

## PROPUESTA DE DESCOMPOSICIÓN GENÉTICA DE LA DEFINICIÓN DE MÁXIMO Y MÍNIMO

### A GENETIC DECOMPOSITION PROPOSAL FOR THE DEFINITION OF MAXIMUM AND MINIMUM

Jesús Alfonso Noriega Márquez  
Universidad Autónoma de Querétaro (México).  
jalfonsonoriega@gmail.com

#### Resumen

Este trabajo presenta la base para una propuesta para la enseñanza del cálculo diferencial a nivel ingeniería, la cual se especializa en la definición de máximo y mínimo de una función, usando la teoría APOE como marco teórico y metodológico. APOE es un marco teórico constructivista, por lo que el trabajo incluye un análisis teórico que es la descomposición genética hipotética sobre la definición de máximo y mínimo, así como dos instrumentos que ayudan a validar la descomposición. Este trabajo forma parte de una tesis de maestría que muestra una propuesta de la aplicación de la derivada al cálculo de máximos y mínimos.

**Palabras clave:** APOE, descomposición genética, máximo y mínimo

#### Abstract

This paper presents the basis for a differential calculus teaching proposal at engineering level, which is specialized on the definition of maximum and minimum of a function, using APOS theory as a theoretical and methodological framework. APOS theory is a constructivist theoretical framework. So, this paper includes a theoretical analysis which is the hypothetical genetic decomposition on the definition of maximum and minimum, as well as two tools that help to validate such decomposition. This paper is part of a master's degree thesis that shows a proposal for the application of the derivate to the calculus of maxima and minima.

**Key words:** APOS, genetic decomposition, maximum and minimum

## ■ Introducción

Se sabe que las matemáticas son pieza fundamental en la formación de ingenieros, prácticamente toda su formación está relacionada con alguna de las ramas de las matemáticas, principalmente el cálculo, siendo ésta la base en ingeniería para poder entender y aprender los conceptos propios del curso. Sin embargo, el cálculo es una de las principales razones por la que los estudiantes abandonan la ingeniería, y en muchos de los casos es por errores didácticos o por que el profesor no tiene los conceptos matemáticos claros y aun así los enseña, lo que provoca una mala concepción por parte del estudiante (Moreno y Cuevas, 2004).

México es uno de los países donde egresan más ingenieros a nivel mundial. En 2012 México fue el sexto país en el orbe que generó más número de ingenieros solo por debajo de Japón, Estados Unidos, República de Corea, Ucrania y República Islámica de Irán (Vázquez, 2012). Sin embargo, la calidad de estos ingenieros es lo que es preocupante, entre los años 2010 y 2015 México pasó del lugar 86 al lugar 96 en el índice de Desarrollo de Tecnologías de la Información (Posada, 2016). Estos números solo muestran el caso de las tecnologías de la información, pero en diferentes aspectos México se está rezagando en el ámbito tecnológico.

La formación académica del ingeniero no es la que requieren las empresas que desarrollan tecnología, por ello la mayoría de los egresados debe realizar capacitaciones propias de las empresas donde van a trabajar por la incapacidad que tiene el ingeniero por posesionarse de un puesto como recién egresado. Además de incluir que el nivel de desempleo entre los recién egresados es de los más altos en el país y que éstos mismos egresados solo un 40% trabaja en algo relacionado con lo que estudió (Hernández, 2012). Éstas bajas estadísticas se deben a dos factores fundamentales, el primero es el bajo nivel académico con el que cuentan los estudiantes en el país, principalmente en matemáticas, los resultados en las evaluaciones internacionales como PISA demuestran este rezago académico que los alumnos van acarreado desde niveles básicos hasta llegar a las universidades.

El segundo aspecto que perjudica el progreso tecnológico es la baja o nula interacción de los estudiantes con el entorno que los rodea, conocen las empresas hasta que terminan sus estudios en lugar de crear lazos para que los proyectos que desarrollen en el área sean acordes a un proyecto en la vida laboral cotidiana. Desde la experiencia del autor como docente se han encontrado diversos tipos de problemas en los estudiantes a la hora de afrontar ejercicios referentes a la aplicación de la derivada.

Muchos alumnos tienen la dificultad de entender los teoremas que son tratados en el curso de cálculo diferencial, muestran problemas en comprender conceptos relevantes y solo siguen instrucciones precisas o fórmulas para encontrar valores que les pide el profesor, como en el caso de derivar una función, se aprenden de memoria las fórmulas y con base en esa memorización intentan encontrar las derivadas de las funciones, en lugar de entender que significa la derivada y encontrar el valor comprendiendo que es lo que están haciendo.

Otro problema que se ha encontrado en el curso de cálculo es que el alumno no consigue contextualizar problemas fuera de la matemática, además que se le dificulta lograr una interacción entre los conceptos matemáticos que está trabajando con conceptos de otros campos que se supone ya conoce.

El presente trabajo forma parte de una tesis de maestría y es una investigación desarrollada con el ciclo de investigación de la teoría APOE y una proposición de descomposición genética por parte del autor tomando como referencias ejercicios del libro de Cálculo de una variable, trascendentes tempranas (Stewart, 2008).

## ■ Marco teórico

La investigación se realizó dentro del marco teórico APOE, esto es debido a que dicha teoría funciona tanto como marco teórico como marco metodológico, la misma teoría permite investigar cómo el estudiante aprende y también

permite realizar instrumentos para analizar el desempeño y avance que presenta el estudiante o las dificultades que manifiesta en el aprendizaje.

La teoría APOE fue creada por el Doctor Ed Dubinsky para comprender la formación del conocimiento en los estudiantes. Está basada en los trabajos de Piaget (Piaget y García, 2008) sobre constructivismo, la cual menciona que el sujeto tiene que construir sus propios conocimientos, y no los puede recibir contruidos por los otros, aunque para la propia construcción sea indispensable la interacción entre individuo y medio. Y también se basa en la abstracción reflexiva que es un conocimiento no observable, pues es la persona quien lo construye en su mente a través de relaciones con los objetos, desarrollándose siempre de lo más simple a lo más complejo, es un conocimiento que una vez aprendido ya no se olvida, ya que la experiencia no viene sobre los objetos sino sobre la acción de estos.

### APOE Estructuras y mecanismos mentales

La teoría APOE es principalmente un modelo para describir como los conceptos matemáticos pueden ser aprendidos, ayuda a explicar cómo los individuos crean construcciones mentales (Acción, Proceso, Objeto y Esquema) para entender los conceptos trabajados de tal manera que pasan de un estado de construcción a otro gracias a los mecanismos mentales (interiorización, coordinación, reversión, encapsulación, generalización y desencapsulación) que va desarrollando (Arnon, Cottrill, Dubinsky, Oktaç, Roa Fuentes, Trigueros y Weller, 2014).

#### Acción

De acuerdo con Paget y adoptado por la teoría APOE un concepto matemático es primeramente concebido por el individuo como una acción, esta se caracteriza por ser una transformación de un objeto que es percibida como externa y se realiza como una reacción a sugerencias o pasos a seguir, es decir estímulos que pueden ser físicas o mentales. (Parraguez, 2009). Dubinsky (1996, p .34) menciona: *“Las acciones son más limitadas que otras construcciones mentales, pero son el principio crucial en la construcción del conocimiento.”*

Se dice que un individuo tiene una construcción mental acción cuando manipula el concepto de forma física a partir de un algoritmo, no puede transformar el concepto sin los pasos marcados en el algoritmo. Es el primer acercamiento que tiene el estudiante con el concepto matemático, pero es fundamental que posea esta construcción ya que de aquí parte el conocimiento, de aquí se originan otras construcciones mentales.

#### Proceso

La construcción mental proceso se puede construir a partir de dos mecanismos mentales, la interiorización o la coordinación. La interiorización se logra cuando el individuo repite la acción y logra reflexionar acerca de ella. Esto quiere decir que logra ejecutar la acción, pero ahora de forma mental lo que conlleva a ya no necesitar el estímulo externo. (Gamboa, 2013). Dubinsky (1996, p. 34) menciona *“En contraste con una acción, el individuo percibe el proceso como algo interno, y bajo su control, en lugar de algo que se hace como respuesta a señales externas”*, lo que quiere decir que el individuo puede reflexionar, describir o incluso revertir los pasos de la transformación ya que la realiza enteramente en su mente, lo que significa que puede reflexionar sobre la acción (Dubinsky, 1996).

Otra manera de construir una estructura mental proceso es a través de la coordinación, la cual es un mecanismo mental que involucra dos constructos mentales proceso, los cuales interaccionan entre ellos formando un nuevo constructo mental proceso. Logrando que el estudiante pueda reflexionar sobre los conceptos trabajados.

#### Objeto

La estructura mental objeto se logra cuando el alumno encapsula un constructo mental proceso, esto se da cuando el estudiante aplica una acción a un proceso, lo que quiere decir que una estructura mental dinámica como es el

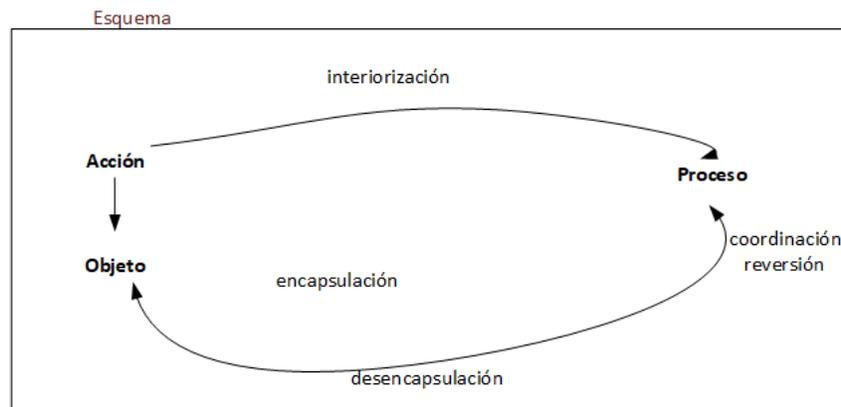
proceso la ve como una estructura mental estática como lo es la acción (Arnon et al, 2014). Cuando el estudiante reflexiona sobre las operaciones que le aplica a un proceso es porque ve ese proceso como un todo, realiza transformaciones sobre ese proceso, ya sean acciones u otros procesos se dice que ve al proceso como una estructura mental objeto (Dubinsky, 1996). La encapsulación es uno de los mecanismos mentales más complicados, Parraguez (2009, p. 40) menciona: “tomar conciencia sobre las operaciones aplicadas a un proceso y reflexionar sobre ellas resulta una dificultad para los estudiantes”.

### Esquema

Un esquema es una colección coherente de acciones, procesos, objetos y otros esquemas que se tienen para un concepto matemático en particular. Dicha colección puede estar relacionada consciente o inconscientemente en la mente del estudiante y son empleados para la solución de situaciones problemáticas que involucren ese concepto matemático. (Parraguez, 2009).

Los estudiantes pueden actuar de diferentes maneras respecto a una situación problemática específica debido a las diferentes relaciones que tienen los esquemas en cada estudiante, esperando que a mayor conocimiento existan relaciones más coherentes, logrando que el estudiante puede discriminar entre que esquema utilizar para cada problema y que esquema no.

La ilustración 1 muestra los mecanismos y las estructuras mentales para la construcción del conocimiento matemático. (traducido de Arnon et al, 2014, p.18).



**Ilustración 1** Estructuras y mecanismos mentales para la formación del conocimiento matemático (Arnon et al, 2014, p.18)

Los otros mecanismos mentales que faltan por mencionar son:

Desencapsulación, es cuando el estudiante tiene un constructo mental objeto, que lo ve como un todo, y necesita separarlo, regresar a la idea original antes de encapsularlo, es el proceso opuesto a la encapsulación, lo que conlleva una estructura mental proceso.

Reversión, es cuando el alumno tiene una construcción proceso, la cual ya interiorizó siguiendo algunos pasos, la reversión es hacer el camino contrario, no en forma de deshacer, sino para formar un nuevo proceso distinto al original.

Generalización, es cuando el estudiante aplica un determinado esquema en un contexto distinto, lo que origina que el alumno sea consciente de los alcances de sus construcciones mentales. En este mecanismo los esquemas no cambian, pero otros objetos pueden ser asimilados en otros esquemas para ser contextualizados en uno diferente del cual surgió.

### Descomposición genética

Para poder desarrollar un análisis de acuerdo con la teoría APOE es necesario desarrollar una descomposición genética (DG). La cual se define como un modelo cognitivo que describe las diferentes construcciones mentales que el estudiante realiza para comprender un concepto matemático. Es decir, la teoría APOE trata de explicar el entendimiento de un concepto mediante estructuras y mecanismos mentales en un individuo (Gamboa, 2013).

La DG es un modelo, como un mapa, en el cual se plasman todas las estructuras mentales que debe desarrollar el estudiante y los diferentes mecanismos mentales que debe aplicar para la aprehensión del concepto matemático.

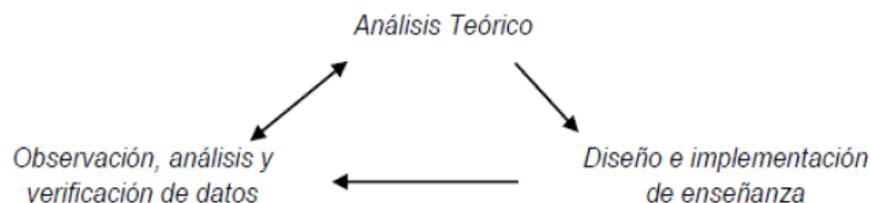
No existe una única DG para un concepto matemático, cada estudiante, profesor o investigador puede crear la propia, teniendo un sinnúmero de DG para cada concepto matemático trabajado, ya que cada persona aprende de diferente manera, sin embargo, la DG nos ayuda a plantear una idea general de cómo abordar el concepto a enseñar.

La DG comienza con un análisis histórico-epistemológico, para ir conociendo las construcciones mentales que el individuo hace para entender las ideas relacionadas al concepto matemático, es una primera aproximación para modelar el aprendizaje del concepto matemático y se utiliza como base teórica para la elaboración de material que se emplean en el aula, sirve también para hacer secuencias didácticas e instrumentos para analizar el avance de los estudiantes.

La DG es el corazón de la teoría APOE, con ella se puede generar material para dar las clases de matemáticas, además de permitir realizar un análisis de los conceptos aprendidos por el estudiante.

### ■ Metodología

La teoría APOE aparte de ser un marco teórico es un marco metodológico, el cual permite hacer investigación, para eso se desarrolló un ciclo de investigación que involucra el análisis teórico, diseño e implementación de enseñanza y observación, análisis y verificación de datos. La ilustración 2 (Gamboa, 2013, p. 29.) muestra dicho análisis.



**Ilustración 2** Ciclo de investigación en APOE

Este análisis permite conocer el nivel de aprendizaje de los estudiantes y el acercamiento que se tiene a las construcciones mentales que se plantean.

Este artículo se centra en la investigación de la DG del concepto matemático: definición de máximo y mínimo. El cual surge de la experiencia que tuvo el investigador al ser estudiante y recordar como comprendió el concepto; y al ser profesor e intentar que los alumnos comprendan dicha definición. Estas ideas plasmarlas como un mapa de

construcciones mentales que el alumno seguirá para aprehender la definición de máximo y mínimo. Cada persona puede generar una DG distinta de un solo concepto, la parte metodológica del ciclo de investigación APOE es la que investiga cual es la mejor DG que debe usar el profesor para determinados estudiantes.

#### Análisis teórico

En esta etapa se crea una DG hipotética, lo que permite modelar el concepto matemático de una manera epistemológica y cognitiva. Consiste en describir las estructuras y los mecanismos mentales que debe desarrollar el estudiante para comprender el concepto matemático. Gracias a esto se conocen también las interrelaciones que el estudiante puede generar entre las construcciones que ha hecho y un concepto nuevo que va a asimilar.

La DG comienza siempre con conocimientos que el estudiante ya debe tener, no se puede crear nuevo conocimiento si no tiene bases previas. Este análisis teórico comprende de la experiencia del investigador y la comprensión que él tiene del concepto matemático a desarrollar, incluyendo un análisis epistemológico, psicológico y de libros de texto para complementar la DG formulada. De acuerdo con Arnon et al (2014, p. 94) existen dos preguntas que se debe responder el investigador para realizar la DG, “¿Qué significa comprender el concepto matemático? Y ¿Cómo esa comprensión puede ser alcanzada por el individuo?”. El objetivo de las preguntas es hacer una reflexión de como comprender el concepto matemático y como el estudiante puede comprenderlo, para después plasmarlo en la DG.

#### Diseño e implementación de la enseñanza

En esta etapa el investigador se encarga de ayudar al estudiante a desarrollar las construcciones mentales que se plasmaron en la DG. Todo eso mediante la implementación de secuencias didácticas que surgen del análisis teórico. Esta etapa a su vez incluye la formulación de instrumentos basado en las estructuras mentales de la DG, los cuales ayudarán a corroborar como los estudiantes construyeron o están construyendo los constructos mentales. No se implementaron los diseños de enseñanza en el presente trabajo, el análisis sólo se enfocó en la creación de la DG y la elaboración de instrumentos para validar la misma.

#### Observación, análisis y verificación de datos

El tercer paso del ciclo de investigación es la reunión, observación y verificación de datos para ser analizados. Los resultados por parte de los estudiantes deben ser analizados desde la DG hipotética para poder encontrar qué elementos no han sido considerados o cuáles de las construcciones mencionadas hipotéticamente en la DG no se evidencian. Lo anterior lleva a una reformulación de la DG hipotética y una determinación de la versión refinada de ésta por la aplicación del ciclo.

Este ciclo de investigación se puede repetir cuantas veces sea necesario para llegar a una comprensión más profunda de cómo el concepto podría desarrollarse en la mente del alumno. En cada repetición se deben agregar nuevos datos referentes al desempeño de los alumnos en tareas matemáticas relacionadas con el concepto matemático (Gamboa, 2013).

## ■ Resultados

#### Análisis teórico

El objeto matemático que se maneja en el presente trabajo es el concepto de máximo y mínimo el cual es muy usado en ingeniería se deben minimizar costos, materiales, energía de entrada y maximizar energía de salida, potencia, esfuerzo, etc., es por ello por lo que se comienza con este concepto tan importante.

Para construir el proceso de la definición de los máximos y mínimos se parte del esquema de función, como concepto previo que debe ya manipular el individuo, de este esquema el interés se centra en que el alumno sepa representar gráficamente una función e interpretar el dominio de la función.

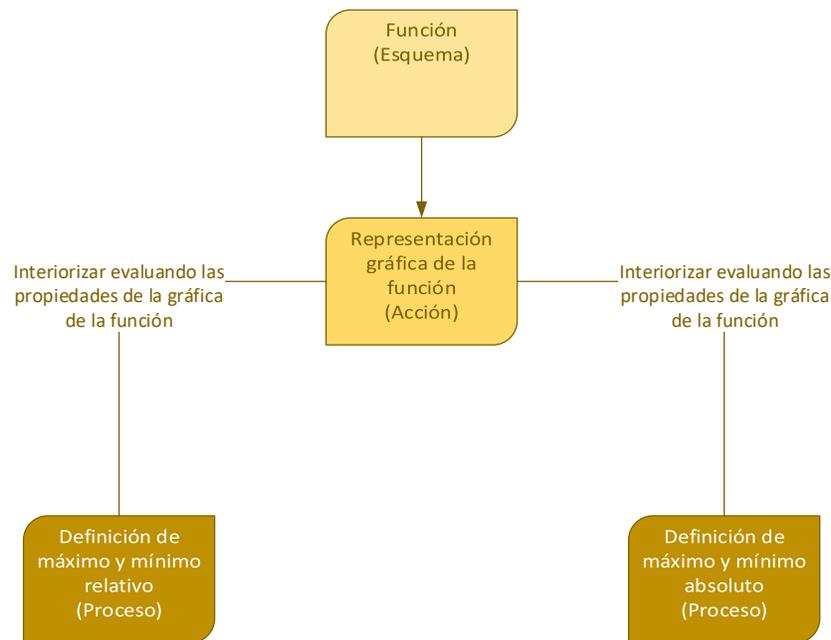
Del esquema de función se extrae la representación gráfica de la función como una estructura mental acción, se espera que el alumno ya manipule las gráficas de las funciones y entienda cual es el dominio de estas.

Ya que se tiene la representación gráfica de la función como una construcción acción se procede a interiorizarla, esto se logra cuando el estudiante analiza la gráfica de la función, observa las curvas, la forma, si corta el eje  $x$  o el eje  $y$ . La parte clave del análisis es lograr que el alumno logre visualizar la gráfica de cualquier función y ubique que existe uno o varios puntos que están más arriba que el resto de la gráfica, en todo el dominio y en ciertos intervalos; del mismo modo existe uno o varios puntos que están más abajo que el resto.

Una vez que el alumno logra identificar los puntos máximos y/o mínimos en la gráfica, ya sea en un intervalo o en la función completa, se puede llegar a la definición de máximo y mínimo en una construcción proceso. La interiorización, abstracción reflexiva que lleva del constructo mental acción a proceso, se logra desde el punto de vista del investigador cuando el alumno evalúa las propiedades de la gráfica, esto quiere decir que el alumno es consciente que existe uno o varios puntos donde se evalúa la función que están más arriba que el resto de los puntos evaluados, analizando que a la izquierda de este punto la función crecía y a partir de este punto la función decrecerá, análogamente la misma evaluación de propiedades se logra para el mínimo.

Se entiende como: Definición de máximo y mínimo absoluto: Una función  $f$  tiene un máximo absoluto en  $c$  si  $f(c) \geq f(x)$  para todo  $x$  en  $D$ , donde  $D$  es el dominio de  $f$ . El número  $f(c)$  se llama valor máximo de  $f$  en  $D$ . De manera análoga,  $f$  tiene un mínimo absoluto en  $c$  si  $f(c) \leq f(x)$  para todo  $x$  en  $D$ ; el número  $f(c)$  se llama valor mínimo de  $f$  en  $D$ . Y también: Definición de máximo y mínimo local: Una función  $f$  posee un máximo local en  $c$  si  $f(c) \geq f(x)$  cuando  $x$  está cercano a  $c$ . Esto significa que  $f(c) \geq f(x)$  para todo  $x$  en algún intervalo abierto que contiene a  $c$ . De manera análoga,  $f$  tiene un mínimo local en  $c$  si  $f(c) \leq f(x)$  cuando  $x$  está cerca a  $c$ . (Definiciones tomadas de Stewart, 2008, p. 271).

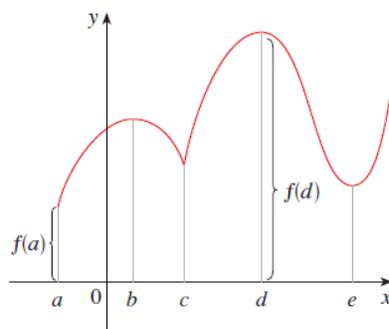
En la ilustración 3 se muestra la DG completa y como se llega a un estado de construcción proceso de la definición de máximo y mínimo absoluto y máximo y mínimo local o relativo. Los colores en la ilustración van opaciéndose, dependiendo la complejidad de la estructura mental que va desarrollando el individuo respecto al concepto máximo y mínimo. Los mecanismos mentales, por su parte, quedan flotando dentro de las flechas que indican el camino que va siguiendo el individuo al entender dicho concepto.



**Ilustración 3** Definición de máximo y mínimo en construcción mental proceso

Desde la opinión del investigador, lo importante de construir la definición así, es que el alumno fue generándola con los procesos que se iban desarrollando (graficando la función, ubicando los puntos y encontrando las características de estos puntos), llegando a la definición de un caso en particular y en la definición rigurosa se generaliza, es importante que la definición esté acompañada de varios ejemplos visuales que ayuden a abstraer mejor las propiedades del teorema.

Un ejemplo que presenta Stewart (2008, p. 271) para que el alumno visualice las características de la gráfica y le permita apreciar y abstraer las particularidades de la función y esto le permita interiorizar el concepto puede ser:



**Ilustración 4** Ejemplo de máximo y mínimo

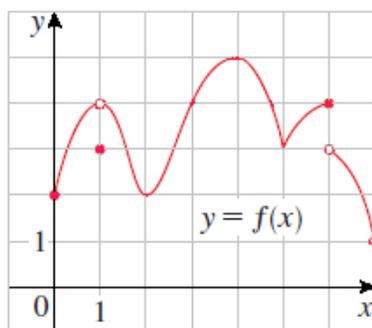
En la ilustración 4 se puede observar cómo en  $f(a)$  se tiene un mínimo y en  $f(d)$  se tiene un máximo. Un ejemplo como este ayuda a que el alumno visualice que existen puntos más altos y bajos que el resto de la gráfica.

Diseño y análisis a priori de los instrumentos

La segunda etapa dentro del ciclo de investigación en la teoría APOE es el diseño e implementación de la enseñanza. El cual involucra tanto secuencias didácticas como instrumentos para medir y validar el avance que ha tenido el estudiante respecto a la DG hipotética que se formuló anteriormente. Para el análisis del presente trabajo solo se realizaron los instrumentos para validar el avance del estudiante.

La primera parte es fragmentar la DG en zonas para poder analizar si el estudiante ha creado las construcciones mentales, primero se analizan los esquemas como conceptos previos, en este caso se debe analizar si cuenta con el esquema de función, evaluando si el alumno conoce las representaciones gráficas de una función. Posteriormente las estructuras mentales que creó el estudiante respecto a la aplicación de la derivada. Este análisis se enfoca en la definición del máximo y mínimo de una función por lo que el instrumento que se recomienda utilizar es:

(Ejemplo tomado de Stewart, 2008, p. 277) Use la gráfica de la ilustración 5 para para determinar los valores máximos y mínimos absolutos y locales de la función:



**Ilustración 5** Gráfica para validación de esquema máximo y mínimo

En este ejercicio el alumno debe ser capaz de ubicar los puntos máximos y mínimos dentro de la gráfica, para eso debe ser capaz de diferenciar entre las definiciones de máximo y mínimo absoluto y relativo. Si es capaz de diferenciarlo se dice que tiene la definición de máximo y mínimo en una construcción mental proceso. La tabla 1 muestra la rúbrica de las construcciones mentales que se van a analizar con las posibles respuestas del alumno.

**Tabla 3** Análisis a priori del esquema máximo y mínimo

Construcción mental	Respuesta esperada
Acción	El alumno ubica algunos puntos máximos o mínimos, pero no logra diferenciar entre absoluto o relativo.
Proceso	El alumno ubica los puntos máximos y mínimos tanto relativos y absolutos y justifica el porqué.

La respuesta experta esperada es la siguiente:

Se tienen máximos relativos en:

$$x = 1$$

$$x = 6$$

Se tiene un máximo absoluto en:

$$x = 4$$

Se tienen mínimos relativos en:

$$x = 0$$

$$x = 2$$

$$x = 5$$

Se tiene un mínimo absoluto en:

$$x = 7$$

El ejercicio mostrado permite apreciar si el alumno concibe correctamente la definición de máximo y mínimo, tanto absoluto como relativo. La respuesta del estudiante indica la construcción mental que ha creado para dicho concepto. Si la respuesta del individuo sale de la respuesta experta esperada se debe refinar la DG, debido a que el estudiante pudo haber utilizado otras estructuras mentales distintas a las que el investigador planteaba desde el inicio.

Tanto la DG como el ejercicio para validar la descomposición le permiten al profesor de cálculo diferencial crear secuencias didácticas para trabajar en clase y poder enseñar dicho concepto, esperando que al estudiante le quede como un aprendizaje más significativo.

## ■ Conclusión

Como conclusiones el trabajo tiene dos, la primera es referente a los conceptos previos, es fundamental que el docente conozca los conceptos previos de los temas que va a enseñar en clase y además que esté seguro de que los estudiantes cuentan con ellos, en caso contrario esto generará más dudas y confusión al desarrollar nuevas estructuras mentales. Si el alumno no comprende bien las formas de representación de una función como concepto previo, principalmente la gráfica, difícilmente entenderá la importancia de un punto máximo o mínimo y no logrará aplicarlo correctamente.

La segunda es relacionada con el mecanismo mental proceso, se recomienda mostrar (y que el alumno comprenda) la demostración de los teoremas trabajados en la definición de máximo y mínimo de una función, la demostración de un teorema ayuda a abstraer características importantes, además de darle confianza al estudiante del trabajo que está desarrollando, esto permite que logre la interiorización del concepto estudiado.

## ■ Referencias bibliográficas

- Arnon I., Cottrill J., Dubinsky E., Oktaç A., Roa Fuentes S., Trigueros M. y Weller K. (2014). *APOS Theory, A framework for research and curriculum development in mathematics education*. New York: Springer.
- Dubinsky, E. (1996). Aplicación de la perspectiva piagetiana a la educación matemática universitaria. *Educación Matemática*, 8(3), 24 – 41.
- Gamboa, M. (2013). *Construcción cognitiva de la raíz cuadrada, una mirada desde la teoría APOE*. Tesis de Maestría no publicada. Pontificia Universidad Católica de Valparaíso. Chile.
- Hernández, L. (30 de agosto de 2012). Sin ejercer, 60% de profesionistas; egresan con conocimientos obsoletos. *Excelsior*. Recuperado de: <https://www.excelsior.com.mx/2012/07/30/nacional/850633>
- Moreno, S. y Cuevas, C. A. (2004). Interpretaciones erróneas sobre los conceptos de máximos y mínimos en el Cálculo Diferencial. *Educación Matemática*, 16(2), 93 – 104.

- Parraguez, M. (2009). *Evolución cognitiva del concepto espacio vectorial*. Tesis de Doctorado. Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada. IPN. México.
- Piaget, J. y García, R. (2008). *Psicogénesis e historia de la ciencia*. México: Siglo veintiuno editores.
- Posada, M. (23 de mayo de 2016). Cae México en desarrollo de tecnologías a nivel mundial. *La Jornada*.
- Stewart, J. (2008). *Cálculo de una variable, trascendentes tempranas*. México: Cengage Learning.
- Vázquez, R. (2012). ¿Qué ingenieros necesita México? *Innovación Educativa*, 12(60), 125 – 135.