VOL 33, NÚMERO 2, AÑO 2020

# SERIES GEOMÉTRICAS DESDE UNA PERSPECTIVA VARIACIONAL CON APOYO DE GEOGEBRA EN ESTUDIANTES UNIVERSITARIOS

# GEOMETRIC SERIES FROM A GEOGEBRA-SUPPORTED VARIATIONAL PERSPECTIVE IN UNIVERSITY STUDENTS

**Franklin Mejía Ochoa, Marvin Mendoza Valencia**
**Universidad Tecnológica de Honduras CEUTEC – La Ceiba - Universidad Pedagógica Nacional Francisco Morazán, Universidad Nacional Autónoma- TEC Danlí.**
**frankmejia1993@hotmail.com, mmendoza@unah.edu.hn**

**Resumen**
En esta investigación hemos adoptado la perspectiva del pensamiento variacional, partiendo de las ideas pre matemáticas que traen los estudiantes al ingresar al nivel educativo superior. Puesto que, nuestros estudiantes poseen experiencias vividas en diferentes situaciones, estas podrían constituirse en una construcción de conocimiento formal. Este trabajo tiene sus bases en la construcción de objetos matemáticos (series geométricas) con apoyo de GeoGebra. La metodología fue cualitativa de corte interpretativo con diseño fenomenológico. Se analizaron las producciones escritas de los estudiantes, generando como conclusiones manifestaciones de pensamiento variacional de acuerdo con un primer nivel de análisis provisto por el enfoque ontosemiótico.

**Palabras clave:** superior, pensamiento variacional, serie geométrica, ontosemiotico

**Abstract**
In this research, we have adopted the perspective of variational thinking, based on the pre-mathematical ideas that students have when they enter higher education. Since our students have had experiences in different situations, these could become a formal knowledge construction. This work has its bases on the construction of GeoGebra-supported mathematical objects (geometric series). We used a qualitative interpretative-type methodology with phenomenological design. The written productions of the students were analyzed, generating, as conclusions, forms of variational thinking according to a first level of analysis provided by the onto-semiotic approach.

**Key words:** higher level, variational thought, geometric series, onto-semiotic approach

## Introducción

El Pensamiento Variacional constituye una línea de investigación en Educación Matemática que tiene su génesis en el análisis y reflexión de los trabajos de cálculo infinitesimal, en los que el cambio se consideró un punto importante en aras de responder a diferentes necesidades de la época, de brindar solución a problemas de movimiento que relacionaban aritmética, geometría y mecánica, entre otras áreas (Mendoza, 2013). Este pensamiento se orienta a desarrollar habilidades de orden superior, partiendo de diferentes situaciones, sean estas cercanas o no al sujeto, bajo la premisa que el cambio y la variación se encuentran presentes en la mayoría de los procesos, fenómenos y situaciones que ocurren a nuestro alrededor sin importar el contexto en que nos situemos.

No obstante, este trabajo pretende ser el resultado de una investigación que oriente a la interacción didáctica, y construcción de series geométricas mediante tecnología y analizadas desde la perspectiva del cambio y la variación. Las tecnologías actuales han dado condiciones y características favorables en torno al desarrollo de habilidades visuales, cognitivas, como, por ejemplo, la visualización. Esta habilidad cognitiva trasciendo a lo estrictamente visual, vinculándose además con otras exigencias cognitivas que requiere el pensamiento matemático avanzado, específicamente el variacional. Por tanto, en este estudio se reporta algunos resultados obtenidos de como la implementación de sesiones de trabajo utilizando el software GeoGebra, y donde se analizan fenómenos de cambio y variación para desarrollar el pensamiento variacional y la estructuración de los registros de representación semiótica contribuyen a la construcción del concepto de series geométricas.

## Marco teórico

El pensamiento y lenguaje variacional estudia fenómenos de enseñanza, aprendizaje y comunicación de saberes matemáticos de la variación y el cambio en el sistema educativo y en el medio social que le da cabida (Cantoral, 2004, p. 1). Este pensamiento es conceptualizado desde distintas perspectivas de acuerdo a ciertos elementos. Se afirma que uno de los propósitos del pensamiento variacional es articular la investigación y las prácticas sociales que dan vida a la matemática de la variación y el cambio en los sistemas didácticos (Cantoral y Farfán, 1998); y a situaciones que involucran variación en contextos, ya sean estos, realistas, fantasiosas, o matemáticos. Un gran desafío actual es encontrar maneras de utilizar este conocimiento acumulado, en distintos espacios de enseñanza y aprendizaje.

Desde esta mirada Cabezas y Mendoza (2016), consideran que pensar variacionalmente desde es desarrollar capacidades que permitan utilizar diferentes representaciones, interpretarlas y analizar dinámicamente lo que sucede en la otra representación si se modifica una condición particular. Se trata de un proceso mental activo en el que se generan secuencias de imágenes mentales (no ostensivas) que se van refinando hasta que la comprensión de la situación, vía procesos de visualización, conduce a un modelo mental de la situación planteada, la cual es objetivada por representaciones que dan cuenta de la covariación de las variables y expresada en un soporte material (ostensivo). Por lo reportado en la literatura, el pensamiento variacional exige para su desarrollo combinar distintas áreas y contenidos matemáticos.

No obstante, un saber no se estudia únicamente desde lo cognitivo, ya que las creaciones humanas, las matemáticas en este caso, se han desarrollado en contextos históricos, culturales y sociales situados, y es a través de las prácticas sociales que los seres humanos le dan sentido a lo que hacen, comparten códigos, utilizan diferentes estructuras y lenguajes (Cantoral y Farfán, 2003). De otras investigaciones en esta perspectiva del Pensamiento Variacional (Maury et A, 2012) se desprende que este pensamiento involucra elaboración de estrategias, formas de razonamiento, elementos y estructuras lingüísticas, que permiten comunicar el estudio y análisis del cambio y la variación.

*Series Geométricas*

Las series son como una de las bases del principio de la historia de las matemáticas donde se han estudiado sus propiedades, y éstas han sido aplicadas, sobre todo, a la aritmética. El origen de las series, al igual que el de tantas otras ramas de las matemáticas, es incierto. Las primeras progresiones aritméticas y geométricas, tanto en Egipto como en la India, aparecieron alrededor del siglo XVI a. C. Una serie geométrica es una sucesión de números en la que cada término después del primero se obtiene al multiplicar el término anterior por una constante r. La constante r se llama razón común. Ahora una serie geométrica infinita es una serie de la forma $a+ar+ar^2+ar^3+ar^4+...+ar^{n-1}+...$ (Stewart, Redlin y Watson, 2012).
La fórmula para la suma de una sucesión geométrica finita puede, dependiendo del valor de r, extenderse para producir una fórmula para la suma de una serie geométrica infinita

*Teoría de las representaciones semióticas*

En el aprendizaje de la matemática diversos enfoques teóricos describen el papel de los sistemas de representación en acciones cognitivas para la producción de sistemas mentales, considerando que los cambios entre los sistemas de representación de los objetos matemáticos pueden facilitar la eventualidad de dichos objetos en los estudiantes (Contreras y Font, 2002). La formación del pensamiento, particularmente en matemática, está junto al desarrollo de simbolismos específicos para representar a los objetos y a sus relaciones, por tanto, el progreso de los conocimientos implica la creación y el desarrollo de sistemas semióticos nuevos y específicos. En matemática las representaciones semióticas son importantes tanto para los objetivos de comunicación como para el desarrollo de la actividad matemática. Respecto a las representaciones semióticas Duval (1999) señala que:

> Son producciones constituidas por el empleo de signos (enunciado en lenguaje natural, fórmula algebraica, gráfico figura geométrica, etc.) que pertenecen a un sistema de representación, el cual tiene sus propias reglas y significancia. Es decir, el medio del cual dispone un individuo para exteriorizar sus representaciones mentales, para hacerlas visibles o accesibles a los demás. Existen distintos tipos de registros de representaciones semióticas: registro de la lengua natural, gráfico, figural, algebraico (p.14).

Por ello, Duval considera que las diferentes maneras de representación evidencian ser fundamentales para la comprensión de conceptos.

*Software dinámico: Geogebra*

GeoGebra es un software de matemáticas desarrollado por Markus Hohenwarter de la Universidad de Salzburgo, proporciona la vinculación de las matemáticas con el álgebra, la geometría y el cálculo al incluir tanto la geometría dinámica como las herramientas de álgebra computacional (Hohenwarter y Preiner, 2007). El asistente matemático GeoGebra integra el trabajo en las áreas de geometría, álgebra y calculo en un ambiente dinámico potenciando entre otros, el desarrollo del pensamiento variacional (Ruiz ; Ávila y Villa-Ochoa, 2013). Actualmente algunos estudios de los autores antes citados evidencian que GeoGebra puede asumirse como una herramienta dinámica - didáctica que proporciona al estudiante una forma de representación, visualización y organización de los conceptos trabajados en el estudio de ciertos conceptos o procedimientos matemáticos dando aportes significativos al desarrollo del pensamiento variacional.

El pensamiento variacional hace énfasis en la habilidad que tiene una persona para identificar estados de cambio de una o más “variables” y relaciones entre ellas, patrones existentes en secuencias, así como el manejo y creación de funciones como representaciones de situaciones de variación. En este sentido GeoGebra al recrear ambientes dinámicos, permite a los usuarios la visualización y representación de relaciones de covariación. (Ruiz et al., 2013, p. 447).

## Metodología

El enfoque de este estudio es cualitativo. El objetivo de este tipo de investigación es "describir, comprender e interpretar los fenómenos, a través de las percepciones y significados producidos por las experiencias de los participantes" (Sampieri, 2014: 41). No obstante, la investigación en este tipo permite observar qué características están presentes en el desarrollo del pensamiento variacional asociados al cambio y la variación. Se desarrollo durante el Tercer período comprendido entre los meses de enero a marzo del 2019.

De igual manera los objetivos de investigación enmarcan que el estudio debe tener un alcance descriptivo – interpretativo. Estos estudios buscan especificar las propiedades, las características y los perfiles de personas, grupos, procesos, objetos o cualquier otro fenómeno que se someta a un análisis. Esto es recoger información de manera independiente o conjunta sobre los conceptos a las que se refieren (Hernández y Baptista, 2010:81). En cuanto al diseño de investigación, este es el plan o estrategia concebida para obtener la información que se desea (Hernández y Baptista, 2010:120). El diseño es fenomenológico ya que su propósito principal es explorar, describir y comprender las experiencias de las personas con respecto a un fenómeno y descubrir los elementos en común de tales vivencias. Posteriormente se recolectaron los datos y se analizaron en un tiempo específico. En nuestro caso la investigación se desarrolló con estudiantes de un curso de Calculo II de CEUTEC – UNITEC la Ceiba.

Se recolecto información cualitativa por medio del muestreo no probabilístico bajo el método de muestreo intencional, el cual, para Hernández, et al (2008:328) el objetivo es la riqueza, profundidad y calidad de la información, y no la cantidad. Los estudiantes se constituyeron en grupos de estudio aleatorio lo que significó que todos los grupos tenían el mismo número de alumnos, entre 4 y 5 integrantes de una muestra de 17 en total. Los grupos se formaron para la realización de trabajos en las sesiones de estudio y hojas de trabajo los que eran evaluados con nota, de acuerdo con la participación activa de los alumnos. No obstante, es relevante recalcar que la validación del contenido de los instrumentos de recolección de datos; no se evalúa cuantitativamente, para ello, se estima de manera subjetiva empleando el denominado Juicio de Expertos (Corral, 2009). De igual forma Hernández y Baptista (2010:204), define que "La validez de expertos se denomina al grado en que un instrumento de medición mide la variable en cuestión, de acuerdo con personas expertas en el tema.

Las sesiones de trabajo aplicadas fueron analizadas desde el primer nivel de análisis del Enfoque Ontosemiótico. Según (Godino, Batanero y Font, 2008) el EOS es un sistema teórico inclusivo que trata de articular diversas aproximaciones y modelos teóricos usados en la investigación en Educación Matemática a partir de presupuestos antropológicos y semióticos sobre las matemáticas y su enseñanza. Para Mendoza (2016) un primer nivel de análisis didáctico atiende al reconocimiento de un sistema de prácticas que realizan los estudiantes de manera individual o grupal, ya sean estas mediadas por sus conocimientos previos o por otra entidad externa que puede ser de carácter institucional, curricular, bibliográfica, u otra.

## Resultados

El siguiente apartado alude al análisis de una de las actividades implementadas durante la investigación (sesiones de trabajo #1) mediante el análisis sistémico desde un primer nivel de análisis que nos proporciona EOS.

*Sesión #1*

La presente sesión de trabajo muestra una figura construida con el apoyo de geogebra. Está formada por una sucesión de cuadrados construidos, cada uno, en el interior del precedente tomando como vértices los puntos medios de sus lados, tal como se ilustra en la fig. 4.1.

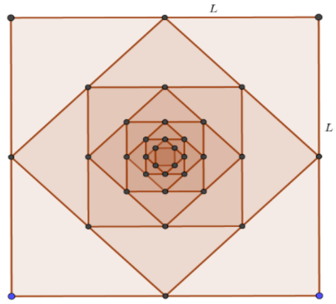



**Figura 4.1.** Cuadrados Inscritos

*Análisis Ontosemiótico*

A continuación, se presenta un análisis de los elementos considerando los elementos del EOS: lenguaje, situaciones problema, definiciones, procedimientos, afirmaciones y argumentos, desarrollados por los estudiantes en el contexto de las actividades propuestas en la ejecución del curso y analizadas en este trabajo, que se espera sean activados en la solución de la tarea propuesta.

*Fase 1: Se responde a las preguntas*

¿Qué situaciones y prácticas realizan los estudiantes en el proceso de los trabajos analizados? ¿Cómo se secuencian o se relacionan? La actividad se presenta en un registro figural que muestra sucesión de cuadrados construidos, cada uno en el interior del precedente, tomando como vértices los puntos medios de sus lados. La actividad plantea que los cuadrados se construyen de manera indefinida atendiendo a ese patrón.

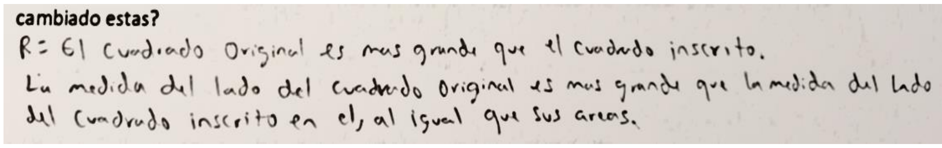
La situación problema trata de analizar si en el desenvolvimiento de la misma, los estudiantes evidencian alguna forma de pensamiento variacional sin que esta sea inducida en el enunciado de la tarea. Las respuestas a las situaciones planteadas requieren la explicación del proceso de construcción con ayuda visual de GeoGebra, y exigen el uso de procedimientos y pertenencia en los procesos de cálculo propios de lo aritmético, geométrico y algebraico, además de la utilización de habilidades cognitivas como visualizar, argumentar, representar y comunicar entre otras. El uso de estas habilidades y el dominio del cálculo permite generar modelos matemáticos de la situación problema en diferentes registros de representación (lenguaje escrito, gráficos, algebraicos, tablas u otros).

*Descripción de las notaciones*

G= Grupo de trabajo, N= Nivel de la sesión de trabajo.
Ejemplo: G1N1= Grupo 1 Nivel 1

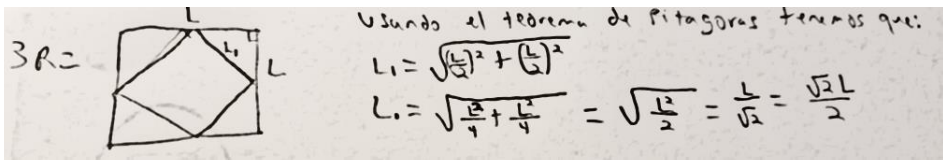
*Fase 2: Producciones de los grupos de trabajo, cuyas respuestas son característicos y representativos.*

G3N1: “Observamos que es un cuadrado”.
G3N1: “Cada uno de sus lados tienen la misma magnitud, y es una figura geométrica”.
G3N1: “Pensamos que podríamos sacar magnitudes con el teorema de Pitágoras, pero no tenemos una diagonal”.
G1N1: “Toda la figura mide los mismo, es un cuadrado”.
G4N2: “El área del cuadrado interno es la mitad del cuadrado externo y así sucesivamente”. G1N2:




**Fuente:** Elaboración propia

G1N2: “Se forma un cuadrado dentro de otro cuadrado”.
G1N2: “Las medidas de la figura inscrita son la mitad de la primera figura”.
G3N2: “Su área es menor respecto a la figura inicial. Mediante Pitágoras obtuvimos la magnitud del segundo cuadrado y para obtener su área elevamos su lado al cuadrado y la respuesta es un medio de $L^2$”.
G1N2: “Su lado es menor que la primera figura”.




**Fuente:** Elaboración propia

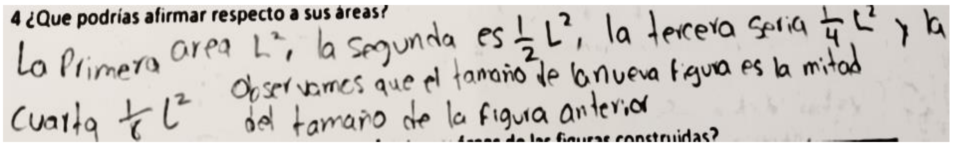
G1N2: “ $A = area$ de la primer figura, $A_1 = area$ de la segunda figura

$A = L^2, \;\; A_1 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} L\right)^2 = \frac{L^2}{2}$, su área es más pequeña que la primer figura”.

G4N3: “Cada vez que se construye una nueva figura, se reduce el tamaño, y entre más cuadrados, se ve una profundidad”.
G4N3: “El valor de la longitud del lado de la tercera figura es de 1/2L el cual se obtuvo usando la fórmula de Pitágoras”.
G4N3: “Con la observación de los datos anteriores se demuestra que el valor del perímetro ha ido cambiando; $P_1 = 4L, \; P_2 = 2\sqrt{2}L, \; P_3 = 2L$”.
G2N3: “Si, por que se va reduciendo la medida de las figuras mediante se agrega una figura dentro de otra”.
GIN3: “El tercer cuadrado inscrito es más pequeño que el segundo cuadrado inscrito, y el segundo es más pequeño que el primer cuadrado.”
GIN3: “Se aprecian tres cuadrados uno dentro de otro”.
GIN3: “El cuadrado original es más grande en su área y perímetro respecto a los cuadrados inscritos.”
G3N3: “Observamos un fractal porque tenemos la misma figura solo que a diferentes escalas, también va formando más triángulos reducidos”.
G3N3: “Si, podemos precisar las magnitudes del 3 cuadrado conociendo las magnitudes del 2do, sabiendo que estas magnitudes se reducirán”.
GIN3: “sea $P_2 = perimetro$ de la tercer figura entonces $P_2 = \frac{L}{2} + \frac{L}{2} + \frac{L}{2} + \frac{L}{2} = 2L$, el perímetro si se ha modificado respecto a la segunda figura ya que es menor”.
G4N4: “Si se puede porque existe un patrón de construcción de nueva figura que indica que esto se va reduciendo a la mitad del tamaño de su área”.

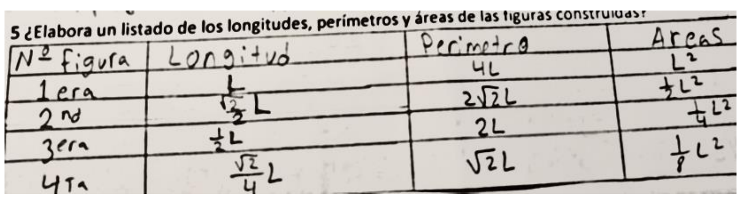
G4N4: "La longitud del lado de la primera seria L, la segunda es $\frac{\sqrt{2}}{2}$ L, la tercera es $\frac{1}{2}$ L y la cuarta es $\frac{\sqrt{2}}{4}$ L,… obtenemos un patrón $P=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n L$".

G4N4:


4 ¿Que podrías afirmar respecto a sus áreas?
La Primera area $L^2$, la segunda es $\frac{1}{2}L^2$, la tercera seria $\frac{1}{4}L^2$ y la Cuarta $\frac{1}{6}L^2$ Observamos que el tamaño de la nueva figura es la mitad del tamaño de la figura anterior

**Fuente:** Elaboración propia

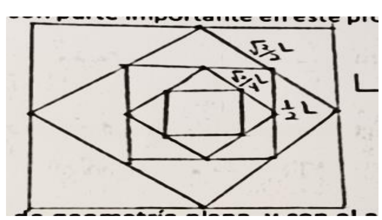
G4N4: "La primera área $L^2$, la segunda es $\frac{1}{2}L^2$, la tercera seria $\frac{1}{4}L^2$, y la cuarta. Observamos que el tamaño de la nueva figura es la mitad del tamaño de la figura anterior".
G4N4: "Entre más figuras aparecen más se reduce. En el perímetro podemos ver que hay relación entre la figura 1 y la figura 2 ya que es la mitad y cada relación entre la figura 3 y la cuarta ya que también se va reduciendo".
G1N4: "Si por que el proceso de construcción va a seguir indefinidamente. Siempre el cuadrado de adentro va a ser más pequeño que el cuadrado de afuera, y los cuadrados interiores se van construyendo en los puntos medios de los lados de los cuadrados exteriores, y serán la mitad del anterior las medidas de sus áreas."
G2N4: "Si se puede realizar por que existe una secuencia de patrones mediante una fórmula".
G2N4: "Sus áreas van cambiando mediante se va insertando dentro de otra figura".
G4N4:


5 ¿Elabora un listado de los longitudes, perímetros y áreas de las figuras construidas?

| N° figura | Longitud | Perímetro | Areas |
|---|---|---|---|
| 1era | L | 4L | $L^2$ |
| 2nd | $\frac{\sqrt{2}}{2}$L | $2\sqrt{2}$L | $\frac{1}{2}L^2$ |
| 3era | $\frac{1}{2}$L | 2L | $\frac{1}{4}L^2$ |
| 4Ta | $\frac{\sqrt{2}}{4}$L | $\sqrt{2}$L | $\frac{1}{8}L^2$ |

**Fuente:** Elaboración propia

G3N4: "Si podría realizarse porque existe un patrón que mediante la fórmula tiende a infinito".
G3N4: "Sus áreas se van reduciendo a medida se van agregando más figuras".
G1N4: "El lado de cada cuadrado inscrito es más pequeño que el del cuadrado anterior, el perímetro de cada cuadrado es más de la mitad del lado del cuadrado anterior, y el área de cada cuadrado es la mitad del anterior".
G1N4:




**Fuente:** Elaboración propia

G1N4: “Por tanto sus áreas van decreciendo a medida de van inscribiendo más cuadrados”.

*Fase 3: Lenguaje utilizado en el desarrollo de las sesiones de trabajo*

- *Lenguaje previo:*

Términos y expresiones usadas para aludir los conceptos, propiedades y procedimientos intervinientes: Sucesión, cuadrados, polígono regular, longitud, medida, construcción, lado, series, puntos medios, áreas, figura inscrita, perímetro.

- *Lenguaje emergente:*

Términos y expresiones usadas para aludir a los conceptos, propiedades que surgen durante el desarrollo de la práctica: Cuadrado interno, fractal, pequeño, reduciendo, patrón, infinito, triángulos reducidos, teorema, insertando (dentro de otra figura), diagonal, figura geométrica, patrones, construcción (de n figuras inscritas), mitad, secuencia (de patrones mediante una fórmula), medida, datos, formula, profundidad, externo, decreciendo, indefinidamente.

*Fase 4: Situaciones de problemas emergentes*

Los estudiantes se circunscribieron a realizar lo solicitado en la consigna. En sus desarrollos no aparece un problema nuevo que ellos hayan creado.

*Fase 5:*

a) *Afirmaciones en el desarrollo de las sesiones de trabajo.*
El área del cuadrado interno es la mitad del cuadrado externo y así sucesivamente.
Cada vez que se construye una nueva figura, se reduce el tamaño, y entre más cuadrados, se ve una profundidad.

Con la observación de los datos anteriores se demuestra que el valor del perímetro ha ido cambiando; $P_1 = 4L,\ \mathrm{P}_2 = 2\sqrt{2}L,\ \mathrm{P}_3 = 2L$ .

Si se puede porque existe un patrón de construcción de nueva figura que indica que esto se va reduciendo a la mitad del tamaño de su área.
Se forma un cuadrado dentro de otro cuadrado.
Su lado es menor que la primera figura.

La longitud del lado de la primera seria L, la segunda es $\frac{\sqrt{2}}{2}$ L, la tercera es $\frac{1}{2}$ L y la cuarta es $\frac{\sqrt{2}}{4}$ L,… obtenemos un patrón $P = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n L$ .

La primera área $L^2$ , la segunda es $\frac{1}{2}L^2$ , la tercera seria $\frac{1}{4}L^2$ , y la cuarta. Observamos que el tamaño de la nueva figura es la mitad del tamaño de la figura anterior.

Entre más figuras aparecen más se reduce. En el perímetro podemos ver que hay relación entre la figura 1 y la figura 2 ya que es la mitad y cada relación entre la figura 3 y la cuarta ya que también se va reduciendo.

El lado de cada cuadrado inscrito es más pequeño que el del cuadrado anterior, el perímetro de cada cuadrado es más de la mitad del lado del cuadrado anterior, y el área de cada cuadrado es la mitad del anterior.

Si se puede realizar porque existe una secuencia de patrones mediante una fórmula.
Sus áreas van cambiando mediante se va insertando dentro de otra figura.

Su área es menor respecto a la figura inicial. Mediante Pitágoras obtuvimos la magnitud del segundo cuadrado y para obtener su área elevamos su lado al cuadrado y la respuesta es un medio de $L^2$.

Si por que el proceso de construcción va a seguir indefinidamente. Siempre el cuadrado de adentro va a ser más pequeño que el cuadrado de afuera, y los cuadrados interiores se van construyendo en los puntos medios de los lados de los cuadrados exteriores, y serán la mitad del anterior las medidas de sus áreas.

Observamos un fractal porque tenemos la misma figura solo que a diferentes escalas, también va formando más triángulos reducidos.

Si podría realizarse porque existe un patrón que mediante la fórmula tiende a infinito.

*b) Argumentos en el desarrollo de las sesiones de trabajo.*
Visual-deductivo, referido por la observación de la figura propuesta y la deducción de las propiedades y características variacionales:
Si se puede porque existe un patrón de construcción de nueva figura que indica que esto se va reduciendo a la mitad del tamaño de su área. La primera área $L^2$, la segunda es $\frac{1}{2}L^2$, la tercera seria $\frac{1}{4}L^2$, y la cuarta. Observamos que el tamaño de la nueva figura es la mitad del tamaño de la figura anterior. Sus áreas van cambiando mediante se va insertando dentro de otra figura (…), también se va formando más triángulos reducidos.

Los estudiantes utilizan argumentos geométricos: El área del cuadrado interno es la mitad del cuadrado externo y así sucesivamente. Entre más figuras aparecen más se reduce. (…) y entre más cuadrados, se ve una profundidad.

También argumentan que la figura es un fractal por que el proceso de construcción de cuadrados inscritos es indefinidamente.

Algunos estudiantes hacen relación del registro algebraico con la representación geométrica cuando utilizan el cálculo de lados y áreas y al hacer cálculos vía Teorema de Pitágoras:
Argumentan que mediante el teorema de Pitágoras van obtenido la magnitud del lado de cada cuadrado que se va inscribiendo, y así calcular el área de cada cuadrado que se va formando en la construcción.

*Fase 6: Concepciones y procedimientos en el desarrollo de las sesiones de trabajo*

*Previas:*
En relación a los objetos matemáticos involucrados en el planteamiento de las sesiones de trabajo, tales como cuadrado, sucesión, construcción (de una figura), lado, perímetro, medida, longitud, áreas, figura inscrita, los estudiantes tienen una buena comprensión de ellos; y les permite abordar la sesión sin dificultades.

*Emergentes:*
*Fractal:*
Los estudiantes tienen concepciones vagas sobre este objeto. No obstante, la aprehensión viene de lo que explicitan como construcción indefinida (de las figuras presentadas en la sesión de trabajo y que tiene vínculo con la noción de construcción infinita), la cual proviene de objetos matemáticos producto de procesos infinitos, que son

producidos por construcciones formadas por sucesiones infinitas sin que quede clara la concepción que tienen del mismo.

La mayoría de estudiantes muestran que comprendieron los procedimientos de construcción ya que explicitaron que siempre existe un patrón de construcción de una nueva figura que indica que su magnitud (área) se reduce a la mitad con cada construcción.  En el mismo orden de ideas los estudiantes atestiguan que la construcción de cuadrados es infinito.

Algunos grupos de estudiantes hicieron cálculos, encontraron un patrón en las longitudes de los cuadrados inscritos, G4N4 encuentra los primeros 4 términos de un patrón aritmético y logrando establecer una formula algebraica general acercándose a una relación funcional del lado, para cualquier cuadrado inscrito en términos de lado $n = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n L$.

Los estudiantes utilizaron con cierta propiedad el empleo de geometría plana que involucra las propiedades de paralelogramos, haciendo uso de articulaciones entre el registro algebraico y el referente geométrico.

Los estudiantes usan como medio el software geogebra para realizar procesos de visualización, donde tal empleo visibiliza o complementa un acercamiento a una construcción geométrica.

Por tanto, las diferentes sesiones de trabajo aplicados fueron analizadas desde el primer nivel de análisis del Enfoque Ontosemiótico. En particular, los estudiantes destacan en sus producciones el uso del lenguaje y las correctas concepciones de los elementos previos que demuestran tener, sería una base importante para estimular el desarrollo del pensamiento variacional de manera formal.

## Conclusiones

Las producciones estudiantiles mostraron que la herramienta de GeoGebra contribuye de manera positiva en el desarrollo de habilidades cognitivas de orden superior (análisis, síntesis, desarrollo lógico, visualización, entre otras), también en el fortalecimiento del pensamiento variacional en algunos casos y en otros al desarrollo de este pensamiento. No obstante, con las sesiones de trabajo implementadas, se adecuo un cimiento para estimular el desarrollo del pensamiento variacional. Es así que se evidencia que los educandos utilizan un lenguaje que involucra distintos conceptos en matemáticas tales como pequeño, disminuye, crece, decrece, cambia, varia y otros términos que indican evidencias de un pensamiento variacional inicial. Sus argumentos son de tipo visual y contienen ciertos elementos dinámicos, no obstante, entrando en una etapa de argumentación más formal, no se ve en su totalidad las concepciones dinámicas mostrada en la etapa de visualización. El uso del lenguaje y las correctas concepciones matemáticas que demuestran tener, son un aporte significativo para estimular el desarrollo del pensamiento variacional de manera formal el cual contribuye a la compresión y a la adquisición de un conocimiento significativo y reflexivo. Por tanto, es importante realizar actividades, sesiones de trabajo, uso de software en donde surja la mayor cantidad de recursos, ya que por medio de ellos la captación de un objeto matemático puede ser más significativa para los estudiantes.

## Referencias bibliográficas

Cabezas, C. y Mendoza, M. (2016). Manifestaciones Emergentes del Pensamiento Variacional en Estudiantes de Cálculo Inicial. Formación universitaria, 9(6), 13–26. https://doi.org/10.4067/S0718-50062016000600003.

Cantoral, R. & Farfán, R. (2003). Mathematics Education: A vison of its evolution. Educational Studies in Mathematics. 53(3): 255 – 270.

Cantoral, R. (2004). Desarrollo del pensamiento y lenguaje variacional, una mirada socioepistemológica.

Cantoral, R. y Farfán, R. (1998). Pensamiento y lenguaje variacional en la introducción al análisis. Epsilon, No. 42, 353 – 369.

Contreras, A. y Font, V. (2002). ¿Se aprende por medio de los cambios entre los sistemas de representación semiótica? Ponencia (mesa redonda): Confrontación de marcos teóricos. XVIII Jornadas del SI-IDM. Castellón, 2002. Obtenido el 18 de abril de 2007 desde http://www.ugr.es/~jgodino/siidm/castellon_2002/contreras_vicen.doc.

Duval, R. (1999). *Argumentar, Demostrar, Explicar: ¿Continuidad o ruptura cognitiva?* Mexico: Grupo Editorial Iberoamérica.

Godino, J. D., Batanero, C., & Font, V. (2007). The onto-semiotic approach to research in mathematics education. ZDM, 39(1-2), 127-135.

Godino, J. D., Batanero, C., y Font, V. (2012). Un enfoque ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática. Perspectivas en la Didáctica de las Matemáticas, 47-78.

Godino, J. D., Font, V., & Wilhelmi, M. R. (2008). Análisis didáctico de procesos de estudio matemático basado en el enfoque ontosemiótico. Publicaciones, 38, 25-48.

Gutiérrez R. (2009). *Una secuencia didáctica para generar los conceptos de sucesión y serie en el nivel medio superior*. (Tesis de maestría). Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada del IPN, México, D. F.

Hernández, S. R., Fernández Collado, C. y Baptista Lucio, P.(2010) *Metodología de la Investigación.* Perú: Mc Graw Hill.

Hohenwarter, M., & Preiner, J. (2007). Dynamic mathematics with GeoGebra. The Journal of Online Mathematics and its Applications, Volume 7. Article ID: 1448.

Maury Mancilla, Erwin, Palmezano Sarmiento, Gregorio, & Cármaro Barrios, Sandro. (2012). Sistema de tareas para el desarrollo del pensamiento variacional en 5° grado de Educación Básica Primaria. En: Escenarios, Vol. 10 No. 1, 7-16.

Mendoza, M. R. (2016). Pensamiento variacional emergente: una experiencia en cálculo inicial desde una primera categoría de análisis del enfoque ontosemiótico (Tesis). Universidad de los Lagos, Santiago, Chile.

Ruiz, M.; Ávila, P.; Villa-Ochoa, J. (2013). Uso de Geogebra como herramienta didáctica dentro del aula de matemáticas. Conferencia Latinoamericana Colombia 2012 y XVII Encuentro Departamental de Matemáticas (pp. 446-454). Medellín: Fondo Editorial ITM.

Vasco, C. (2006). *El pensamiento variacional, la modelacion y las nuevas tecnologías. Didáctica de las matemáticas*: Artículos selectos (págs. 134 - 148). Santa Fe de Bogotá: Universidad Pedagógica Nacional.