a la pregunta ¿qué enseñar? En Matemáticas se enseñan conceptos, procedimientos y proposiciones, lo que se entiende como contenidos específicos y habilidades matemáticas generales junto a habilidades del pensamiento lógico, lo que se entiende como contenidos no específicos.

Error: Un estudiante comete errores en el aprendizaje, cuando al realizar una tarea evidencia una carencia parcial o total de los contenidos específicos o no específicos, o muestra alguna equivocación, según los contenidos declarados en el proyecto curricular o los formalizados en el proceso, aceptados científicamente.

Obstáculo: Es aquel conocimiento que ha sido en general satisfactorio durante un tiempo para la resolución de ciertos problemas, y que por esta razón se fija en la mente de los estudiantes, pero que posteriormente este conocimiento resulta inadecuado y difícil de adaptarse cuando el alumno se enfrenta con nuevos problemas.

Tipificación de errores: Los errores, atendiendo a su fuente se tipifican como:

- Error originado por carencia en los contenidos específicos (conceptos, procedimientos, proposiciones, etc.)
- Error originado por carencia en los contenidos no específicos (Habilidades Generales Matemáticas)
- Error originado por obstáculo (didáctico, epistemológico)

Pasos que componen la metodología:

1. Inferir errores potenciales que los estudiantes pudieran manifestar. Este paso se cumplirá durante la preparación de una clase o en el proceso de diseño de un instrumento de evaluación, siempre a partir de los objetivos de la actividad docente y del conocimiento que tiene el profesor de sus estudiantes.
2. Tipificar los errores detectados en la actividad docente (clase o evaluación) y tabularlos.
3. Crear grupos de estudiantes por tipos de errores más frecuentes, de manera que facilite el posterior tratamiento didáctico de dichos errores.

4. Comparar la estimación de errores potenciales del paso 1 con los identificados y tipificados en el paso 2, de manera que sirva de retroalimentación para mejorar el proceso.
5. Interactuar con los estudiantes, siempre que sea posible, para afinar el proceso de aproximación a las causas o fuentes de los errores, lo cual enriquecerá la experiencia del profesor para posteriores procesos.

Evaluación de la metodología:

Se recomienda realizar talleres metodológicos donde participen los profesores del colectivo de asignatura de manera que se puedan recopilar y analizar experiencias de trabajo con la metodología, siempre con el objetivo de entrelazar opiniones, visiones, técnicas, etc. y así mejorar la práctica docente.

Recomendaciones para su instrumentación:

Para aplicar con éxito esta metodología es necesario que los profesores:

- Dominen el trabajo didáctico y metodológico con los contenidos específicos y no específicos de la Matemática I.
- Dominen la tipificación que se usará y los conceptos fundamentales asociados a la misma, como error y obstáculo.
- Realicen un diagnóstico frecuente que les permita tener una caracterización de los estudiantes sobre los saberes y errores mostrados en su aprendizaje.

Validación de la tipificación de errores y de la metodología propuesta

Para justificar la tipificación de errores asumida, diseñar la metodología y validar ambas, se realizaron dos talleres de investigación en los que participaron los profesores del claustro de la asignatura Matemática I de la FICI. El primer taller tuvo el objetivo principal de registrar como los profesores participantes, a partir de su propia experiencia y forma de hacer, tipificarían los errores que manifestaron los estudiantes en una evaluación escrita real realizada con anterioridad; en este taller no se dio información alguna relacionada con tipificaciones existentes.

Después de realizado el primer taller se analizaron las tipificaciones realizadas por los profesores talleristas y se verificó en qué medida, la propuesta de tipificación que se propone se ajustaba a lo elaborado por ellos. A partir de ahí se diseñó una propuesta de metodología de tipificación de errores, para facilitar el trabajo de los profesores.

El segundo taller tuvo como objetivo principal registrar como los profesores talleristas tipificarían los errores que manifestaron los estudiantes en el mismo examen utilizado en el primer taller, a partir de la propuesta de tipificación y de la metodología que se propone.

Antes de describir el desarrollo de los talleres se analizarán algunas cuestiones esenciales relacionadas con la teoría sobre el taller como recurso de investigación en pedagogía.

El taller como recurso de la investigación-acción en investigaciones pedagógicas

La *investigación-acción* es un método de investigación cualitativa, que se utiliza en las ciencias sociales a partir de los años posteriores a la segunda guerra mundial y se inició con los trabajos de Kurt Lewin. Este autor partió del hecho de estudiar los fenómenos sociales produciendo cambios en ellos, analizando dichos cambios y los efectos que estos producen. (Banister, Burman, Parker, Taylor, Tindall, 2004).

La investigación-acción tiene diferentes fases, que según (Kemmis McTaggart, 1988), citado por (Bausela Herreras, 2004, p. 5) son las siguientes:

1. Diagnóstico y reconocimiento de la situación inicial.
2. Desarrollo de un plan de acción, críticamente informado, para mejorar aquello que ya está ocurriendo.
3. Actuación para poner el plan en práctica y la observación de sus efectos en el contexto que tiene lugar.
4. La reflexión en torno a los efectos como base para una nueva planificación.

La investigación-acción "...se concentra en conocimientos precisos aplicados a un problema específico en una situación específica: su fuerza particular es que se evalúa a sí misma y es colaborativa, y su objetivo último es mejorar la práctica." (Banister, *et al*, 2004, p. 143).

La presente investigación se concentra en el estudio de las tipificaciones existentes sobre los errores en el aprendizaje a partir de sus fuentes y en proponer una tipificación que se ajuste al contexto de utilización que tendrá la misma, o sea, el clautro de la asignatura Matemática I, los contenidos de dicha asignatura y los estudiantes de la FICI en la época presente; y luego diseñar una metodología que facilite su uso por los profesores.

En el ámbito educativo se utiliza el *taller* como forma de organización del trabajo docente, siendo este un tipo de clase, por lo cual tiene un carácter eminentemente formativo, según (Ghiso, 1999) en la literatura relacionada con la educación popular, la animación socio-cultural y el trabajo social, el taller también es reconocido con un carácter formativo, sin embargo se recoge en la literatura que muchos procesos de Investigación-acción-participativa mencionan la utilización de talleres como una manera de *recopilar, analizar y construir conocimiento*.

A partir de lo planteado, se asume en esta investigación el taller como "...la metodología que permite el hacer, el procesar con otros, el entrelazar intensiones, lenguajes, visiones, objetos de estudio, técnicas. Es un espacio para lograr hacer conjuntos que conduzcan al análisis, la discusión académica y la conceptualización." (Montoya Cuervo, Zapata López, 2005, p. 27).

A continuación se describirán los talleres de investigación realizados y sus resultados.

Descripción y resultados del primer taller de investigación

En el primer taller se trabajó en equipos de dos profesores cada uno, a cada equipo se le indicó trabajar solo una pregunta del examen. Los profesores identificaron errores y los tipificaron a partir de su propia experiencia y criterios. A continuación, se muestra el registro de uno de los equipos:

Equipo de trabajo No		Cantidad de miembros del equipo	Cantidad de pruebas revisadas
1		2	4

Nº	Tipificación del error	Caracterización del error detectado	Frecuencia del error
1	Concepto	Función por tramos	3
2	Cálculo	$\sqrt{4}$	1
3	"	pero	1
4	Procedimiento	Cálculo de límites laterales	2
5	Concepto	Límite lateral en funciones por tramos	2
6	Concepto	Clasificación de discontinuas	1
7	Concepto	Operación de función por tramos	1
8	Concepto	Función por tramos	1

Figura 1. Registro del equipo de trabajo No.1 durante el taller No.1

Como resultado de este primer taller se pudo llegar a las siguientes conclusiones:

1. Los profesores talleristas tipificaron mayoritariamente los errores apuntando a los contenidos específicos (en este caso conceptos, procedimientos) como la fuente donde encontrar su origen.
2. En menor proporción tipificaron los errores apuntando a carencias en el dominio de Habilidades Generales Matemáticas, tales como calcular, resolver, graficar.
3. Se pueden inferir que existe poco dominio por parte de los profesores de las habilidades generales matemáticas, así como de considerar las mismas como parte del contenido matemático
4. La tipificación hecha por los profesores se aproxima bastante a la propuesta de tipificación que se propone.

Descripción y resultados del segundo taller de investigación

En el segundo taller se les mostró a los profesores talleristas una presentación con los resultados del primer taller. Se continuó con una introducción teórica sobre los errores y las tendencias de diferentes autores para su tipificación y posteriormente se expuso la propuesta de tipificación de errores y la propuesta de metodología para llevarla a cabo. A continuación, se estableció un debate sobre estas cuestiones. Algunas de las opiniones fueron las siguientes:

- Profesor 1: Manifestó sus dudas si en el caso de los errores originados por obstáculos, estos no podían incluirse dentro de los que apuntan a los contenidos específicos o no específicos.
- Profesor 2: Planteó que se recordara que tipificar un error en alguna categoría no implicaba necesariamente que no podía estar en otra categoría a la vez y se puso un ejemplo.
- Profesor 3: Consideró que él estuvo pensando un rato mientras los demás se expresaban y que hasta ese momento no se imaginaba ningún error que no cupiera, por así decirlo, en alguna de las categorías de la tipificación propuesta.
- Profesor 4: Manifestó que la metodología le parecía incluir los pasos necesarios para poner en práctica la tipificación propuesta.

Luego de esta introducción se trabajó en equipos de dos profesores cada uno, a cada equipo se le indicó trabajar solo una pregunta del examen. A continuación, se muestra el registro de un equipo al que se le asignó la pregunta 1 del examen.

1. Dada la función f , tal que $f(x) = \begin{cases} \frac{\text{sen}(x-2)}{4-x^2} & \text{si } x < 2 \\ 1 & \text{si } x = 2 \\ \frac{-x+1}{6x} & \text{si } x > 2 \end{cases}$
 - a) Determine el dominio de f .
 - b) Calcule $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x)$.
 - c) Determine si f es continua en $x = 2$, en caso de no serlo, clasifique la discontinuidad.

Figura 2. Pregunta 1 del examen con el que trabajó uno de los equipos en el taller No.2

Nº del examen	Tipificación del error detectado	Caracterización del error detectado
3	Error de concepto	No domina el concepto de Dominio a)
3	Error de relaciones entre conceptos	Para calcular el límite debió aplicar L'Hospital b) aplicó regla del cociente
3	Error de procedimiento	Simplifica sin tener en cuenta la resta b)
3	Error en resolver	Resuelve mal el $\cos(0)$
3	Error de procedimiento	No realiza la regla del producto o de deriva.
3	Error de concepto	Continuidad; no domina el concepto

Handwritten student work for a limit problem. The problem is: "D) en D) en f = x ≠ 0, x ≠ 2. b) $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sin(x-2)}{4-x^2} : \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sin(x-2)}{4-x^2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sin 0}{4-4} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{0}{0} \rightarrow$ forma indeterminada". The student then uses L'Hôpital's rule: " $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\cos(x-2) \cdot 1 - \sin(x-2) \cdot (-2x)}{(4-x^2)'} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\cos(x-2) - 2x \sin(x-2)}{4-x^2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\cos(0) - 0}{0} = \frac{0}{0}$ ". They then apply L'Hôpital's rule again: " $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{-\sin(x-2) - \cos(x-2)}{-2x} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{-\sin(2-2) - \cos(2-2)}{-2 \cdot 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{0-1}{-4} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{4} = 0,25$ ".

Figura 3. Registro de Tipificación de un error realizado por los profesores (parte superior de la imagen) y el error mostrado por el estudiante y señalado en el examen (parte inferior de la imagen)

En este caso lo tipifican como error de relaciones entre conceptos, o sea, plantean que el estudiante debió aplicar la regla de L'Hospital para calcular el límite y lo que aplicó fue la regla de la derivada de un cociente. Aunque hay conceptos implicados en este ejemplo, más bien el estudiante lo que hace es utilizar un procedimiento por otro. El autor principal de esta investigación, previamente a la realización del taller hizo una tipificación de los errores mostrados por los estudiantes en ese examen, y en este caso de error en particular lo tipificó como un error por obstáculo, pues consideró que el estudiante al intentar calcular el cociente de las derivadas como procedimiento dentro de la regla de L'Hospital, lo que hace realmente es utilizar la regla de la derivada de un cociente, por lo que se infiere que esta última regla, que el estudiante conoce bien, obstaculizó el aprendizaje de la primera.

El ejemplo descrito anteriormente muestra como al intentar tipificar un error, siempre lo que se hace es una inferencia, que un mismo error puede tener causas diferentes en diferentes estudiantes y en un mismo estudiante, pues las fuentes de los errores no son disjuntas. Por lo tanto, se infiere de este ejemplo la necesidad de retroalimentación constante del profesor con el estudiante, de manera que se vaya afinando el trabajo de tipificación por aproximaciones sucesivas.

Conclusiones de los talleres de investigación

Los talleres de investigación realizados mostraron como a través del intercambio colectivo de experiencias y saberes, los profesores implicados en el contexto del problema a resolver, fueron capaces de someter la propuesta de tipificación de errores y la metodología a una constatación empírica mediante un ejercicio real. La propuesta de metodología para tipificar errores fue enriquecida como resultado del análisis de las opiniones de los participantes, de las dudas que plantearon para trabajar con ella, etc., sobre todo, estas opiniones influyeron en las recomendaciones para su instrumentación.

■ **Conclusiones**

Como resultado de esta investigación se puede concluir:

1. Se asumió y justificó una tipificación de errores que se adecua al contexto del claustro de profesores de la asignatura Matemática I de la FICI.
2. Se diseñó una metodología que facilita a los profesores identificar y clasificar los errores que manifiestan sus estudiantes, según la tipificación asumida.
3. Se realizó un estudio teórico de las principales tendencias en cuanto a formas de tipificar errores en el aprendizaje de las matemáticas, tanto en el ámbito foráneo como nacional.
4. La utilización de talleres como recurso de la investigación-acción participativa permitió validar la tipificación de errores y la metodología propuestas en este contexto.
5. Una adecuada tipificación constituye el primer paso para aplicar un tratamiento didáctico que elimine o minimice los errores que manifiestan los estudiantes en el aprendizaje de las Matemáticas.

■ Referencias bibliográficas

- Bachelard, G. (2000). *La formación del espíritu científico, contribución a un psicoanálisis del conocimiento objetivo* (23 ed.). México, D.F: Siglo veintiuno editores.
- Banister, P., Burman, E., Parker, I., Taylor, M., & Tindall, C. (2004). *Métodos cualitativos en psicología, una guía para la investigación*. México: Universidad de Guadalajara.
- Bausela Herreras, E. (2004). La docencia a través de la investigación-acción. *Revista Iberoamericana de Educación*, 35(1), 1-9.
- Brousseau, G. (2007). *Iniciación al estudio de la teoría de las situaciones didácticas*. Buenos Aires, Argentina: Libros del Zorzal.
- Cid Castro, E. (2015). *Obstáculos epistemológicos en la enseñanza de los números negativos*. Tesis de Doctorado no publicada. Universidad de Zaragoza. Zaragoza, España.
- Delgado Rubí, J. (1999). *La enseñanza de la resolución de problemas*. Tesis de Doctorado no publicada, Ciudad de la Habana, Cuba.
- Estenez Pino, S. E. (2016). *Estrategia didáctica para el tratamiento de los errores cognitivos de origen epistemológico en el aprendizaje de la Matemática del preuniversitario cubano*. Tesis de Doctorado no publicada. Instituto Central de Ciencias Pedagógicas. La Habana, Cuba.
- Ghiso, A. (1999). Acercamientos: El taller en procesos investigativos interactivos. *Estudios sobre las culturas contemporáneas*, V(9), 145-153.
- Godino, J., Batanero, C., & Font, V. (2003). *Matemáticas y su didáctica para maestros*. Granada.
- Hernández F., H., & López, M. (s/f). Los contenidos de enseñanza. Criterios para una mejor selección.
- Montoya Cuervo, G., & Zapata López, C. (2005). El taller: Una estrategia para la normalización de términos y conceptos en un trabajo terminológico. *Análisis*, VI(1), 25-35.
- Palarea Medina, M., & Socas Robayna, M. (1994). Algunos obstáculos cognitivos en el aprendizaje del lenguaje algebraico. *SUMA*(16), 91-98.
- Pequeño Larousse Ilustrado. (2008). *Diccionario*, 267. Ediciones Larousse, S.A. de C.V.
- Rico, L. (1998). Errores y dificultades en el aprendizaje de las Matemáticas. En J. Kilpatrick, P. Gómez, & L. Rico (Edits.), *Educación matemática*. Bogotá, Colombia: una empresa docente.
- Rivalta Valladares, M. (2018). *Tratamiento didáctico para minimizar los errores en el aprendizaje de la Matemática en estudiantes de licenciatura Química*. Tesis doctoral en proceso. La Habana, Cuba.
- Socas R., M. M. (1997). Dificultades, obstáculos y errores en el aprendizaje de las Matemáticas en la Educación Secundaria. En R. L. otros, *La Educación Matemática en la Enseñanza Secuendaria* (págs. 125-154). Barcelona: Horsori.
- Talízina, N. (1984). *Conferencias sobre los fundamentos de la enseñanza en la educación superior*. La Habana: Universidad de la Habana: Departamento de estudios para el perfeccionamiento de la educación superior.