

OBSTÁCULOS EPISTEMOLÓGICOS EN LAS FUNCIONES Y SU RELACIÓN CON EL SENO TRIGONOMÉTRICO

EPISTEMOLOGICAL OBSTACLES IN FUNCTIONS AND THEIR RELATIONSHIP WITH THE TRIGONOMETRIC SINE

Percy Lujan Rosadio, Cintya Gonzales Hernández
Pontificia Universidad Católica del Perú. (Perú)
percy.lujan@pucp.pe, cintya.gonzales@pucp.pe

Resumen

Durante el desarrollo de la noción de función se presentaron algunas formas de pensamiento que direccionaron la evolución de su concepción, y que se vieron reflejadas también en los cambios conceptuales que atravesó el seno trigonométrico. Resulta pertinente desde la Didáctica de la Matemática, y desde una perspectiva histórica epistemológica identificar los algunos obstáculos presentados alrededor de la concepción de función y su relación con el proceso de transición entre la razón seno y función seno; tarea que el presente trabajo desarrolla por medio de un análisis bibliográfico, y que identifica en la concepción estática, y la disociación existente entre magnitudes y número, las principales dificultades relacionadas al desarrollo de función reflejadas en la trigonometría.

Palabras clave: función, epistemología, seno trigonométrico

Abstract

When developing the notion of function, some ways of thinking that addressed the evolution of its conception arose; and they were also reflected in the conceptual changes that the trigonometric sine went through. It is relevant from the Didactics of Mathematics, and from an epistemological historical perspective to identify some obstacles shown around the conception of function and its relation to the process of transition between the sine ratio and sine function. Such task is developed in the present work by means of a bibliographic analysis, which allows identifying in the static conception, and the existing dissociation between magnitudes and number, the main difficulties related to the development of the function, and that are reflected in the trigonometry.

Key words: function, epistemology, trigonometric sine

■ Introducción

Dentro del proceso de investigación en educación matemática el análisis histórico de los objetos matemáticos puede favorecer los procesos de enseñanza y aprendizaje, en tanto pueda profundizar en la naturaleza del concepto identificando los elementos que condicionaron su génesis y desarrollo, y relacionarlo con la construcción al momento de estudiarlo en las aulas escolares. En ese sentido, Buendía y Montiel (2009) indican que la historia en la investigación en matemática educativa no solo cumple una función informativa o motivacional, sino que permite identificar el contexto en el cual se gesta e institucionaliza un determinado saber, y además, analizar al hombre en contacto con las matemáticas dentro de un contexto dado, lo que en conjunto permite extraer elementos que contribuyan a la enseñanza de dicho saber.

El análisis histórico se convierte entonces en un recurso relevante dentro de la investigación en educación matemática, siendo una de las perspectivas donde se desenvuelve el análisis epistemológico, y dentro de ella la identificación de obstáculos epistemológicos; que resulta de gran importancia, pues como señala Sierpiska (1985) el conocimiento de las condiciones históricas donde un obstáculo ha sido reconocido y posteriormente superado permite comprender un obstáculo similar que se manifiesta en una secuencia didáctica con estudiantes, y viceversa.

En ese sentido, Brousseau en 1976 introduce en la investigación en enseñanza de las matemáticas, recogiendo los aportes de Bachelard, los obstáculos epistemológicos con la idea de denominar aquellas concepciones del estudiante que en un primer momento resultan válidas al momento de utilizarlas, pero que luego para prácticas matemáticas de mayor complejidad, estas concepciones fuerzan a errores o limitan el desarrollo de nuevos conocimientos.

Teniendo en cuenta ello, el presente estudio surge al profundizar la dimensión epistemológica del trabajo de tesis de maestría Luján (2019), referido a la de modelización de la función seno; en la que se realiza un primer análisis e identificación de los obstáculos asociados a la evolución histórica de la noción de función y que a su vez guardan relación con la noción de la función seno. Señalar estos obstáculos contribuyó a tener una mayor comprensión de la naturaleza del seno trigonométrico y fortalecer el diseño de nuestra actividad de estudio que fue implementada dentro de la investigación.

■ Fundamento teórico

La noción de Obstáculo fue introducida en la educación matemática por Brousseau en 1976 inspirado en los aportes de Bachelard y Piaget, y lo define en relación con las causas que provocan los errores en los estudiantes:

el error no es solamente el efecto de la ignorancia, de la incertidumbre, como se cree en las teorías empíricas o conductistas del aprendizaje, sino el efecto de un conocimiento anterior, que tenía su interés, su éxito, pero que ahora se revela falso, o simplemente mal adaptado. Los errores de este tipo no son erráticos e imprevisibles, están constituidos de obstáculos. Brousseau (1983, p. 4)

Lo expresado por Brousseau indica que algunos de los errores de los estudiantes, aquellos que son de interés para la investigación, se enmarcan dentro de una concepción anterior, el cual gozaba de validez para un momento determinado y para un campo determinado, pero que luego en un posterior contexto, resulta insuficiente para enfrentarse a nuevas situaciones, y hasta contraproducente cuando su uso habitúa una acción que induce al error.

Brousseau distingue tres tipos de obstáculos que se presentan en el sistema didáctico, estos son los ontogenéticos, didácticos y epistemológicos, el primero de ellos son los que se dan a partir de las condiciones neurofisiológicas en

el estudiante, los didácticos son aquellos que provienen de la enseñanza dentro de un sistema educativo, y los epistemológicos producidos debido a la naturaleza de la construcción del conocimiento dado.

Un ejemplo de este último caso podría darse cuando el estudiante comienza a estudiar el seno en el triángulo rectángulo y llega a considerar, verificar y convencerse que a mayor ángulo se obtiene un mayor valor para el seno, lo que resulta válido en ese marco, sin embargo, cuando el seno es estudiado para un ángulo mayor o igual que un ángulo recto, en posición normal o en la circunferencia trigonométrica, este conocimiento ya no resulta válido, y su afirmación constituiría un obstáculo para poder relacionar el carácter oscilante del seno fuera del triángulo rectángulo. A su vez este conocimiento enmarcado en el seno para el triángulo rectángulo podría devenir en otro error bastante usual, el cual consiste en utilizar las siguientes propiedades

$$\begin{aligned} \operatorname{sen}(\alpha) \cdot \operatorname{csc}(\alpha) &= 1 \\ \operatorname{cos}(\alpha) \cdot \operatorname{sec}(\alpha) &= 1 \\ \operatorname{tan}(\alpha) \cdot \operatorname{cot}(\alpha) &= 1 \end{aligned}$$

para resolver por ejemplo ecuaciones trigonométricas, sin reparar que, estas propiedades se cumplen de manera absoluta solo para ángulos agudos. Pues para ángulos cuadrantales algunas razones no estarán definidas al tener como cociente el cero.

El estudio de los obstáculos epistemológicos ha sido desarrollado también por otros autores, como es el caso de Artigue (1990) quien señala que el análisis epistemológico es necesario para el didáctico pues permite colocar a distancia y bajo control las representaciones epistemológicas de las matemáticas inducidas por la enseñanza, y superar la ilusión de transparencia, es decir, que el análisis epistemológico, reconociendo en primer lugar que los objetos matemáticos de enseñanza no son un conjunto de elementos ya resueltos y simples de arribar, permite al didacta identificar su naturaleza compleja, advirtiendo elementos del objeto en dónde es preciso esclarecer su concepción o construcción a fin de evitar conocimientos erróneos o limitados y poder interpretar racionalmente los hechos o fenómenos didácticos.

Por su parte Ruiz (1994) respecto a la noción de función, identifica desde el programa epistemológico, concepciones y obstáculos asociados a la evolución histórica del concepto de función, las cuales son mostradas a modo de síntesis incluyendo su clasificación en la siguiente tabla:

Tabla 1. Primeras concepciones y obstáculos en la evolución histórica de la noción de función

Primeras concepciones asociadas a la evolución histórica del concepto de función:	Primeros obstáculos asociados a la evolución histórica de la noción de función
<ol style="list-style-type: none"> 1. Identificación de ciertas regularidades 2. Razón o proporción 	<ol style="list-style-type: none"> I. Obstáculos de creencias y convicciones <ol style="list-style-type: none"> 1.1. Obstáculo de la concepción estática. 1.2. Obstáculo de la disociación existente entre magnitudes y número.

Fuente: Adaptado de Ruiz (1994)

■ Metodología

De acuerdo con Méndez (2008) la investigación bibliográfica constituye un proceso de recopilación y selección de estudios con el propósito de conformar un conocimiento sistematizado referido a un tema en particular, y cuya labor

es primordial en el proceso de investigación. Los autores indican también que la investigación bibliográfica suministra los fundamentos teóricos y el contexto histórico poniendo énfasis en el análisis relacional y contextual; y en el caso de la investigación cualitativa se procura encontrar el significado de los procesos, comportamientos y actos, más que una descripción de los hechos.

Los elementos generales que componen la investigación bibliográfica son: definir el tema de trabajo, acotar la necesidad de la información, recopilación, depuración y organización de la información, sistematización y redacción de los hallazgos. A su vez la investigación bibliográfica tiene diversas orientaciones dependiendo su propósito: informativa, promovedora y certificadora. La orientación promovedora es la que se asume en este artículo, pues tiene la finalidad de desarrollar el conocimiento y proponer nuevos argumentos, datos y evidencias mediante una cuidadosa indagación crítica.

Es así que tomando como referente los obstáculos de creencias y convicciones señalados por Ruiz (1998), se pretende realizar un estudio bibliográfico de aquellos trabajos que plantean una revisión histórica y epistemológica del seno trigonométrico, y en este proceso de análisis identificar algunos aspectos comunes, que de acuerdo al marco teórico, evidencien la presencia de formas de pensamiento presentes en la razón seno que se constituyeron en obstáculos para el arribo a la noción seno como función.

■ Una aproximación histórica

Es necesario para iniciar un análisis epistemológico del seno trigonométrico, podamos partir de una noción válida de la Trigonometría. Para dicho propósito recogemos lo expresado por De Morgan (1849) quien en su libro *Trigonometry and double algebra* refiere que en una figura como el triángulo existe una estrecha relación de dependencia única de los ángulos hacia las proporciones de los lados, y de las proporciones de los lados hacia los ángulos, esta estrecha relación existente entre los ángulos y las proporciones de los segmentos, los modos de expresión creados y los resultados obtenidos y aplicados son estudiados por la trigonometría. El autor también considera que la trigonometría se ocupa de estudiar la magnitud ondulante, entendida como aquella que se hace alternativamente mayor y menor, y que no se acerca permanentemente a un límite fijo, y añade que, el álgebra ordinaria no tiene tales funciones en sus formas finitas y aunque las puede poseer como series infinitas, no puede reconocer y establecer fácilmente la propiedad de ondulación.

Por su parte Van Brummelen (2009) inicia su definición de Trigonometría a partir de dos condiciones necesarias: Una medida cuantitativa estándar de la inclinación de una línea a otra, y la capacidad e interés en calcular longitudes de segmentos de línea. Así mismo Montiel (2013) indica que el desarrollo del pensamiento trigonométrico en los estudiantes posee dos dimensiones una relacional y otra funcional, la primera relacionada a identificación de la relación entre ángulos y cuerdas, y a la naturaleza de esta relación, sumado a la posibilidad de cuantificarla mediante razones proporcionales; mientras que en el segundo caso se da cuando dentro de un contexto de variación, en un comportamiento periódico-acotado, se la reconoce como una herramienta predictiva.

Podemos reconocer entonces que la Trigonometría tiene dos aspectos que lo pueden caracterizar y definir, uno de carácter relacional expresado como las razones trigonométricas y el otro funcional, donde se manifiestan las funciones trigonométricas, estas dos nociones se van a ver reflejadas en el proceso histórico de la trigonométrica.

Ya contando con una caracterización del objeto matemático se procede a realizar una revisión epistemológica del seno trigonométrico y de la trigonometría, de los cuales podemos decir que antes que se desarrollaran de manera explícita, éstas se manifestaban a través de actividades prácticas en las que cobraba mayor importancia el resultado que los conceptos y propiedades que estaban subyacentes. Podríamos llamar a estas actividades, como las que precedieron a la trigonometría y a la aparición de elementos conceptuales tales como el seno y coseno.

Es así que Farfán y García (2005) indican que dos civilizaciones de la antigüedad destacan en su trabajo con matemáticas: Babilonia y Grecia. En el caso de los babilonios, los registros indican que manejaron un concepto primitivo de función como respuesta a la necesidad de poder establecer regularidades de los datos obtenidos por la observación de fenómenos naturales. Así mismo, Tello (2016) señala que fue una necesidad para la clase dominante en babilonia comprender algunos fenómenos que se manifestaban en la naturaleza para poder organizar su sociedad desde los aspectos religioso, filosófico y social; en ese sentido, la astronomía les permitía cumplir este objetivo, al darles la posibilidad de poder predecir el movimiento y la posición de los astros, y a su vez la identificación de constelaciones, lo que conllevaría abordar a la noción de tiempo y a la noción de ángulo. Para concretar estas actividades diseñaron tablas que muestren relaciones entre diferentes medidas de ángulos y altitudes, un ejemplo lo constituye la tablilla Plimpton 322 con una antigüedad alrededor del 1900 a 1600 a.c., en la que se observa el uso de ternas pitagóricas.

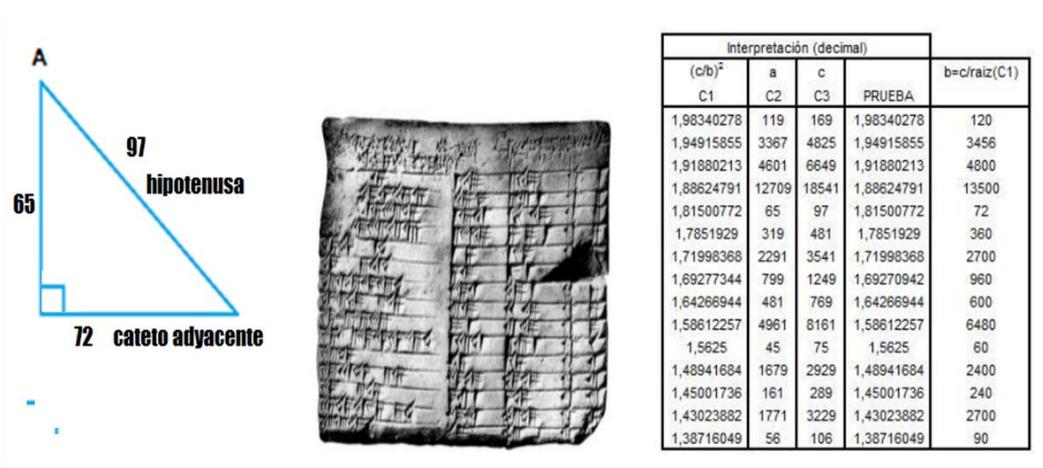


Figura 1. Tablilla de Plimpton 322.
Fuente: Adaptado de Runza (2013, p.5)

En la figura 1 se muestra esta tablilla y su representación en el sistema decimal, además el triángulo con los datos de la fila 5, la relación entre esos datos mediante ternas pitagóricas y lo que sería equivalente desde una perspectiva actual el cuadrado de la secante.

Al respecto Boyer (1986, p.66) señala que esta tabla podría ser tomada como registros de procesos comerciales, sin embargo, en un análisis mayor se identifica un profundo significado en la teoría de números, como un recurso auxiliar para medir las áreas de los cuadrados de los lados de un triángulo rectángulo, y obtener ternas pitagóricas, y que tal vez se pueda relacionar con una especie de prototrigonometría. Además, respecto al uso de tablas en general, reconoce que al igual que los papiros egipcios, las tablas carecen de formulaciones generales; sin embargo, indica el autor indica también que la ausencia de una formulación general de estas tablas, no significaba necesariamente que la generalidad de dichas reglas o principios escapase al pensamiento babilónico, y añade que, si no estuviese presente una regla general sería difícil explicar la semejanza entre problemas de cientos de tabletas con ejercicios que debían ser resueltos con particulares métodos o reglas .

Por su parte, Sastre Vázquez, Rey, y Boubée (2008) manifiestan que si bien es cierto los babilonios no manejaron un concepto de función como tal, la noción de este concepto sí se encontraba implícita la en las tablillas astronómicas, al describir directamente mediante relaciones aritméticas, por ejemplo, los períodos de visibilidad de un planeta y la distancia angular de ese planeta al Sol.

Se observa en este primer contacto histórico, si bien es cierto los babilonios desarrollaron una matemática de carácter práctico, muestran un contexto favorable para la emergencia de la noción de función, por la regularidad que podrían guardar sus procedimientos de resolución a problemas, y por la regularidad de muchas de sus tablas. No obstante, en la civilización griega, y a pesar del alto desarrollo que alcanzaron logrando superar la matemática utilitaria de sus antecesores por una matemática teórica y demostrativa, se desatiende esta noción de función debido a formas de pensamiento fuertemente arraigados y que trascendió inclusive por muchos siglos posteriores.

Los griegos tenían una concepción en la que la matemática correspondía al mundo de las ideas, y como tal, debían mantener un carácter puro, ajena al contacto con situaciones reales o hechos cotidianos. Esta perspectiva de los griegos contribuyó significativamente en el desarrollo de campos de la matemática como la geometría y la aritmética, pasando de una incipiente matemática a una matemática mejor estructurada, con rigor teórico y respaldo en la demostración. Un ejemplo claro de ello está dado por la obra Los Elementos de Euclides, el cual reunía y sistematizaba los conocimientos matemáticos de la época de manera lógica, articulando un amplio cuerpo de proposiciones a partir de un pequeño grupo definiciones y axiomas.

En cuanto a la Trigonometría Griega, esta se manifestó dentro de la astronomía, en donde de acuerdo a Cruz-Márquez (2018) destacan las figuras de Apolonio quien propuso dos modelos geométricos, no predictivos, pero sí capaces de describir los movimientos de los astros; Aristarco, Eratóstenes e Hypsicles, introdujeron la noción de ángulo como cuantificación de la amplitud y la división del círculo en 360 unidades; Hiparco desarrolló la primera tabla trigonométrica posteriormente retomada por Ptolomeo, quien finalmente a mediados del siglo II mediante su obra el Almagesto estructura las ideas relacionadas a la astronomía, y aunque a la postre su planteamiento de geocentricidad y la circularidad de las trayectorias de los planetas resultaron inválidos, los argumentos matemáticos que utilizó para fundamentar este sistema y en especial su tabla trigonométrica, cuya sección se puede apreciar en la figura 2, constituyen las primeras evidencias concretas del nacimiento de nociones trigonométricas.

Κανόνιον τῶν ἐν κύκλῳ εὐθειῶν			Table of Chords		
περιφ. ρειῶν	εὐθειῶν	ἐξηκοστῶν	arcs	chords	sixtieths
Λ'	σ λα κε	σ α β γ	1/2°	0;31,25	0;1,2,50
α	α β γ	ρ α β γ	1°	1;2,50	0;1,2,50
αΔ'	α λδ ιε	σ α β γ	1 1/2°	1;34,15	0;1,2,50
β	β ε μ	ρ α β γ	2°	2;5,40	0;1,2,50
βΔ'	β λζ δ	σ α β γ	2 1/2°	2;37,4	0;1,2,48
γ	γ η κη	σ α β γ	3°	3;8,28	0;1,2,48
γΔ'	γ λθ νρ	ρ α β γ	3 1/2°	3;39,52	0;1,2,48
δ	δ ια ιζ	σ α β γ	4°	4;11,16	0;1,2,47
δΔ'	δ κβ μ	ρ α β γ	4 1/2°	4;42,40	0;1,2,47
ε	ε ιδ δ	σ α β γ	5°	5;14,4	0;1,2,46
εΔ'	ε με κζ	ρ α β γ	5 1/2°	5;45,27	0;1,2,45
ς	ς ιζ μθ	σ α β γ	6°	6;16,49	0;1,2,44
ςΔ'	ς ηθ ια	ρ α β γ	6 1/2°	6;48,11	0;1,2,43
τ	τ ιθ λχ	σ α β γ	7°	7;19,33	0;1,2,42
τΔ'	τ ν ςδ	ρ α β γ	7 1/2°	7;50,54	0;1,2,41
.

Figura 2. Sección de la tabla de las cuerdas de Tolomeo
Fuente: Tomado de Montalvo (2012, p. 21)

Si bien es cierto, ya se gesta en la astronomía griega los primeros pasos de la Trigonometría, esta aún mantenía fuertes vínculos con la Geometría y el pensamiento filosófico griego de entonces. Al respecto, Montiel (2005) señala que una cualidad intrínseca en los griegos al matematizar la astronomía y en consecuencia a al desarrollar trigonometría clásica, los modelos obtenidos son de naturaleza geométrica estática. La astronomía griega recaía en prestar atención a la trayectoria de un astro como un arco correspondiente a una geometría estática.

Por su parte Tello (2016) indica que aunque Tolomeo recoge en su tabla una herramienta que le permite hallar las posiciones periódicas de los astros, la noción de una cantidad variable le era esquiva, en razón al pensamiento de los griegos que aún mantenía. Esto refleja que la trigonometría recayó en el triángulo y la circunferencia aplicada al estudio de la astronomía, se trataba de una trigonometría de cuerdas que se desenvolvía en el contexto estático de la geometría, y en la que se puso énfasis en hallar la medida de la semicuerda en función del ángulo central de una circunferencia.

En este mismo contexto se pueden puntualizar algunas formas de pensamiento procedentes principalmente del idealismo platónico y la filosofía pitagórica que constituyeron en la matemática griega obstáculos epistemológicos para concebir la noción de función y de manera particular la de función trigonométrica. De acuerdo con Ruiz (1994) dentro de los obstáculos de creencias y convicciones se incluye el obstáculo denominado concepción estática, el cual asentaba en los matemáticos griegos una perspectiva de carácter estático de los objetos matemáticos.

Autores como Ruiz (1994) y Farfán y García (2005) señalan que los griegos no eran ajenos a características ligadas íntimamente con los hechos y fenómenos de la realidad, tales como la concepción del cambio y el movimiento, pues incluso, dentro de la perspectiva aristotélica se presentaba el estudio de estos conceptos, sin embargo, desde su filosofía también, planteaban que el cambio y el movimiento se encontraban fuera de las matemáticas, y destinadas al estudio que se realiza dentro de la Física, es decir, se entendía la Física como la ciencia del movimiento, mientras que la matemática era estrictamente teórica, asumiendo que los objetos matemáticos no están sujetos al movimiento excepto aquellos a los que se refiere la astronomía. De esta manera se mantenía alejada la noción de cambio y variación en las matemáticas, y en la física y astronomía donde sí eran tratables se producían modelos de carácter geométrico estático lo que motivó que se ponga mayor atención a las incógnitas que a las variables, y en consecuencia a desarrollar ecuaciones y proporciones, relegando la noción de función.

Aunado a ello, se hace manifiesto también otro fuerte obstáculo epistemológico, y ubicado también dentro de la categoría de obstáculos de creencias y convicciones, denominado como la disociación entre magnitud y número, fortalecido en la escuela pitagórica, quienes concebían el número como elemento fundamental del universo, procuraron las comparaciones entre magnitudes sean expresado por proporciones sintetizado como un número.

Ruiz (1994) sostiene que esta concepción constituye un obstáculo epistemológico pues cuando los griegos trabajan las proporciones les era muy difícil distinguir la relación entre magnitudes de diferente tipo, ya que siempre comparaban cantidades de la misma naturaleza. Un ejemplo de ellos sería considerar que los griegos podrían pensar con naturalidad y simpleza, que el área total de un cubo es proporcional al área de la superficie de una de sus caras en relación de 6 a 1; sin embargo, lo que sí les costaría mucha dificultad sería afirmar que el área total de un hexaedro es proporcional a longitud de la arista, pues si se habla de la magnitud área no correspondería relacionarla a una magnitud diferente como la longitud de una arista. Quizá por ello los griegos lograron establecer proporciones admirables como la formulada por Arquímedes, quien a pesar de equilibrar el rigor matemático con el trabajo empírico y lograr formular una brillante relación entre volúmenes del cono, la esfera y el cilindro, lo realizó con prevalencia de lo proporcional entre magnitudes del mismo tipo.

Según René de Cotret (1985, en Farfán y García, 2005) las nociones de proporcionalidad, inconmensurabilidad y la disociación en el pensamiento entre número y magnitud fueron las más negativas pues limitaron el desarrollo del concepto de función e impidieron que en la edad media pueda concretarse los intentos de explicar cuantitativamente algunos fenómenos racionales. Así mismo, Ruiz (1994) señala que en el obstáculo disociación entre magnitud y número, los números se consideran enteros y discretos, sin embargo, las magnitudes son continuas, así mientras que la noción de número continuo no sea aceptada, será muy difícil construir la noción de función, ya que los números, así considerados, solo permitirían construir una representación discreta de los fenómenos de la naturaleza, enmascarando la continuidad existente en el carácter variable y continuo de los mismos.

Estos obstáculos particularmente descritos y señalados además de otros factores y condiciones políticas, sociales y filosóficas, ralentizaron la emergencia del concepto de función y en consecuencia también el concepto de función seno. Luego del trabajo de Tolomeo realizado en el siglo II d.c., tuvieron que pasar cerca de ocho siglos para que Abul Wefa introdujera el radio unitario llevando la circunferencia a una longitud de 2π , obteniendo relaciones entre seno, coseno y tangente, además propuso nuevas tablas trigonométricas con una precisión de 8 decimales, pero no es hasta alrededor del siglo XVII cuando se comienza a reconocer las propiedades periódicas en situaciones físicas las que darán las condiciones para posibilitar el seno trigonométrico con un carácter más analítico.

Al respecto Tello (2016) indica que fueron necesarios diferentes tipos de problemas para que la función trigonométrica se acerque al significado que tiene en la actualidad, aquellos problemas tenían la particularidad de buscar modelos que describieran fenómenos periódicos, entre ellos, el problema de la cuerda vibrante y la matematización del calor.

Un ejemplo de lo mencionado es el caso de la ley de Hooke publicada en 1678, en donde se busca describir el movimiento de un peso sobre un resorte estirado, por medio de un diagrama en el que la velocidad de este peso es como ciertas coordenadas en un círculo, consideradas como los senos de los arcos cortados. Aparece también el problema de la cuerda vibrante, problema que llevó a una ecuación diferencial y que tuvo también la oportunidad de generar el cálculo de la función seno. Este problema fue tratado en primer lugar por Taylor, quien como explica Katz (1987) se mostró más interesado en el tiempo periódico del movimiento de la cuerda sin llegar a expresar esta ecuación en términos del seno mismo.

Según Katz (1987), las funciones trigonométricas ingresaron al análisis en 1669 en *De Analysi* la Obra de Isaac Newton en donde plantea una serie de potencias para el seno, sin embargo, es en 1748 gracias a la intervención de Leonhard Euler mediante su trabajo *Introductio in Analysin Infinitorum* donde se trató estas funciones en el análisis matemático, al solucionar ecuaciones diferenciales lineales y posteriormente generar un método general para resolver ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes constantes. Tello (2016) indica que en el capítulo VII de este libro, denominado *On Transcendental Quantities Which Arise from the Circle* Euler proporciona un tratamiento numérico para la función trigonométrica, abordando sus distintas propiedades, desprendidas ya del carácter geométrico estático el triángulo y en las cuerdas de un círculo.

■ Resultados

De acuerdo con el estudio bibliográfico realizado se ha encontrado que existe un profundo trabajo elaborado por Ruiz (1994) que identifica obstáculos epistemológicos ligados a la evolución histórica de la función, entre ellos los relacionados a las primeras concepciones históricas: los obstáculos de creencias y convicciones.

Se ha puesto de manifiesto también, producto del trabajo bibliográfico, que en un primer momento histórico los babilonios tenían condiciones favorables para poder arribar a la noción de función ligada a la regularidad de su práctica matemática. Además, se observa que distintos autores muestran en común el aspecto estático de la matemática griega, al cual estuvo ligado los primeros indicios y pasos de la trigonometría, lo que se vio reflejado en una matemática estructurada, teórica y capaz de realizar demostraciones, pero distante de una noción actual de función.

■ Consideraciones finales

Finalmente, el estudio bibliográfico realizado permite establecer una relación que involucra los obstáculos de la concepción estática y de la disociación existente entre magnitudes y número, presentes en la evolución histórica de

la noción de función; con un primer momento histórico donde la trigonometría se vincula a una astronomía y geometría estática, distante de la noción de función tal como la conocemos en la actualidad.

Atendiendo a estas consideraciones, un análisis didáctico para la enseñanza actual de la función seno, deber tomar en cuenta que se pueden presentar obstáculos análogos a la concepción estática y a la disociación entre magnitud y número, ligados al estudio de la geometría clásica principalmente al tratar el triángulo y la circunferencia.

Por consiguiente, se debe considerar que el abordaje de la función seno no puede verse ligada a la utilización de un medio estático, el triángulo rectángulo o la circunferencia; es necesario plantear una posible razón de ser, la cual puede involucrar un contexto donde sea necesario un proceso de modelización de un fenómeno periódico.

■ Agradecimientos

Agradecemos a la Pontificia Universidad Católica del Perú – PUCP, Escuela de Posgrado – Maestría Enseñanza de las Matemáticas, específicamente a la línea investigación Epistemología de las matemáticas en la didáctica de las matemáticas: la antropología del conocimiento matemático y el diseño de secuencias didácticas, por el apoyo brindado para concretar la presente investigación.

■ Referencias bibliográficas

- Artigue, M. (1990). Épistémologie et didactique, *Recherches en didactique des mathématiques*, 10, (2.3), 241-286.
- Boyer, C. (1986). *Historia de la matemática*. (M. Martínez Pérez, Trad.). Madrid: Alianza
- Brousseau, G. (1983). Les obstacles épistémologiques et les problèmes en mathématiques, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, (4). 2, 164–198.
- Buendía, G. y Montiel, G. (2009). Acercamiento socioepistemológico a la historia de las funciones trigonométricas. P. Lestón (Ed.) *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* 22, 1287-1296. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.
- Cruz-Márquez, G. J. (2018). *De Sirio a Ptolomeo: una problematización de las nociones trigonométricas* (Tesis de Maestría), Instituto Politécnico Nacional, Ciudad de México.
- Katz, V. (1987). The calculus of the trigonometric functions. *Historia Mathematica*, 14(4), 311-324. Recuperado de <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0315086087900644?via%3Dihub> [Consulta: 28 de mayo de 2019].
- Ruiz, L. (1994). *Concepciones de los alumnos de Secundaria sobre la noción de función: Análisis epistemológico y didáctico*. (Tesis Doctoral), Universidad de Granada, Granada.
- Méndez, A. (2008). *La investigación en la era de la información, guía para realizar la bibliografía y fichas de trabajo*. México: Trillas.
- Montiel, G. (2005). *Estudio socioepistemológico de la función trigonométrica*. (Tesis de Doctorado no publicada). Centro de investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada-IPN, México.
- De Morgan, A. (1849). *Trigonometry and double algebra*. Recuperado de <https://archive.org/details/trigonometrydoub00demoiala/page/iv>. [Consulta: 28 de mayo de 2019].
- Montiel, G. (2013). *Desarrollo del pensamiento trigonométrico*. México D.F., Subsecretaría de Educación Media Superior. Recuperado de: http://www.sems.gob.mx/work/models/sems/Resource/6586/1/images/desarrollo_del_pensamiento_trigonometrico_baja.pdf

- Farfán, R. y García, M. (2005). El Concepto de Función: Un Breve Recorrido Epistemológico. En J. Lezama, M. Sánchez y J. Molina (Eds.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* 18, 489-494. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.
- Luján, P. (2019). *Modelización de la función seno: un recorrido de estudio e investigación sobre la respuesta estructural de un edificio frente a un sismo*. (Tesis de maestría en proceso de sustentación), Pontificia Universidad Católica del Perú. Perú.
- Sastre Vázquez, P., Rey, G., & Boubée, C. (2008). El concepto de función a través de la historia. *UNIÓN Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, 16, 141-155.
- Sierpinska, A. (1985). Obstacles épistémologiques relatifs à la notion de limite. *Recherches en didactique des mathématiques*; 6(1), 5-67.
- Tello, J. (2016). *Surgimiento de la función trigonométrica: Aspectos histórico-epistemológicos*. (Tesis doctoral), Universidad del Valle, Santiago de Cali.
- Van Brummelen, G. (2009). *The mathematics of the heavens and the Earth: the early history of trigonometry*. Princeton University Press.