VOL 33, NÚMERO 2, AÑO 2020

USO DE SOFTWARE LIBRE EN LA INTERPRETACIÓN GEOMÉTRICA DE CONCEPTOS DE ÁLGEBRA LINEAL

USE OF FREE SOFTWARE IN GEOMETRIC I NTERPRETATION OF LINEAR ALGEBRA CONCEPTS

Carlos Oropeza Legorreta, José Isaac Sánchez Guerra, Miguel de Nazareth Pineda Becerril
Facultad de Estudios Superiores Cuautitlán UNAM. (México)
coropeza96@hotmail.com, joejade@hotmail.com, mnazarethp@gmail.com

Resumen
La intención principal del trabajo es reportar evidencias que destacan la importancia de incluir el uso de software libre para estudiar la interpretación geométrica de algunos conceptos de álgebra lineal, a través del análisis visual de su comportamiento particular. Se reconoce en diversas investigaciones que dan cuenta de complicaciones inherentes al proceso de enseñanza y aprendizaje del álgebra lineal, que resulta significativo instrumentar otras propuestas que permitan explorar situaciones didácticas para fortalecer y consolidar los conceptos que se incluyen en el estudio. En el proyecto que se ha venido desarrollando desde hace varios años con estudiantes de ingeniería se incluye la interpretación de los resultados analíticos desde una perspectiva geométrica y el reforzamiento de éstos a través de utilizar tecnología, este hecho se ha traducido en nuestra comunidad de estudiantes como una estrategia que permite generar una oportunidad de desarrollo. Seguimos explorando también con ejemplos de traslación y rotación de objetos utilizando transformaciones lineales.

Palabras clave: software libre, interpretación, álgebra lineal

Abstract
This work is mainly intended to report on evidences that highlight the significance of including free software use to study the geometric interpretation of some linear algebra concepts through the visual analysis of its specific behavior. In several research works that show complexities inherent in the teaching-learning process of linear algebra it is recognized that it is significant to implement other proposals that allow exploring didactic situations to strengthen and consolidate the concepts included in this study. The project that has been carrying out with engineering students for several years includes: the interpretation of analytic results from a geometric perspective, and their reinforcement by using technology; this fact has been recognized in our students' community as a strategy that allows creating a development opportunity. We also keep on investigating with examples of movement and rotation of objects using linear transformations.

Key words: free software, interpretation, linear algebra

Introducción

Al reconocer y distinguir que la tecnología aparece sistemáticamente en nuestro entorno cotidiano, y que lentamente ha sido incorporada en la escuela bajo una estrategia determinada, o bien, de manera arbitraria entra súbitamente e irrumpe en el salón de clase de la escuela tradicional por decisión de alguien, este hecho se han provocado grandes cambios. En el estudio de las matemáticas se cuenta con una gama amplia de enfoques, entre otros el que tiene que ver con el uso de la tecnología. Sin embargo, una de las metas generales del proceso de enseñanza y aprendizaje de esta disciplina consiste en promover que los alumnos desarrollen un conocimiento flexible, competitivo y aplicable. De manera particular se ha reconocido que al estudiar álgebra lineal resulta complicado comprender los conceptos que se involucran en su análisis esto se debe a la naturaleza abstracta de la asignatura. En la actualidad también se hace necesario replantear estrategias alternas que permitan revitalizar y regenerar dicho conocimiento adaptándolo a nuevas situaciones didácticas. Las generaciones que ingresan a la escuela de ingeniería en donde se ha realizado el proyecto, cuentan con un nivel aceptable con respecto al uso de la tecnología. Este hecho ha sido una de las justificantes que dieron origen a las estrategias que se incluyen en el estudio. Al inicio las exploraciones se realizaron utilizando el software Maple, pero surgió un aspecto limitante y es que para su uso se necesita contar con una licencia cuyo costo nos dejó fuera de su alcance y por ello optamos ahora utilizar software libre: incluido entre estos Geogebra, aplicaciones para el teléfono celular (Matway, Math42) y páginas de internet como matrixcal.org., etc.

Por otra parte, se ha reflexionado y se afirma que el docente aunque reconoce el diario evolucionar de la sociedad debido los múltiplos cambios en las formas de comunicación tendrá que adaptarse y hacerle frente a una nueva orientación de su profesión. En este entorno social de cambio, el deberá tener una nueva actitud, una disposición a aprender, a innovar tanto desde el punto de vista de la educación, como desde el punto de vista tecnológico, deberá tener la mente abierta, probar ideas nuevas y buscar nuevas formas de organizar sus actividades y la enseñanza en su aula y su comunidad. En consecuencia, el profesor también es un agente de cambio por lo que la transformación y actualización de la escuela en parte le corresponde. Sin embargo, en algunos espacios educativos lo que se experimenta es una gran resistencia al cambio y el proceso de actualización se da de manera muy lenta o en los casos extremos resulta casi imposible que se produzca dicho cambio.

Fundamento teórico

Recientemente se ha reconocido que debido al desarrollo de las sociedades en cuanto a la modernidad se refiere y la cantidad de información vertida sobre los medios de comunicación, se ha venido incrementando las habilidades visuales en el ser humano o al menos con respecto a la necesidad de utilizarla. Este hecho tiene que ver con la cantidad extraordinaria de información que en todos los ámbitos se difunde de manera global, es decir, los especialistas se han dado a la tarea de utilizar el recuso visual como una estrategia importante que de manera natural predomina en cualquier sociedad.

En relación al proceso de enseñanza y aprendizaje del álgebra lineal, se han considerado diversas estrategias alternas de análisis entre las que destaca la incorporación del uso de significados de corte geométrico y el tránsito entre distintos registros de representación. En ese sentido la importancia de las figuras geométricas radica en el hecho de que forman un importante soporte intuitivo para el diseño de actividades didácticas en esta asignatura. Es decir dejan ver mucho más de lo que los enunciados dicen, permiten la ilustración de proposiciones, la exploración de resultados de situaciones no convencionales, por ejemplo encontrar el significado de base en el conjunto solución de un sistema de dos ecuaciones con tres incógnitas o la interpretación gráfica de un cambio de base en tercera dimensión.

En el proyecto que el grupo de trabajo del departamento de matemáticas ha desarrollado por varios años con estudiantes de ingeniería, la visualización juega un rol determinante y se define como “el producto y proceso de creación, interpretación y reflexión sobre dibujos e imágenes” (Arcavi, 2003, p. 215), mismo que está ganando una mayor aceptación en el análisis de conceptos matemáticos y en la enseñanza de éstos.

En esa misma dirección, Duval (1993) afirma que la lectura de representaciones gráficas presupone distinguir las variables visuales de las variaciones correspondientes en la escritura algebraica mediante una interpretación global, contraria a la práctica de la lectura de puntos asociados a una pareja de números. Además, comenta que en la interpretación global de las propiedades de una representación gráfica está presente una imagen correspondiente a un “objeto” descrito por una expresión algebraica. Una modificación de la imagen conduce a un cambio en la interpretación de la expresión algebraica lo que implica construir una variable visual facilitando la interpretación de la gráfica. Lo anterior nos conduce a un análisis de congruencia entre dos registros que representan al mismo objeto de estudio, situación que permite identificar todos los cambios posibles de la imagen en función de los cambios en la escritura algebraica.

Sobre esta perspectiva, Rojano (2000) argumenta:

> Es difícil encontrar ejemplos de su implementación en los sistemas educativos. Este acercamiento que posibilita reformular a fondo lo que hay que enseñar, cómo enseñarlo y el rol del profesor, ha entrado en conflicto en algunos países con la cultura escolar existente, generada en buena medida por el currículo conservador que no da espacio a un alumno que ha adquirido cierta autonomía en el aprendizaje a través de un uso intensivo de las TIC fuera de la escuela. (p. 138).

En su trabajo, da Ponte (2000) afirma que el profesor:

> Tiene que ser un explorador capaz de percibir lo que le puede interesar y aprender por sí sólo o junto con sus colegas más próximos a sacar partido de las respectivas potencialidades. Tal como el alumno, el profesor acaba por tener que estar siempre aprendiendo. De ese modo, se aproxima a sus propios alumnos. Deja de ser autoridad [que todo lo sabe] para pasar a ser, muchas veces, aquel que menos sabe (o que está lejos de constituir una modificación no menor de su papel profesional). (p. 76).

Metodología

El estudio realizado se caracteriza desde una perspectiva cualitativa, pues ha sido un proceso que se ha retroalimentado sistemáticamente con las aportaciones de las puestas en escena de los diseños de actividades que se han realizado durante varios semestres. “En un estudio cualitativo, las decisiones respecto al muestreo reflejan las premisas del investigador acerca de lo que constituye una base de datos creíble, confiable y válida para abordar el planteamiento del problema”. (Hernández, Fernández y Baptista, 2014, p. 382).

El proyecto de utilizar una resignificación de los objetos matemáticos con fundamentos visuales incluidos en el estudio se ha monitoreado cada semestre en dos o tres grupos de aproximadamente 40 alumnos cada uno. En la puesta en escena de las actividades se les pide a los participantes trabajar en equipos de cuatro o cinco personas durante sesiones de dos horas cada una, ellos plantean sus soluciones y al final se discuten las soluciones de manera grupal y se utiliza software como instrumento verificador de resultados y de los análisis gráficos correspondientes.

Resultados

En este estudio se proporcionan dos ejemplos representativos de nuestro proyecto el cual considera la interpretación de los resultados analíticos desde una perspectiva geométrica y el reforzamiento de éstos a través del uso de la tecnología, en el caso particular que nos ocupa se propone utilizar el software libre Geogebra en el estudio del concepto de combinación lineal de matrices y polinomios. Los dos objetos matemáticos seleccionados tienen una característica en común, su análisis de corte geométrico no aparece en los libros de texto recomendados en las escuelas de ingeniería en México. En consecuencia, consideramos que describir una estrategia alterna de solución podría aportar elementos para continuar explorando otros ejemplos que permitan llegar a una generalización.

En el primer ejemplo se analiza la combinación lineal de un conjunto de matrices, se resuelve de manera analítica por el método de Gauss Jordan y se verifica el resultado a partir de sustituir los valores correspondientes en la ecuación inicial. Además, se agrega la imagen de la página de internet que resuelve paso a paso el sistema de ecuaciones resultante.

Ejemplo 1. Verificar de manera analítica y gráfica si el siguiente vector $A = \begin{bmatrix} -3 & 2 & 8 \\ -1 & 9 & 3 \end{bmatrix}$ es combinación lineal de los vectores $B = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 4 \\ 1 & 1 & 5 \end{bmatrix}$ y $C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 \\ -2 & 3 & -6 \end{bmatrix}$.

Solución. Para resolver en forma analítica este ejemplo, el proceso inicia al plantear la ecuación que nos conduce a la solución, esto es: $\boldsymbol{A = c_1 B + c_2 C}$ **.**

Después se sustituyen los términos incluidos en la ecuación, se simplifican los productos de escalar por vector, se simplifica la suma de vectores y de la igualdad final entre vectores se forma un sistema de ecuaciones lineales (ver Figura 1) el cual se resuelve por el método de Gauss Jordan y se comprueba el resultado (Figura 2).

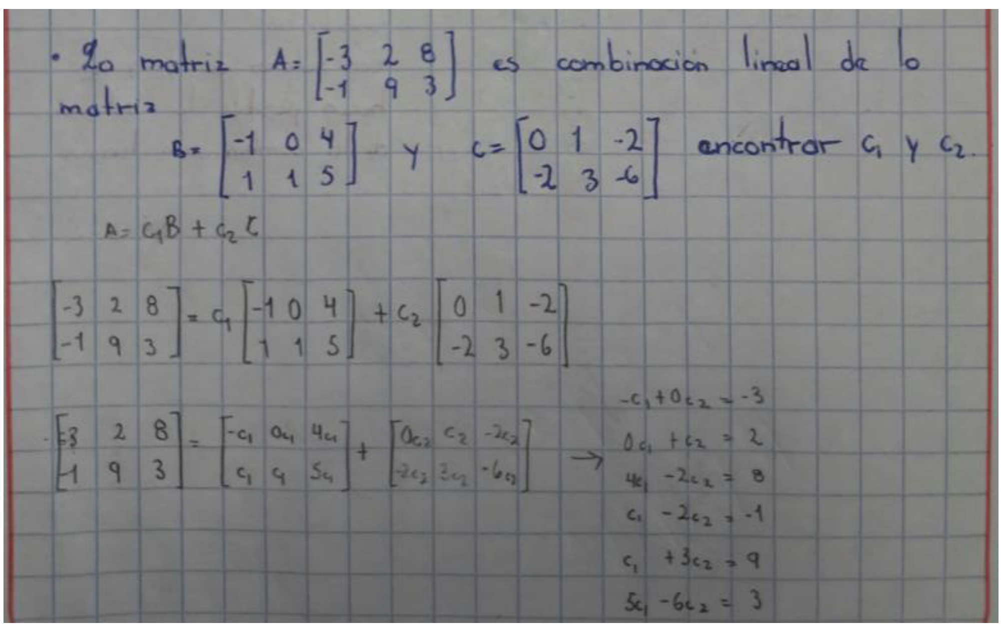

Figura 1. Sistema de ecuaciones resultante.

Los equipos de estudiantes participantes con frecuencia comentan que el tipo de sistema resultante en el ejemplo no es convencional para ellos, otros invierten bastante tiempo para darse cuenta de que si es posible resolverlo.

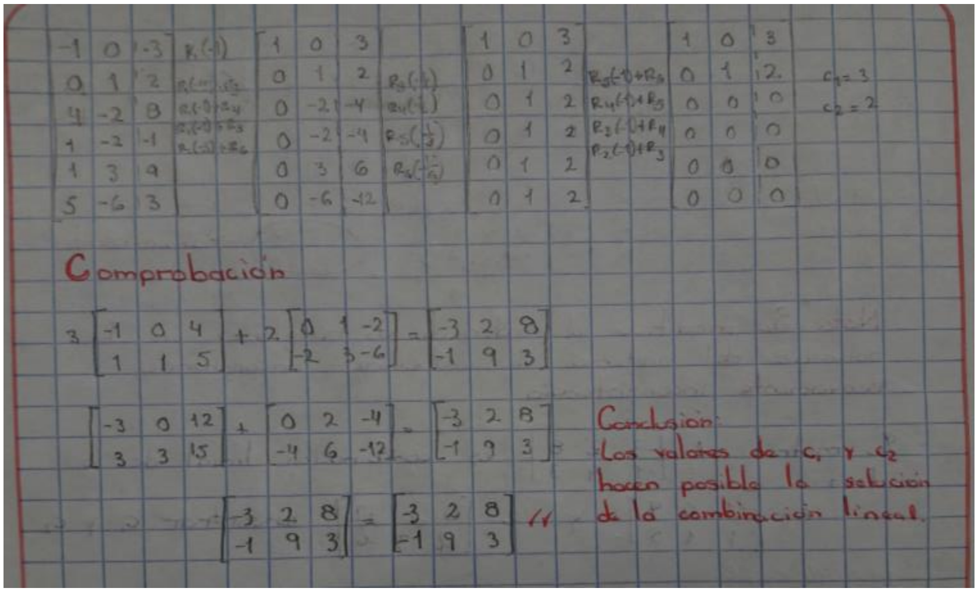

Figura 2. Solución del sistema de ecuaciones y su correspondiente comprobación.

Otra forma de verificar la solución del sistema de ecuaciones es a través de utilizar la página matrixcalc.org.

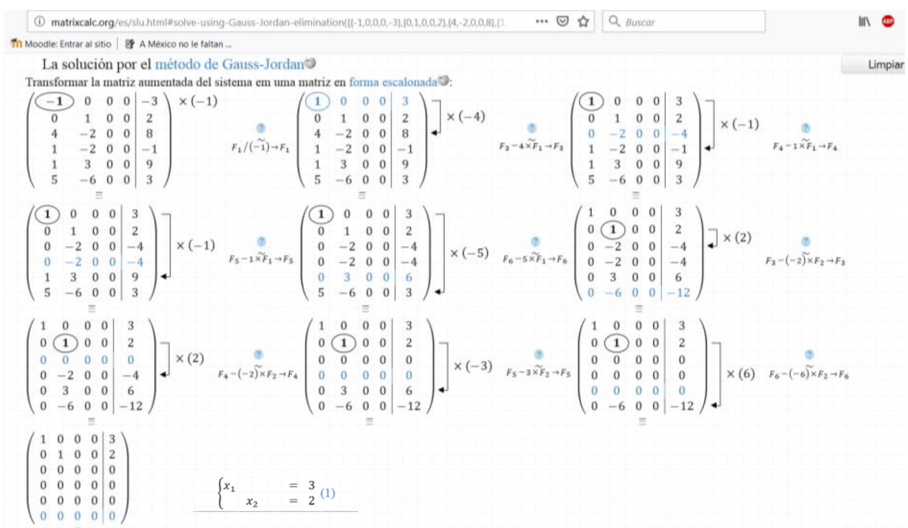

Figura 3. Solución del sistema de ecuaciones utilizando tecnología.

En el proyecto que hemos implementado incluye utilizar diversos recursos tecnológicos en la Figura 3 se puede identificar con precisión la aplicación del método de Gauss Jordan paso a paso, esta estrategia complementaria ha sido aceptada con beneplácito por los estudiantes pues argumentan que ya no es necesario esperar a que el profesor revise sus procedimientos, con el uso de la tecnología ellos mismos se pueden darse cuenta si es que llegaron a resultados correctos o no. Con respecto a la construcción de la gráfica se recomienda utilizar papel milimétrico, regla, escuadras, colores para identificar los componentes de cada una de las matrices. Como se puede apreciar en la Figura 4 se colocan los tres ejes (el primero representa el número del renglón, el segundo indica la columna y el tercero corresponde al valor posicional de cada elemento de la matriz).

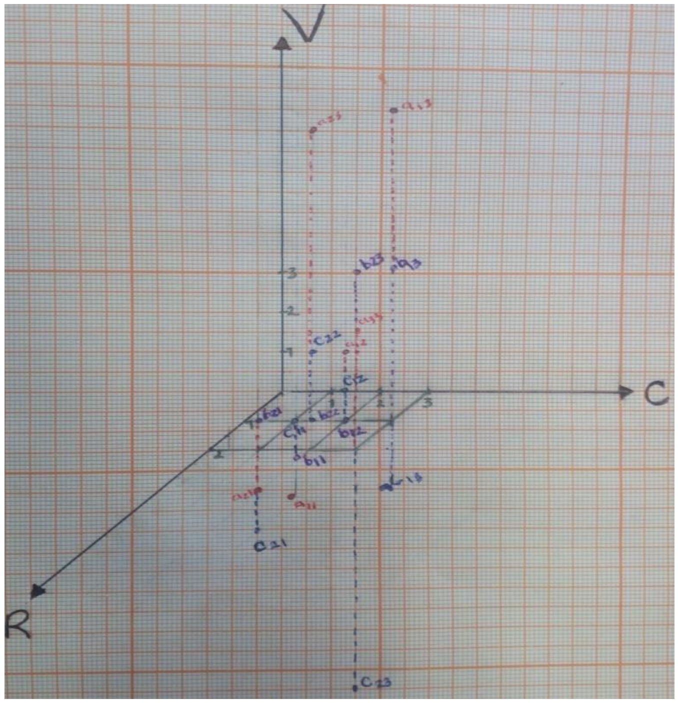

Figura 4. Solución que incluye la interpretación geométrica de la combinación lineal de matrices.

Una segunda alternativa para realizar el análisis del resultado gráfico y que se incluye en la solución de las actividades, consiste en utilizar el apoyo que ofrece el software libre Geogebra como se indica en la Figura 5, la ventaja que puede ser potenciada con dicho software tiene que ver con la parte animada que se aplica a la gráfica y se logra con solo deslizar el dedo sobre la pantalla lo cual permite visualizar diferentes ángulos de la misa.

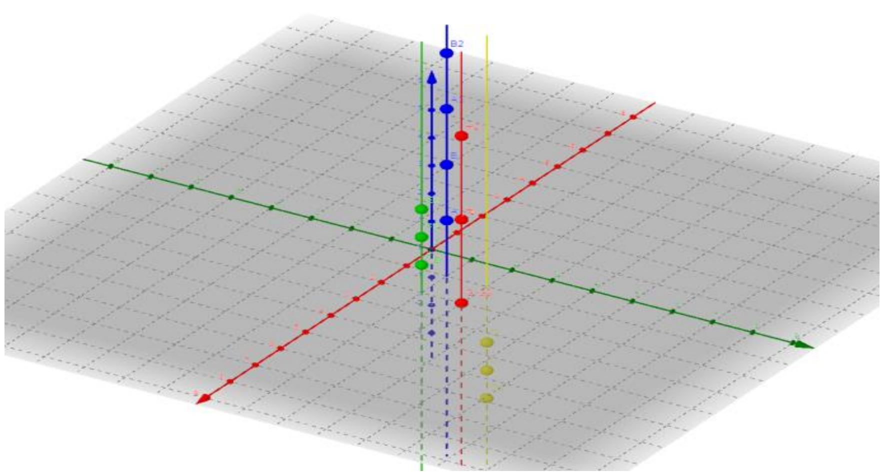

Figura 5. Interpretación geométrica de la combinación lineal de matrices con el apoyo de software.

Análisis gráfico. En la Figura 4 se puede observar que la gráfica de una matriz considera tres parámetros el renglón, columna y el valor posicional del término a_{ij}. Este tipo de representación gráfica se convierte con frecuencia en un problema para los estudiantes pues el sistema de referencia es solo una representación de la tercera dimensión, en realidad los trazos se realizan en el plano y el parámetro de profundidad no es claro. Otro aspecto por destacar y que en ocasiones provoca inconvenientes tiene que ver con el uso de las escalas proporcionadas en cada uno de los ejes y el manejo del equipo de medición.

En el segundo ejemplo se analiza la combinación lineal de un conjunto de polinomios de segundo grado, primero se solicita una solución en forma analítica la parte central consiste en resolver un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas por medio del método de Gauss Jordan y se realiza la comprobación del resultado. Con respecto a la verificación de los valores calculados se agrega la imagen de la página de internet que resuelve paso a paso el sistema resultante. En las evidencias proporcionadas se incluye las gráficas a color correspondientes al conjunto de polinomios y su representación equivalente como vectores flecha.

Ejemplo 2. Sean los siguientes vectores $P_1 = 2 + x + 4x^2$, $P_2 = 1 - x + 3x^2$ y $P_3 = 3 + 2x + 5x^2$. Comprobar si P es una combinación lineal de P_1, P_2 y P_3; considerar que $P = -9 - 7x - 15x^2$.

Solución. De manera similar que el ejemplo anterior, en este caso la ecuación que conduce a la solución es: $c_1V_1 + c_2V_2 + c_3V_3 = P$.

Sustituir términos $-9 - 7x - 15x^2 = C_1\left(2 + x + 4x^2\right) + C_2\left(1 - x + 3x^2\right) + C_3\left(3 + 2x + 5x^2\right)$.

Simplificar los productos según sea el caso

$$-9 - 7x - 15x^2 = 2C_1 + C_1x + 4C_1x^2 + C_2 - C_2x + 3C_2x^2 + 3C_3 + 2C_3x + 5C_3x^2 .$$

Asociar los términos semejantes

$$-9 - 7x - 15x^2 = \left(2C_1 + C_2 + 3C_3\right) + \left(C_1 - C_2 + 2C_3\right)x + \left(4C_1 + 3C_2 + 5C_3\right)x^2 .$$

De la igualdad entre vectores (en este caso polinomios), se dice que dos polinomios son iguales si término a término son iguales en consecuencia se produce el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} 2C_1 + C_2 + 3C_3 &= -9 \\ C_1 - C_2 + 2C_3 &= -7 \\ 4C_1 + 3C_2 + 5C_3 &= -15 \end{aligned}$$

Ahora se procede a resolver el sistema resultante por el método de Gauss-Jordan:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 3 & -9 \\ 1 & -1 & 2 & -7 \\ 4 & 3 & 5 & -15 \end{array}\right] R_2 \leftrightarrow R_1 \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & -7 \\ 2 & 2 & 3 & -9 \\ 4 & 3 & 5 & -15 \end{array}\right] (-2)R_1 + R_2 \to R_2,\ (-4)R_1 + R_3 \to R_3 \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & -7 \\ 0 & 3 & -1 & 5 \\ 0 & 7 & -3 & 13 \end{array}\right]$$

$$\frac{1}{3}R_2 \to R_2 \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & -7 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{3} & \frac{5}{3} \\ 0 & 7 & -3 & 13 \end{array}\right] (1)R_2 + R_1 \to R_1,\ (-7)R_2 + R_3 \to R_3 \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \frac{5}{3} & -\frac{16}{3} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{3} & \frac{5}{3} \\ 0 & 0 & -\frac{2}{3} & \frac{4}{3} \end{array}\right] \left(-\frac{3}{2}\right)R_3 \to R_3$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \frac{5}{3} & -\frac{16}{3} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{3} & \frac{5}{3} \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right]\left(-\frac{5}{3}\right)R_3 + R_1 \to R_1, \qquad \left(\frac{1}{3}\right)R_3 + R_2 \to R_2 \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right]$$

$$\therefore \quad \begin{array}{l} C_1 = -2 \\ C_2 = 1 \\ C_3 = -2 \end{array}$$

Para realizar Comprobación:

$$-9-7x-15x^2 = -2\left(2+x+4x^2\right)+1\left(1-x+3x^2\right)-2\left(3+2x+5x^2\right)$$
$$-9-7x-15x^2 = -4-2x-8x^2+1-x+3x^2-6-4x-10x^2$$
$$-9-7x-15x^2 = \left(-4+1-6\right)+\left(-2x-x-4x\right)+\left(-8x^2+3x^2-10x^2\right)$$
$$-9-7x-15x^2 = -9+\left(-7x\right)+\left(-15x^2\right)$$
$$-9-7x-15x^2 = -9-7x-15x^2$$

Otra forma de verificar la solución del sistema de ecuaciones es a través de utilizar la página matrixcalc.org (Ver Figura 6).

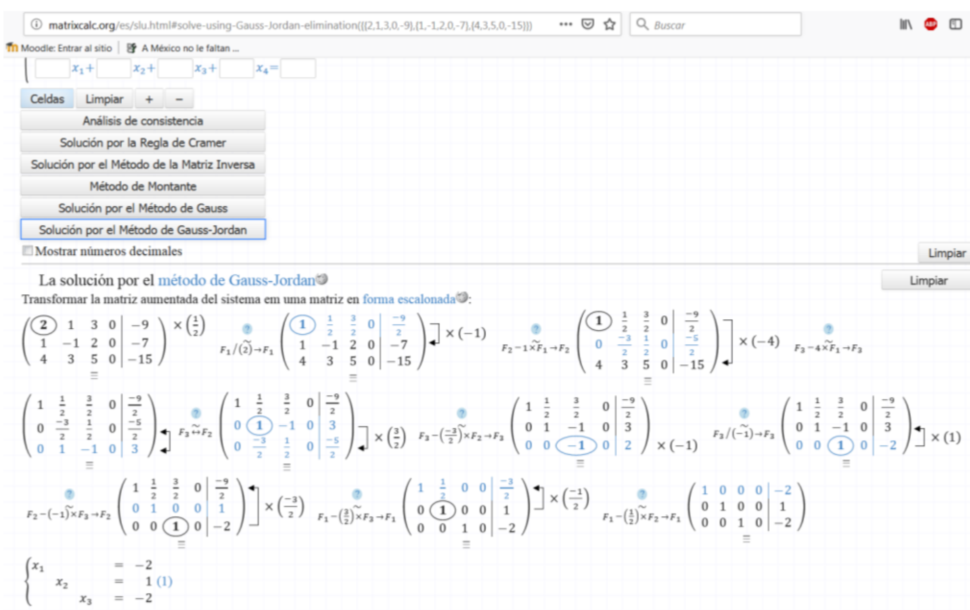

Figura 6. Solución del sistema de ecuaciones utilizando tecnología.

Para realizar el análisis del resultado gráfico se incluyen dos imágenes elaboradas con el apoyo que ofrece el software libre Geogebra. Como se puede apreciar en la Figura 7, el uso de colores juega un papel determinante en la identificación de cada uno de los polinomios, sin embargo, su representación gráfica como parábolas se convierte en una complicación en su manipulación de parámetros que los estudiantes deben superar para alcanzar un resultado apropiado.

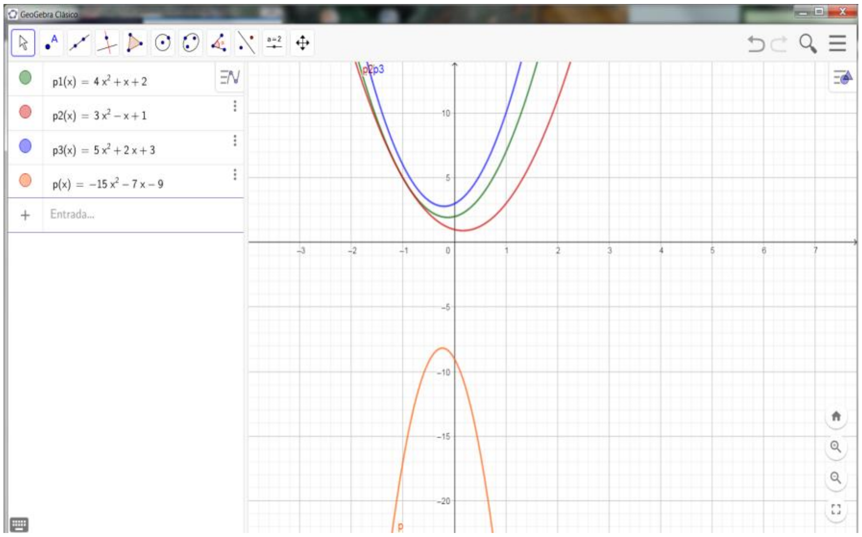

Figura 7. Interpretación geométrica de la combinación lineal de polinomio con el apoyo de software.

Una vez que se tiene la gráfica en su forma polinomial, se transforman éstos a partir del isomorfismo en su forma vectorial, en consecuencia, se producen tres vectores (v_1, v_2 y v_3). Nuevamente haciendo uso del software Geogebra, se grafican los vectores en tercera dimensión. Los resultados obtenidos han demostrado que los estudiantes pueden graficar vectores en R^3 de manera más sencilla que un polinomio de segundo grado. En la Figura 8 se muestra una representación geométrica isomorfa del polinomio y se puede distinguir que se hace más sencilla la comprobación de la combinación lineal a través de esta estrategia. Recordar que por este medio se puede incorporar la animación que ayuda a tener mayor precisión de las características de los vectores.

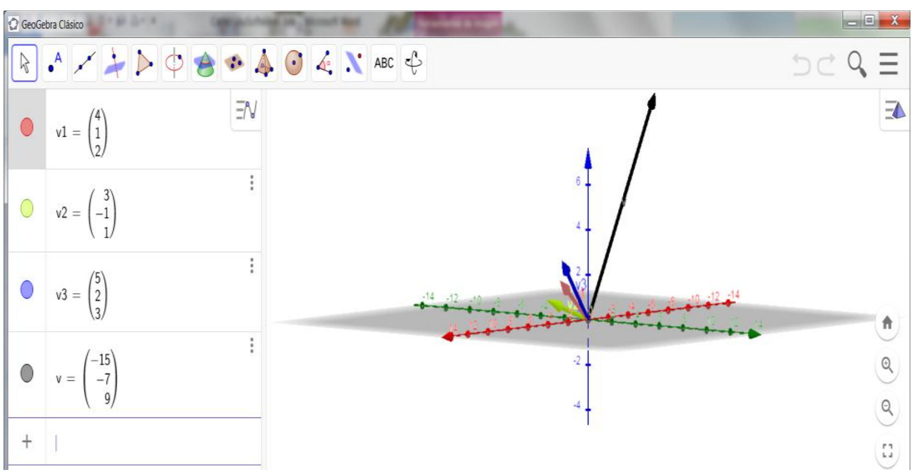

Figura 8. Interpretación geométrica de la combinación lineal de polinomio de segundo grado isomorfo con vectores en tercera dimensión.

Reflexiones o conclusiones

Algunas de las regularidades que se han derivado de los análisis realizados a los resultados obtenidos en la parte experimental de la propuesta son los siguientes: Con respecto al tratamiento de corte geométrico de las matrices, se tiene que es posible determinar tanto una combinación lineal entre ellas o la dependencia lineal a partir de verificar la relación que guardan los valores de los elementos a_{ij}. En el caso de los polinomios, se puede realizar el análisis gráfico con respecto a la altura correspondiente a cada valor de las abscisas que se decidan utilizar y los productos resultantes de los escalares calculados.

Como se puede observar en las evidencias incluidas en este trabajo, las soluciones que emplean el uso de la tecnología permiten visualizar el resultado a partir de los rasgos geométricos de los vectores. En el caso de las matrices se pueden comparar las unidades representadas como puntos que identifican a cada componente a_{ij} de esta y procesar estas magnitudes para darle un significado a los valores calculados de manera analítica.

Sin embargo, en algunas ocasiones sucede que al momento en que los estudiantes deben desarrollar actividades donde las gráficas juegan un rol determinante, se observa que varios de ellos se encuentran bastante lejos de poder acceder a sus enormes posibilidades y en muchos casos, por el contrario, le asocian propiedades que no le corresponden o llegan incluso a no ver nada significativo en ellas. Por otra parte el uso de la tecnología en sus diversas formas ha resultado para los estudiantes una estrategia significativa que de manera natural les permite incluso mostrar una actitud positiva en el estudio de conceptos relacionados con álgebra lineal.

Referencias bibliográficas

Arcavi, A. (2003). The role of visual representations in the learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 52(3).

Da Ponte, J. P. (2000). Tecnologías de informação e comunicação na formação de profesores: ¿qué desafios?, Monográfico: Tic en la educación, *Revista Iberoamericana de Educación, 24*, 63-90.

Duval, R. (1993). Registres de représentation sémiotica et functionnement cognitif de la pensée. *Annales de Didactique el de Sciences Cognitives, 5*, 37-65. IREM de Strasbourg. Traducción para fines educativos, Departamento de Matemática Educativa del Cinvestav-IPN. México.

Hernández, R., Fernández, C. y Baptista, M. (2014). *Metodología de la Investigación*. México: McGraw-Hill / Interamericana Editores, S.A. de C.V.

Rojano, T. (2003). Incorporación de entornos tecnológicos de aprendizaje a la cultura escolar: Proyecto de innovación en matemáticas y ciencias en escuelas secundarias públicas de México. *Revista Iberoamericana de Educación, 33*, 135-165.