

# EL CONOCIMIENTO ESPECIALIZADO EN LA ENSEÑANZA DE LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS ADITIVOS QUE IMPLICAN FRACCIONES

## THE SPECIALIZED KNOWLEDGE IN THE TEACHING OF ADDITIVE PROBLEM SOLVING INVOLVING FRACTIONS

Ana María Reyes-Camacho, Eugenio Lizarde Flores, Francisco Javier Hernández Gutiérrez  
Escuela Normal Rural “Gral. Matías Ramos Santos”. (México)  
anyreca0712@hotmail.com, life genio@yahoo.com.mx, frajaher 79@hotmail.com

### Resumen

En este trabajo identificamos el conocimiento matemático y didáctico de una profesora en formación inicial de primaria, para enseñar problemas aditivos que implican fracciones en sexto grado, las cuales son un objeto de estudio complejo por sus diferentes significados: parte-todo, medida, cociente, razón y operador. Así, adoptamos el modelo Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas. En este estudio de caso, las entrevistas semiestructuradas, la planificación, la videograbación de clases y un documento de análisis de la práctica son las fuentes de información. En los resultados, la profesora evidencia conocimiento de la enseñanza de las matemáticas, sobre teorías de enseñanza (Teoría de las Situaciones Didácticas) y estrategias (Pasos de Polya para resolver problemas matemáticos). Además, esta profesora evidencia conocimiento de los temas matemáticos en relación con conocimiento de definiciones (problemas aditivos) y fenomenología (significado de la fracción como parte todo en contextos continuos y discretos).

**Palabras clave:** conocimiento del profesor, primaria, fracciones

### Abstract

In this work, we identify the mathematical and didactic knowledge of a primary education initial training teacher to teach additive problems involving fractions in the sixth grade. They constitute a complex object of study due to their different meanings: part-whole, measure, quotient, ratio and operator. Thus, we adopted the Mathematics Teacher's Specialized Knowledge Model. In this case study, semi-structured interviews, planning, video recording of classes, and a report of the practice analysis are the sources of information. In the results, the teacher shows knowledge of mathematics teaching, about theories of teaching (Theory of the Didactic Situations), and strategies (Polya steps to solve mathematical problems). In addition, this teacher shows knowledge of the mathematical topics in relation to knowledge of definitions (additive problems) and phenomenology (meaning of the fraction as part-whole in continuous and discrete contexts).

**Key words:** teacher's knowledge, primary education, fractions

## ■ Introducción

Desde hace años, el conocimiento matemático y didáctico de los profesores se ha convertido en objeto de estudio en diferentes investigaciones. En este escenario, emerge nuestro interés por el conocimiento profesional de profesores de primaria.

En educación matemática, existe una amplia preocupación porque los profesores posean conocimientos matemáticos y didácticos en relación con el estudio de las fracciones, pues se convierten en un objeto de estudio complejo por la diversidad de significados que poseen: parte-todo, medida, cociente, razón y operador (Llinares & Sánchez, 1997). En ese sentido, Montes et al. (2015) realizaron un estudio con profesores en formación inicial de primaria, donde destacan debilidades en los significados que les otorgan a las fracciones, sin embargo, la suma de fracciones aparece como una de sus fortalezas. Por su parte, Hansen, Mavrikis & Geraniou (2016) efectuaron un estudio con profesores en formación continua para investigar sobre el conocimiento didáctico y tecnológico de fracciones, en este trabajo aparecen las sumas de fracciones con igual y diferente denominador como algunas de las tareas que se diseñan para trabajar con los alumnos.

A partir de este contexto, en esta investigación nos preguntamos: ¿Cuál es el conocimiento especializado que una profesora en formación inicial de primaria evidencia cuando enseña la resolución de problemas aditivos que implican fracciones? Así, nuestro propósito se traduce en caracterizar el conocimiento especializado de una profesora en formación inicial de primaria, para enseñar la resolución de problemas aditivos que implican fracciones en sexto grado.

## ■ Marco teórico

La profesionalización del docente implica la identificación de los conocimientos que están en juego durante el desarrollo de su tarea. Existen algunos investigadores que han realizado estudios sobre el conocimiento del profesor (Ball, Thames & Phelps, 2008; Shulman, 1986). En esta investigación, tomamos como perspectiva teórica el modelo del Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas (MTSK, por sus siglas en inglés- *Mathematics Teacher's Specialised Knowledge*), el cual es presentado por Carrillo et al. (2018). Desde este enfoque se precisa que el conocimiento que el profesor usa para enseñar es especializado, en particular, en el campo de las matemáticas.

El modelo MTSK se divide en dominios, subdominios y categorías; en algunos de los aspectos anteriores, las siglas que se emplean para su identificación corresponden a su nombre en inglés, tal como se presenta en la Figura 1. En términos concretos, el MTSK se divide en tres dominios y, a su vez, dos de los dominios organizan en tres subdominios.

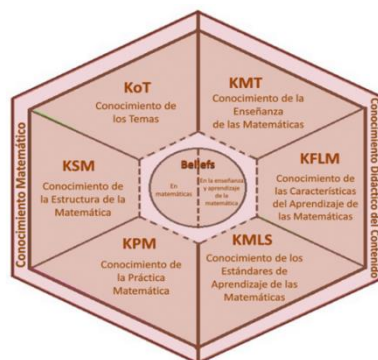


Figura 1. Diagrama del Mathematics Teacher's Specialised Knowledge-MTSK (Carrillo et al., 2018).

En el dominio del Conocimiento matemático (MK) se encuentra el subdominio del Conocimiento de los temas matemáticos (KoT), cuyas categorías son procedimientos, definiciones, propiedades y sus fundamentos, registros de representación, fenomenología y aplicaciones. En el Conocimiento de la estructura de las matemáticas (KSM) aparecen como categorías conexiones de complejización, conexiones de simplificación, conexiones transversales y conexiones auxiliares. Por último, en el subdominio del Conocimiento de la práctica matemática (KPM) identificamos: jerarquización y planificación, formas de validación y demostración, papel de los símbolos y uso del lenguaje formal, procesos asociados a la resolución de problemas, prácticas particulares del quehacer matemático y, condiciones necesarias y suficientes para generar definiciones.

En el dominio del Conocimiento didáctico del contenido (PCK), se ubica el subdominio Conocimiento de las características de aprendizaje de las matemáticas (KFLM), desde donde emergen como categorías: teorías de aprendizaje, fortalezas y dificultades, formas de interacción con un contenido matemático e intereses y expectativas. En el caso del subdominio de Conocimientos de la enseñanza de las matemáticas (KMT) ubicamos: teorías de enseñanza, recursos materiales y virtuales y, estrategias, técnicas, tareas y ejemplos. En el subdominio de Conocimiento de los estándares de aprendizaje de las matemáticas (KMLS) identificamos: expectativas de aprendizaje, nivel de desarrollo conceptual o procedimental esperado y secuenciación con temas anteriores y posteriores. El tercer dominio de conocimiento son las Creencias, el cual se ubica en el centro de la Figura 1.

En esta comunicación avanzamos en la caracterización de algunos de los conocimientos matemáticos (KoT) y didácticos (KMT), que una profesora en formación inicial de primaria evidencia cuando favorece la enseñanza de la resolución de problemas aditivos que implican fracciones, en un grupo de sexto grado.

## ■ Metodología

En esta investigación recurrimos a un análisis cualitativo de los datos, desde el enfoque de análisis de contenido (Flick, 2004), mismo que se interpreta como un procedimiento para la categorización de datos con el propósito de clasificar, resumir o tabular (Fox, 1981). Este análisis ha sido empleado en otras investigaciones, cuyo objeto de estudio es el conocimiento del profesor de matemáticas al enseñar los números racionales (e. g. Rojas, 2014).

En este trabajo retomamos el estudio de caso, como “[...] el estudio de la particularidad y de la complejidad de un caso singular, para llegar a comprender su actividad en circunstancias importantes” (Stake, 1999, p. 11) y aún más, de carácter “instrumental” en tanto que asumimos “una necesidad de comprensión general, y consideraremos que podemos entender la cuestión mediante el estudio de un caso particular” (Stake, 1999, p. 16). Así, nuestro caso está representado por una profesora en formación inicial de primaria (Luisa), la cual cursa el octavo semestre de la Licenciatura en Educación Primaria (Plan de Estudios 2012), en la Escuela Normal Rural “Gral. Matías Ramos Santos”, en el estado de Zacatecas, México. Entre los principales rasgos para la selección de este caso, destaca el conocimiento que Luisa tiene sobre las fracciones y, que en semestres anteriores de su formación abordó los cursos de la línea de matemáticas (aritmética: su aprendizaje y enseñanza; álgebra: su aprendizaje y enseñanza; geometría: su aprendizaje y enseñanza; procesamiento de información estadística).

El plan de clase y la videograbación, constituyen las fuentes principales para la recogida información; en relación con la primera, Simons (2011) plantea la importancia de la revisión de documentos en el contexto de la investigación cualitativa. En lo que respecta a la segunda fuente, Planas (2006, p. 40) señala que “[...] el video de una sesión de clase proporciona una perspectiva poliédrica de las interacciones entre participantes y permite volver sobre los datos originales una y otra vez”. En esta investigación, la entrevista semiestructurada se convierte en una fuente secundaria de recogida de información, debido a que su diseño está en función del contenido de las fuentes principales. Así, en palabras de (Kvale, 2011) la entrevista semiestructurada “[...] trata de obtener descripciones del mundo vivido de los entrevistados con respecto a la interpretación del significado de los fenómenos descritos” (p. 34).

En el proceso de análisis de contenido de la información recogida, destacamos la identificación de unidades de análisis, la definición de las categorías que se van a emplear y la codificación de las unidades correspondientes a cada categoría (Fox, 1981). En este estudio, el MTSK nos proporciona las categorías de análisis para la identificación de conocimientos matemáticos y didácticos. En el conocimiento didáctico, identificamos como categorías del Conocimiento de la enseñanza de las matemáticas (KMT, por sus siglas en inglés): Teorías de enseñanza y estrategias. En el conocimiento matemático, ubicamos categorías del Conocimiento de los temas (KoT, por sus siglas en inglés): Definiciones y fenomenología.

## ■ Resultados

En este estudio identificamos evidencias e indicios de conocimientos matemáticos y didácticos de Luisa para enseñar problemas aditivos con fracciones; las primeras se definen como los elementos que permiten afirmar que un profesor posee un conocimiento particular que, con frecuencia, proviene de una triangulación para definir su existencia. En lo que corresponde a los indicios de conocimiento, se referencian como aquellos que permiten reconocer que se requiere de información amplia para convertirse en evidencias de conocimiento, por lo cual, se pueden traducir como sospechas (Flores-Medrano, 2015). A continuación, presentamos en la Tabla 1 los indicadores de conocimiento de Luisa, cuya organización se desprende de los dominios y subdominios del MTSK, mismos que después ejemplificamos.

**Tabla 1.** Indicadores de conocimiento matemático y didáctico de Luisa

Subdominios		Categorías asociadas al subdominio <i>Conoce sobre</i>	Indicadores de conocimiento
Conocimiento matemático	Conocimiento de los temas (KoT)	Definiciones	-Luisa conoce los problemas aditivos con fracciones como aquellos que implican adiciones y sustracciones.
		Fenomenología	-Luisa conoce la fracción como parte-todo en contextos continuos y discretos.
Conocimiento didáctico del contenido	Conocimiento de la enseñanza de las matemáticas (KMT)	Teorías de enseñanza	-Luisa conoce la Teoría de las Situaciones Didácticas para la enseñanza de los problemas aditivos con fracciones.
		Estrategias	-Luisa conoce estrategias para la resolución de problemas (pasos de Polya).

En el caso del Conocimiento de los temas matemáticos, particularmente de definiciones sobre problemas aditivos, encontramos que Luisa evidencia conocimientos en el plan de clase, las entrevistas semiestructuradas, la grabación de clases y el documento de análisis de la práctica; en ésta última fuente de información señala:

“[...] me permito especificarme en los problemas “de estructura aditiva”, que Vergnaud (1990) define como “el conjunto de las situaciones cuyo tratamiento implica una o varias adiciones y sustracciones” (p. 97)”.

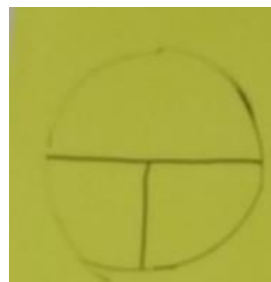
En la Tabla 2, en los elementos iniciales del plan de clase, identificamos que Luisa presenta indicios de conocimiento de fenomenología de las fracciones, en específico del significado parte-todo. Además, encontramos que Luisa muestra conocimientos de algunos elementos o variables didácticas para trabajar los problemas aditivos, como la ubicación de la incógnita en el estado final, la presentación de la información necesaria y en orden en los problemas, entre otros elementos, aunque al final precisa el trabajo con el significado parte todo de la fracción en contextos continuos y discretos.

**Tabla 2.** Indicadores que contextualizan el diseño de un plan de clase de matemáticas.

Elementos que complejizan los problemas de tipo aditivo que se plantean
Lugar de la incógnita: Incógnita en el desafío final o total.
Tipo de relación implicada en el problema: Relación dinámica.
Orden y manera en la que se presenta la información: Información necesaria/ información en orden.
Número de etapas del problema: Problemas de dos etapas o más (compuestos).
Fracción como parte todo en contextos continuos o discretos.

A continuación, presentamos algunos fragmentos de registro de la videograbación del inicio de la clase de Luisa, donde identificamos que evidencia conocimientos de fenomenología en relación con la representación gráfica de la fracción como parte-todo en contextos continuos (Llinares & Sánchez, 1997), lo cual se observa en la Figura 2 en el contexto de la lectura de un problema a los alumnos, tal como se aprecia:

Luisa: [...] ¿Qué compró Jonathan en el tianguis?  
 Aos: Pizza para él y para su papá.  
 Luisa: Muy bien, dice que compró dos cuartas partes de pizza para él y la mitad de pizza para su papá.  
 Rutilio: Es igual maestra.  
 Fernando: No.  
 Eduardo: Compraron una pizza entera y la partieron a la mitad, la mitad para él y la mitad para su papá.  
 Jaqueline: Compraron lo mismo.  
 Luisa: ¿Por qué dices que compraron lo mismo?  
 Jaqueline: Porque dos cuartos equivalen a un medio.  
 Luisa: Muy bien, pasa al frente para que representes lo que se comieron entre los dos. /La alumna pasa al pizarrón y dibuja un círculo y lo divide en dos cuartos y un medio/



**Figura 2.** Representación de partición de pizza

Luisa: ¿Qué tiene que hacer ella para saber cuánta pizza se comieron entre Jonathan y su papá?

Eduardo: Partirla a la mitad, agarra un medio para el papá y dos cuartos para el niño.

Aos: El de arriba es el del papá y el de abajo es el de Jonathan.

Jaqueline: Es lo mismo maestra.

Luisa: ¿Qué pasa ahí?

Jaqueline: Se comieron lo mismo

Luisa: ¿Cuánto se comieron entre los dos?

Aos: Un entero, una pizza entera.

En el fragmento de registro anterior, Luisa rescata algunos conocimientos previos de los alumnos sobre la suma de fracciones con diferente denominador (*¿Qué tiene que hacer ella para saber cuánta pizza se comieron entre Jonathan y su papá?*), donde la representación gráfica juega un papel fundamental y lleva a los alumnos a identificar que ambas partes del papá e hijo son un entero, sin embargo, no se plantea un procedimiento formal. Además, Luisa muestra conocimiento de fracciones equivalentes en el planteamiento de la tarea ( $1/2$  y  $2/4$ ), así como en sus intervenciones en la clase (*Luisa: ¿Por qué dices que compraron lo mismo?*; *Jaqueline: Porque dos cuartos equivalen a un medio*; *Luisa: Muy bien [...]*).

En el inicio de la clase, Luisa plantea diferentes problemas a los alumnos en función de las características de algunos productos que les mostró (Figura 3), lo cual se observa en el siguiente registro:

Luisa: Muy bien, ¿qué más dice que compró?

Aos: Dulces.

Luisa: Dice que compró una bolsa con 6 dulces, ¿de qué color son los dulces?

Aos: Azul y amarillo.

/Una alumna dibuja en el pizarrón los dulces que hay en la bolsa/



Figura 3. Representación de dulces

Luisa: ¿Qué fracción representa la cantidad de dulces de cada color que hay en la bolsa?

Eduardo:  $4/6$  y  $2/6$

Luisa: ¿Qué fracción representan los dulces azules?

Eduardo:  $4/6$

Luisa: ¿Y los dulces amarillos?

Eduardo:  $2/6$

Luisa: ¿Por qué  $2/6$ ?

Aos: Por qué son 2 de 6.

Eduardo: Y los azules 4 de 6 dulces que hay en la bolsa.

Luisa: Si Jonathan se comió  $1/3$  de dulces amarillos y  $1/3$  de dulces de color azul, ¿cuántos dulces se comió en total?

Eduardo: Se comió los 2 amarillos y 2 de los azules, en total se comió 4.

Luisa: Y en fracciones, ¿cómo se resolvería este problema?

Jaqueline: Pues se suma  $1/3 + 1/3$  y son  $2/3$ .

Yolet:  $1/3$  más  $1/3$  son  $2/3$  y  $2/3$  son 4 dulces.

En el inicio de la clase, Luisa contribuye a que los alumnos avancen en la representación gráfica y numérica de las fracciones en contextos discretos, para luego llevarlos a la suma de fracciones con igual denominador (*Luisa: Si Jonathan se comió  $1/3$  de dulces amarillos y  $1/3$  de dulces de color azul, ¿cuántos dulces se comió en total?*). En este caso, logra que los alumnos identifiquen la necesidad de recurrir a la suma de las fracciones para obtener la respuesta a su interrogante (*Jaqueline: Pues se suma  $1/3 + 1/3$  y son  $2/3$* ).

En concreto, en la primera parte de la clase, Luisa evidencia Conocimiento de los temas matemáticos, en particular del conocimiento de definiciones (problemas aditivos) y el conocimiento de fenomenología de fracciones (significado parte todo en contextos continuos y discretos), lo cual aparece en otras investigaciones (e. g. Rojas 2014).

En relación con el Conocimiento de la enseñanza de las matemáticas que Luisa posee, en la Tabla 3 presentamos un fragmento del plan de clase, donde favorece la enseñanza de problemas aditivos con fracciones en un grupo de sexto grado:

**Tabla 3.** Fragmento de una situación didáctica para la enseñanza de problemas aditivos con fracciones

Situación problema/consigna
<p>Se pedirá a los alumnos que se reúnan en binas, y una vez realizado esto, se entregarán problemas impresos:</p> <p>Problema 1: Alberto compró una pizza el día de su cumpleaños, para repartirla entre su familia. Su hermano Ramiro se ha comido <math>2/3</math> de la pizza y Luis, su otro hermano se ha comido <math>1/6</math> de la pizza, ¿qué parte de la pizza se comieron entre los dos?, ¿qué parte de la pizza le queda ahora?</p> <p>Problema 2. Joselyn compró una bolsa con 30 dulces. Ella se comió <math>1/3</math> parte de dulces por la mañana y más tarde <math>3/6</math> partes del total de dulces de la bolsa, ¿qué parte de los dulces se comió en total?, ¿qué cantidad de dulces equivale a la fracción que representa lo que se comió?, ¿qué parte de dulces le queda?</p>
Fase de acción
<p>Los alumnos revisarán cada problema que se les ha entregado para que los lean, analicen y reflexionen sobre cuál es el proceso que deben seguir para resolverlos.</p> <p>Antes de que los alumnos comiencen a resolverlos. En esta fase, se considera necesario llevar a los alumnos a entender el problema, paso 1 que propone Polya para la resolución de un problema. Este primer paso, se guiará bajo las siguientes preguntas que serán realizadas a los alumnos, estas preguntas se adecuarán (las adecuaciones aparecen en negritas). para que los alumnos se sientan más familiarizados con la situación que se plantea en este momento:</p> <p>Paso 1: Entender el Problema.</p> <p>¿Entiendes todo lo que dice?</p> <p>¿Puedes replantear el problema en tus propias palabras? ¿Nos podrías decir con tus propias palabras lo que dice el problema?</p> <p>¿Distinges cuáles son los datos? ¿Qué información o datos nos proporciona este problema, que sea de utilidad tomar en cuenta para resolver el problema?</p> <p>¿Sabes a qué quieres llegar? ¿Qué es lo que el problema pide que hagamos, a qué quiere que lleguemos?</p> <p>¿Hay suficiente información? ¿Con esos datos podríamos resolverlo?, ¿falta información o datos?</p> <p>¿Hay información extraña? ¿Hay información que no nos ayuda a resolver el problema, o que no entendamos?)</p> <p>Las respuestas a estas preguntas serán escritas en papel bond, y los alumnos las escribirán en su cuaderno para que les sirvan como referente o guía para resolver los problemas planteados.</p>

En la Tabla 3, en el fragmento del plan de clase, Luisa muestra algunos conocimientos relacionados con el Conocimiento de la enseñanza de las matemáticas, en particular con el conocimiento de una Teoría de enseñanza y el conocimiento de Estrategias para la resolución de problemas. En el caso de la Teoría de enseñanza, en la Figura 4, Luisa presenta indicios de conocimientos de algunos elementos de la Teoría de las Situaciones Didácticas: planteamiento de una situación problema y una fase de acción; lo anterior se confirma con la información que nos proporciona en el documento de análisis de su práctica:

Las planeaciones diseñadas que guiaron mi intervención, al estar planeadas bajo la TSD, descrita en líneas anteriores permitieron que los alumnos actuaran sobre situaciones didácticas, formularan sus propios procedimientos a partir de los saberes previos, mismos que serán validados con argumentos sustentados en los conocimientos adquiridos y, bajo las consideraciones de los otros alumnos sobre si son verdaderos o no y, la institucionalización (aspecto formal matemático) que el maestro relice sobre los conceptos, definiciones, procedimientos, algoritmos, que se han venido abordando de manera informal durante la clase. Esta metodología construirá el proceso de enseñanza-aprendizaje de cada intencion didáctica.

**Figura 4.** Fragmento de análisis de la práctica de Luisa.

En el documento de análisis de la práctica, Luisa muestra conocimiento de algunos elementos de la Teoría de las Situaciones Didácticas como la fase de acción, formulación, validación e institucionalización; la primera fase se encuentra explícita en la Tabla 3, las fases de formulación y validación se encuentran presentes en la Tabla 4:

**Tabla 4.** Fragmento de una situación didáctica para la enseñanza de problemas aditivos con fracciones

Formulación
Tomando en cuenta los pasos que se rescataron en la fase anterior para resolver un problema, se preguntará a los alumnos:
Ahora que entendimos lo que el problema plantea, ¿qué sigue para resolver el problema?
En función de las opiniones de los alumnos, se mencionará que para ello deberán identificar primero, de manera individual, el procedimiento que crean más pertinente, así que a cada alumno se le entregarán las siguientes tablas en las que escribirán el procedimiento para cada problema. Esto hace referencia a los pasos 2 y 3 que propone Polya:
Paso 2: Configurar un plan. Para este paso, se dará libertad al alumno que elija alguna estrategia de resolución o procedimiento que crean pertinente para resolver los problemas.
Se considera que este paso va de la mano del paso 3, ya que una vez que formulen sus procedimientos, deberán elegir de entre los que formularon, el que les resulte más práctico para resolver el problema, y será éste el que habrán de ejecutar, es decir, será con éste con el que procederán a resolver el problema.
Paso 3: Ejecutar el Plan.
-Implementar la o las estrategias que escogiste hasta solucionar completamente el problema.
-Sugiera tomar un nuevo curso.



- Concédete un tiempo razonable para resolver el problema. Si no tienes éxito solicita una sugerencia o haz el problema a un lado por un momento (¡puede que "se te prenda el foco" cuando menos lo esperes!).
- No tengas miedo de volver a empezar. Suele suceder que un comienzo fresco o una nueva estrategia conducen al éxito.

Problema	Nombre del alumno 1: _____	
¿Cómo voy a resolver el problema 1?	Procedimiento	¿Por qué?
¿Cómo voy a resolver el problema 2?	Procedimiento	¿Por qué?

### Validación

En esta fase, se preguntará de manera grupal: ¿qué procedimiento utilizaron? A partir de las respuestas y la identificación de los procedimientos, se pasará al frente a algunos alumnos (que utilizaron procedimientos diferentes respectivamente) para que muestren sus procedimientos.

De manera grupal se validarán estos procedimientos en función de las preguntas que en las siguientes líneas se muestran y que guían esta fase.

Para este momento, se organizará por turnos a los alumnos que deseen participar en la validación de los procedimientos encontrados.

Se pedirá a algún alumno que participe dando el argumento a la pregunta: ¿por qué se empleó este procedimiento?, y se preguntará, nuevamente, de manera grupal si están de acuerdo con este procedimiento y expresen sus argumentos de acuerdo a la respuesta que dan. Otras de las preguntas que se realizarán son: ¿alguien lo resolvió de manera diferente?, ¿qué implica este procedimiento?, ¿sumaron o restaron las fracciones?, ¿cómo lo podríamos representar de manera gráfica?, ¿cuál de los procedimientos resulta más pertinente?, ¿por qué?

Esta misma dinámica se empleará para la validación del segundo problema.

A partir de las respuestas de los alumnos, se mencionará que en función de las observaciones que sus compañeros les realizaron y el nuevo análisis a sus procedimientos iniciales, habrá que mirar hacia atrás, es decir, ver nuevamente los procedimientos ya validados y reflexionar sobre éstos, para dar respuesta correcta de acuerdo a lo establecido en los problemas, así como se les dará la oportunidad de escribir una forma de solución más sencilla que cumpla con lo establecido en los problemas.

Esta fase, corresponde al paso 4 de Polya:

Paso 4: Mirar hacia atrás.

¿Es tu solución correcta?

¿Tu respuesta satisface lo establecido en el problema?

¿Adviertes una solución más sencilla?

¿Puedes ver cómo extender tu solución a un caso general?

Como podemos identificar en la Tabla 3 y 4, Luisa evidencia conocimientos de Teorías de enseñanza, en particular de la Teoría de las Situaciones Didácticas en relación con la fase de acción, formulación y validación. Además, en las Tablas 3 y 4 Luisa muestra conocimientos de Estrategias para la resolución de problemas, las cuales se traducen en los pasos que propone Polya (Paso 1: Entender el problema; Paso 2: Configurar un plan; Paso 3: Ejecutar el plan y Paso 4: Mirar hacia atrás). De acuerdo con Santos-Trigo & Aguilar (2018, p. 157):

[...] en la comunidad matemática se han generado desarrollos relevantes relacionados con la resolución de problemas. Polya (1945) analiza su propia actividad y quehacer matemático vía el método introspectivo, que lo conduce a plantear un modelo que identifica las fases fundamentales que aparecen durante el proceso de resolver problemas.

Los párrafos anteriores nos permiten identificar, que Luisa evidencia conocimiento de relaciones entre el conocimiento de algunas fases de la Teoría de las Situaciones Didácticas y el conocimiento de estrategias para la resolución de problemas. En la Tabla 3, aparece la fase de acción y el Paso 1: Entender el problema, mientras que en la Tabla 4 se presenta la fase de formulación, el Paso 2: Configurar un plan y el Paso 3: Ejecutar el plan. Al final de la Tabla 4 se encuentra la fase validación y el Paso 4: Mirar hacia atrás.

## ■ Conclusiones

La caracterización del MTSK de los profesores en formación nos provee de datos y evidencias para incidir en la transformación del contenido de los programas de formación inicial, en este caso, de educación primaria. Como podemos apreciar en esta comunicación, identificamos que Luisa muestra Conocimiento de los temas matemáticos (definiciones y fenomenología) y Conocimiento de la enseñanza de las matemáticas (teorías de enseñanza y estrategias).

Al ser un reporte parcial de investigación, la caracterización del resto de los subdominios del MTSK sigue en curso, sin embargo, lo que aquí presentamos nos permite concluir que, derivado de sus procesos de formación inicial, los estudiantes normalistas manifiestan evidencias de la construcción del conocimiento especializado para la enseñanza de las matemáticas al resolver situaciones problema que provienen de su quehacer docente y, al resolver tareas que plantean los formadores, cuya base son el resultado de las investigaciones en la formación inicial. De manera concreta, observamos que Luisa tiene conocimiento de relaciones de conocimientos entre las situaciones o fases de la Teoría de las Situaciones Didácticas y, las fases para la resolución de problemas que propone Polya. Por ejemplo, en la situación de validación ubica la fase mirar hacia atrás, al igual que en el resto de las fases manifiesta articulación con los heurísticos que propone Polya.

Lo expresado en los párrafos anteriores cobra relevancia si asumimos que, ante la inmediatez que habitualmente impregna a la docencia, el reconocimiento y concreción de teorías didáctica sobre y desde la enseñanza de las matemáticas, articulado con el Conocimiento de los temas (KoT), son parte ineludible del conocimiento profesional y especializado del profesor de matemáticas.

## ■ Referencias bibliográficas

- Ball D.L., Thames, M.H. & Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching: What makes it special? *Journal of Teacher Education*, 59 (5), 389-407.
- Carrillo-Yañez, J., Climent, N., Montes, M., Contreras, L.C., Flores-Medrano, E., Escudero-Ávila, D., Vasco, D., Rojas, N., Flores, P., Aguilar-González, A., Ribeiro, M. & Muñoz-Catalán, M. C. (2018). The mathematics

- teacher's specialised knowledge (MTSK) model. *Research in Mathematics Education*, 20 (3), 236-253, DOI: 10.1080/14794802.2018.1479981
- Flick, U. (2004). *Introducción a la investigación cualitativa*. Madrid: Ediciones Morata.
- Flores-Medrano, E. (2015). *Una profundización en la conceptualización de elementos del modelo de Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas (MTSK)*. Tesis doctoral publicada. Recuperada desde de <http://rabida.uhu.es/dspace/handle/10272/11503>
- Fox, D. J. (1981). *El proceso de investigación en la educación*. Pamplona: EUNSA.
- Hansen, A., Mavrikis, M., & Geraniou, E. (2016). Supporting teachers' technological pedagogical content knowledge of fractions through co-designing a virtual manipulative. *Journal of Mathematics Teacher Education* 19 (2-3), 205-226.
- Kvale, S. (2011). *Las entrevistas en Investigación cualitativa*. Madrid: Ediciones Morata.
- Llinares, S. & Sánchez, M. (1997). *Fracciones: la relación parte-todo*. España: SÍNTESIS.
- Montes, M. Á., Contreras, L. C., Liñán, M.<sup>a</sup> C., Muñoz-Catalán, M. C., Climent, N. & Carrillo, J. (2015). Conocimiento de aritmética de futuros maestros. Debilidades y fortalezas. *Revista de Educación* 367, 36-62
- Planas, N. (2006). Modelo de análisis de videos para el estudio de procesos de construcción de conocimiento matemático. *Educación matemática*, 18(1), 37-72.
- Rojas, N. (2014). *Caracterización del conocimiento especializado del profesor de matemáticas: un estudio de casos*. Tesis doctoral publicada. Universidad de Granada, España. Recuperada desde <http://funes.uniandes.edu.co/6428/2/Rojas2013ConocimientoProfesor.pdf>
- Santos-Trigo, L. & Aguilar, D. (2018). "Resolución de problemas matemáticos: del trabajo de Polya al razonamiento digital" en Alicia Ávila (coord.): *Rutas de la Educación Matemática. 30 años de investigación en la revista Educación Matemáticas*. México: SOMIDEM. ISBN: 978-607-98263-0-7
- Shulman, L. S. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational Researcher*, 15(2), 4-14.
- Simons, H. (2011). *El estudio de caso: Teoría y práctica*. Madrid: Morata.
- Stake, R. E. (1999). *Investigación con estudio de casos*. Madrid: Morata.