VOL 33, NÚMERO 2, AÑO 2020

CONSTRUCCIÓN DE LA FUNCIÓN A PARTIR DE LA VARIACIÓN DE MAGNITUDES GEOMÉTRICAS

CONSTRUCTING THE FUNCTION CONCEPT FROM THE VARIATION OF GEOMETRIC MAGNITUDES

María Teresa Dávila Araiza
Universidad de Sonora. (México)
tere.davila.araiza@gmail.com

Resumen
Se discuten los resultados de una experiencia de clase con estudiantes universitarios, en la cual se implementó un diseño preliminar de actividades didácticas para el estudio de la función. El diseño y el análisis de los datos obtenidos se fundamentan en el Enfoque Ontosemiótico (EOS). El propósito del diseño fue dar una introducción a la función desde un punto de vista dinámico, en un medio geométrico de variación creado con GeoGebra, pues en los cursos de cálculo se tiende presentar la función de manera estática a través de representaciones algebraicas y gráficas, pero sin estudiar realmente cómo las variables varían de manera conjunta. Los resultados obtenidos muestran la riqueza de las prácticas matemáticas realizadas por los estudiantes en las actividades didácticas, así como la potencialidad de las herramientas del EOS para describir el proceso de instrucción realizado.

Palabras clave: función, GeoGebra, variación, magnitudes geométricas

Abstract
This paper presents the results of a class experience with university students, where a preliminary design of didactic activities for studying the concept of function was implemented. The design and analysis of the data obtained are based on the Onto-semiotic Approach. The design was aimed at introducing the function from a dynamic viewpoint, in a geometric environment of variation created with GeoGebra; since in calculus courses, the function tends to be presented statically through algebraic and graphic representations, but without really studying how the variables vary together. The results obtained show the richness of the mathematical practices carried out by the students in the didactic activities, as well as the potential of the Onto-semiotic Approach to describe the instructional process carried out.

Key words: function, GeoGebra, variation, geometric magnitudes

Introducción

El cálculo es considerado una disciplina central y fundamental en la educación universitaria. En México, su estudio se realiza en los primeros semestres de carreras de áreas diversas, desde ciencias exactas e ingeniería hasta las ciencias biológicas y económico-administrativas. Sin embargo, los cursos de cálculo no solo sobresalen por su importancia en la educación superior, sino también por la compleja problemática que tiene lugar en torno a su enseñanza y aprendizaje; problemática que ha sido y sigue siendo ampliamente estudiada, siendo el tema central de revistas como *El cálculo y su Enseñanza. Enseñanza de las Ciencias y la Matemática* del Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional; de grupos de discusión en eventos internacionales como el Grupo 16 Sobre Enseñanza y Aprendizaje del Cálculo en ICME-13 (Bressoud, Martínez-Luaces, Ghedamsi y Törner, 2017); y diversos trabajos de investigación que cuestionan la forma actual como se concibe el cálculo en la enseñanza y en la investigación educativa (Ímaz y Moreno, 2010; Moreno-Armella, 2014; Thompson y Carlson, 2017) o que documentan dificultades de los estudiantes en los curso de cálculo (Artigue, 1998; Kouropatov y Dreyfus, 2014; Robles, del Castillo y Font, 2012), por mencionar algunos.

Los trabajos de Ímaz y Moreno (2010) y Moreno-Armella (2014) sostienen que la enseñanza del cálculo está fuertemente influenciada por la estructura lógica y formal del análisis matemático, lo cual puede percibirse en la manera como los contenidos de los cursos de cálculo se organizan en torno a los conceptos estáticos y aritmetizados de función y límite. Es usual que los cursos de cálculo diferencial inicien con el estudio de los números reales y sus propiedades para introducir la función como "regla de correspondencia" entre conjuntos de números reales, la cual se expresa algebraicamente y luego se ilustra gráficamente como conjunto de puntos en el plano cartesiano que obedecen la fórmula algebraica dada. Posteriormente, se estudian los diferentes tipos de funciones y sus gráficas. Se continúa con el estudio y definición del límite de una función y de función continua. Después, se define a la derivada como un límite y se presentan las reglas de derivación. Finalmente, se arriba al estudio de los problemas de optimización. Esta organización del cálculo para su enseñanza esconde la esencia de las nociones básicas del cálculo ligada a los procesos de variación y deja a un lado el estudio de los procesos de modelación de los fenómenos de variación que están involucrados en estos problemas. Ante esta situación, los estudiantes que finalizan sus cursos de cálculo pueden aplicar algoritmos con base en la manipulación de expresiones algebraicas, pero no desarrollan un significado de los objetos matemáticos estudiados que puedan poner en uso al resolver problemas no rutinarios.

Si se analiza con detenimiento la manera típica como se define la noción de *función* en los textos de cálculo, se puede concluir que su estudio en estos textos es estático, no variacional. Por ejemplo, en el libro El Cálculo (Leithold, 1998) se define a la función como:

> Un conjunto de pares ordenados de números (x, y) en los que no existen dos pares ordenados diferentes con el mismo primer número. El conjunto de todos los valores admisibles de x se denomina dominio de la función, y el conjunto de todos los valores resultantes de y recibe el nombre de contradominio de la función. (pp. 3-4)

En esta definición, los símbolos x y y no se refieren a magnitudes que están en un proceso de cambio o variación, sino a los representantes de dos conjuntos de números o valores, interpretación que se refuerza con la explicación "intuitiva" y la ilustración que el Leithold plasma en aras de facilitar la comprensión del concepto función:

> El número real y del conjunto Y es una *función* del número x del conjunto X, si existe una regla mediante la cual se asocia un solo valor de y a un valor de x. Esta regla se expresa frecuentemente por medio de una ecuación. Por ejemplo, la ecuación $y = x^2$. (Leithold, 1998, p.2)

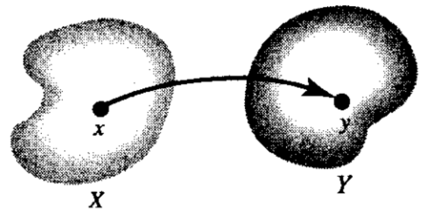


Figura 1. Ilustración de la correspondencia entre los conjuntos X y Y (Leithold, 1998, p.2).

La definición de función y la interpretación intuitiva de ésta que propone Leithold (1998) enfatizan la correspondencia (estática) de un valor de x con un valor de y; pero no el hecho de que la variable x varía, así como también lo hace la variable y, ni tampoco resaltan que su variación sucede de manera conjunta.

Ante esta problemática, se propone en este trabajo un tratamiento introductorio para la función, que pretende apoyar el desarrollo de un significado de este objeto matemático vinculado a la variación. Como punto de partida para el estudio de la función se eligieron fenómenos de variación donde las magnitudes que varían son magnitudes geométricas, considerando que las nociones de perímetro, área y longitud son familiares para los estudiantes por ser temas presentes en el currículo de matemáticas desde la educación básica. El tratamiento introductorio que proponemos para la función está materializado en un diseño que se encuentra en fase preliminar, el cual consiste de actividades didácticas fundamentadas en la teoría de significados y de configuraciones de objetos primarios del Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemáticos, EOS (Godino, Batanero y Font, 2007). Las actividades se desarrollan con la mediación de GeoGebra y parten de la manipulación de construcciones dinámicas. Se pretende que el estudiante desarrolle sistemas de prácticas matemáticas ligadas a la variación de magnitudes geométricas presentes en fenómenos geométricos dinámicos, las cuales contribuyan al desarrollo de un significado de función como modelo de la variación conjunta de magnitudes variables.

Elementos teóricos

Para fundamentar tanto el diseño de las actividades como el análisis de los datos emanados de su implementación con estudiantes, se retoman herramientas teóricas del EOS (Godino, Batanero y Font, 2007). Particularmente se consideran las nociones de *práctica matemática, significado* y *objetos matemáticos primarios*, que permitirán describir y analizar a detalle las prácticas matemáticas llevadas a cabo por los estudiantes al abordar las actividades didácticas del diseño preliminar implementado con ellos.

En el EOS la noción de *significado* es relativa al sujeto y está anclada a la acción sistemática de dicho sujeto al resolver un mismo tipo de situaciones problema, es decir, el significado de un objeto está intrínsecamente ligado al sujeto, a las situaciones problema y a las prácticas matemáticas que el sujeto realiza. Por ello, el *significado* que tiene un sujeto sobre un objeto matemático se define como el sistema de prácticas matemáticas (operativas o discursivas) realizadas por el sujeto ante la resolución de un mismo tipo de situaciones-problema en las que dicho objeto interviene (Pino-Fan, Font y Godino, 2014). Se puede decir que el significado es todo aquello que el sujeto pueda decir del objeto o hacer con el objeto al abordar un mismo tipo de problemas. Dentro del EOS, el significado se puede concebir desde diferentes perspectivas, dependiendo de si se quiere referir al significado promovido por un diseño didáctico, un profesor o una institución (significado institucional) o bien el significado desarrollado por un estudiante o sujeto (significado personal). Como herramienta para caracterizar con mayor detalle el sistema de prácticas matemáticas desarrolladas por un sujeto (o al seno de una institución), el EOS propone seis entidades a las cuales denomina *objetos matemáticos primarios*, los cuales son elementos que intervienen o son empleados durante la realización de las prácticas matemáticas, o bien, emergen de ellas. Estos objetos son (Godino, Batanero y Font, 2007): *Situación problema, lenguaje* (verbal, algebraico, etc.), *concepto-definición, proposición* (propiedades de los objetos, teorema, corolario, etc.), *argumento y procedimiento* (algoritmos, técnicas, etc.).

Las actividades didácticas

El diseño que se describirá está en proceso de refinamiento y ampliación. Como parte de este proceso, se realizó una prueba experimental con estudiantes para explorar el sistema de prácticas matemáticas desarrolladas por estudiantes al ser involucrados en un proceso de instrucción matemática guiado por las actividades diseñadas. Se experimentaron cinco actividades didácticas que trataron sobre: 1) Variación lineal, 2) variación lineal y variación no lineal, 3) obtener la función de pendientes de funciones cuadráticas y cúbicas, 4) construir las funciones trigonométricas $sen(x)$ y $cos(x)$ y 5) obtener la función de pendientes de estas funciones trigonométricas. Las actividades parten de fenómenos geométricos dinámicos modelados con GeoGebra, como los siguientes: estiramiento de un rectángulo de altura constante, crecimiento de un cuadrado, movimiento de un punto variable sobre la gráfica de una función, y movimiento de un punto sobre un círculo. Las *prácticas matemáticas* que estas actividades pretendían promover son las siguientes:

- Identificar magnitudes variables que intervienen en el fenómeno modelado con GeoGebra (como en el cuadrado de la Figura 2: tiempo, longitud del lado, área, perímetro, longitud de la diagonal, punto medio del lado, altura, etc.).
-

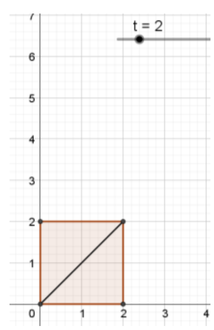


Figura 2. Cuadrado que crece.

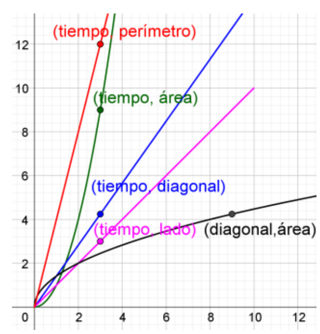


Figura 3. Gráficas generadas por la covariación de diferentes parejas de magnitudes geométricas variables.

- Describir cualitativamente el cambio de las magnitudes, identificando elementos en común o diferentes en la forma como cambian, y determinar los valores que pueden tomar.
- Describir cualitativamente cómo varían éstas con respecto al tiempo y explorar cuantitativamente su variación conjunta para caracterizar la variación lineal.
- Construir en GeoGebra (Figura 3) el par ordenado variable (x, y) que concentra los valores de las magnitudes covariantes, como antecedente de la gráfica de la función y construir la gráfica de la función lineal (Figura 3) mediante el rastro del punto (x, y).
- Construir pares ordenados y gráficas donde se relacionen distintos pares de magnitudes variables, no solo con respecto al tiempo, de manera que surjan tipos de variación distintos a la variación lineal (Figura 3).
- Caracterizar cualitativa y cuantitativamente la variación no lineal.
- Asociar las coordenadas de un punto variable con magnitudes geométricas e identificar la pendiente como magnitud variable.
- Elaborar gráficas que representen la covariación de la coordenada x de un punto variable y otras magnitudes geométricas (pendiente, ángulo, etc.).

La experiencia de clase

La prueba experimental de las actividades didácticas se llevó a cabo con diez estudiantes del del área de Arquitectura y Diseño de una universidad pública de México, distribuida en cuatro sesiones no consecutivas de tres horas cada una. Los estudiantes cursaban por segunda vez una asignatura de matemáticas muy densa en contenido, pues abarca temas de Geometría Analítica, Cálculo diferencial y Cálculo integral. La investigadora fue la diseñadora de las actividades y profesora responsable del grupo. Para guiar el desarrollo de las actividades, como parte del diseño, se elaboraron hojas de trabajo en papel, así como hojas de trabajo virtual y applets en la plataforma virtual de GeoGebra. Los estudiantes no tenían experiencia con el uso de GeoGebra. Cada uno de los estudiantes trabajó de manera individual en sus hojas de trabajo y se realizaron discusiones grupales guiadas por la profesora/investigadora en diferentes momentos de las actividades para la negociación de significados personales mediante la socialización de prácticas matemáticas y objetos matemáticos primarios intervinientes y emergentes en éstas (procedimientos, propiedades, conceptos, etc.).

Al terminar las sesiones correspondientes a los temas de geometría analítica, la profesora dio inicio al estudio de la función, comenzando con la siguiente tarea: Escribir brevemente qué es una función. Dos de las respuestas representativas que se obtuvieron en el grupo de estudiantes fueron “$F(x)=$ a tal valor del cual depende” (Figura 4) y “recuerdo que llevaba $f(x)=$ antes de la ecuación” (Figura 5). Estas respuestas ponen de manifiesto un significado de función vinculado a prácticas matemáticas realizadas en un lenguaje algebraico.

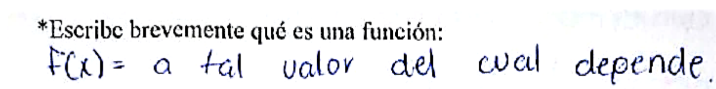

*Escribe brevemente qué es una función:
F(x) = a tal valor del cual depende.

Figura 4. Función como expresión algebraica de una variable.
Respuesta de un estudiante.

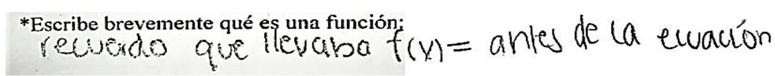

*Escribe brevemente qué es una función:
recuerdo que llevaba f(x)= antes de la ecuación

Figura 5. Función como ecuación.
Respuesta de otro estudiante.

La primera actividad, correspondiente a la variación lineal, fue fundamental para el desarrollo del sistema de prácticas matemáticas pretendidas por el diseño. Es por ello que su implementación será descrita con mayor detalle que las restantes. Esta actividad inició con la observación de un fenómeno geométrico modelado con GeoGebra (Figura 6): un rectángulo que cambia sus dimensiones conforme pasa el tiempo durante 10 segundos, excepto su altura que es constante. El estudiante puede pausar e iniciar la animación en el momento que lo requiera para estudiar el fenómeno.

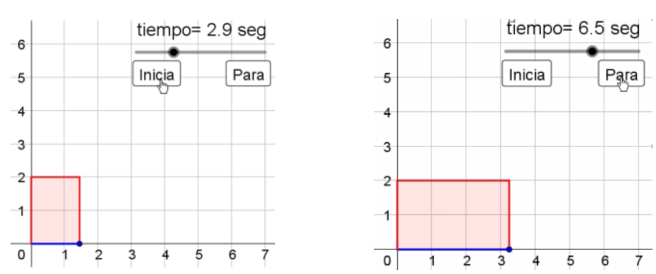
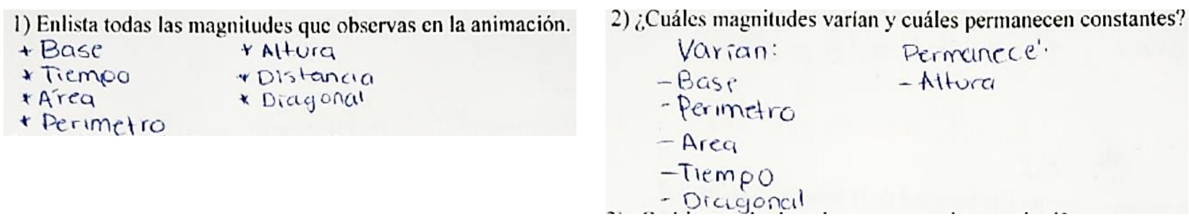


Figura 6. Rectángulo de altura constante que se estira.

La situación problema que se planteó para detonar la realización de prácticas matemáticas de los estudiantes fue la siguiente: ¿De qué maneras podemos modelar el fenómeno geométrico observado? Para resolver esta situación problema, se guio a los estudiantes con preguntas en sus hojas de trabajo, donde se les solicitó: 1) enlistar todas las magnitudes que observaran en la animación de GeoGebra y 2) clasificarlas en dos tipos: las que varían y las que permanecen constantes. En la Figura 7 se muestran las respuestas de uno de los estudiantes. Se pueden identificar como objetos matemáticos intervinientes en las respuestas del estudiante: el *lenguaje* verbal para nombrar las magnitudes y como *propiedades* la cualidad de las magnitudes de variar o permanecer constantes.

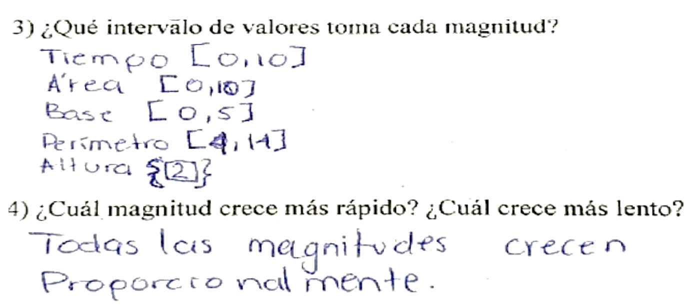

1) Enlista todas las magnitudes que observas en la animación.
* Base
* Tiempo
* Área
* Perimetro
* Altura
* Distancia
* Diagonal

2) ¿Cuáles magnitudes varían y cuáles permanecen constantes?
Varían:
- Base
- Perimetro
- Area
- Tiempo
- Diagonal

Permanece:
- Altura

Figura 7. Identificación de magnitudes variables: tiempo, área, perímetro, diagonal, (longitud de la) base.

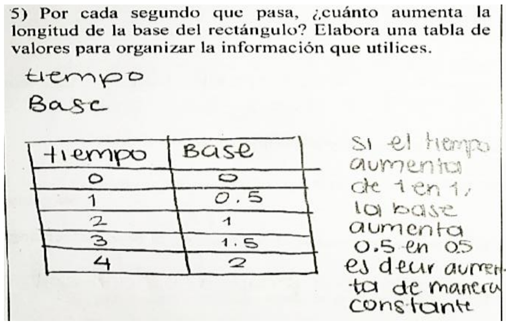
Con la mediación del applet de GeoGebra, los estudiantes exploraron los valores que toman algunas de las magnitudes (Figura 8). La escritura en forma de intervalos (lenguaje institucional) se llevó a cabo con la intervención de la profesora/investigadora. Posteriormente, se les preguntó en la hoja de trabajo cuál magnitud crece más rápido y cuál crece más lento. Los estudiantes intentaron hacer esta distinción únicamente observando el applet; sin embargo, no lo lograron. Durante la discusión grupal, algunos estudiantes afirmaron que las magnitudes cambiaban igual y otros mencionaron que las magnitudes iban creciendo proporcionalmente y que por lo tanto todas crecían igual de rápido (Figura 8). Sin embargo, al preguntarle a los estudiantes a qué se referían con "proporcionalmente" no pudieron dar una explicación.


3) ¿Qué intervalo de valores toma cada magnitud?
Tiempo [0,10]
Área [0,10]
Base [0,5]
Perímetro [4,14]
Altura {2}

4) ¿Cuál magnitud crece más rápido? ¿Cuál crece más lento?
Todas las magnitudes crecen Proporcionalmente.

Figura 8. Intervalos de valores de las magnitudes y descripción de cómo cambian.
Respuesta de un estudiante.

En las preguntas 3 y 4 de la primera actividad, se identifican como objetos primarios: *lenguaje* verbal, numérico y notación de intervalos; como *conceptos* el de intervalo de valores (que es el germen del concepto de dominio) y, como *propiedades,* que las magnitudes crecen proporcionalmente. Posteriormente, en la hoja de trabajo se guio al estudiante a que realizara una exploración numérica del fenómeno geométrico tomando datos numéricos, pausando y reanudando la animación del rectángulo. La respuesta de los estudiantes sugiere que parte de sus prácticas matemáticas desarrolladas en su educación matemática previa incluía la elaboración de tablas de valores con dos variables, pues no tuvieron problemas para elaborarla. Los estudiantes concluyeron que a aumentos constantes del tiempo corresponden aumentos constantes de la base. Un ejemplo de estas respuestas fue "Si el tiempo aumenta de 1 en 1, la base aumenta de 0.5 en 0.5, es decir, aumenta de manera conste" (Figura 9).


5) Por cada segundo que pasa, ¿cuánto aumenta la longitud de la base del rectángulo? Elabora una tabla de valores para organizar la información que utilices.

tiempo
Base

tiempo	Base
0	0
1	0.5
2	1
3	1.5
4	2

si el tiempo aumenta de 1 en 1, la base aumenta 0.5 en 0.5 es decir aumenta de manera constante

Figura 9. Descripción de la variación de la longitud de la base, respecto al tiempo. Respuesta de un estudiante.

En la Figura 9, se pueden identificar como objetos primarios:
Lenguaje variacional verbal (aumenta, aumenta de manera constante, de 1 en 1, de 0.5 en 0.5), numérico y tabular; *procedimientos* como elaborar tablas de datos y calcular incrementos; *propiedades* sobre las magnitudes (si una aumenta, la otra también, aumentos constantes de una producen aumentos constantes de la otra).

Posteriormente se trabajó con incrementos del tiempo distintos de 1. Luego, la profesora/investigadora pidió a los estudiantes consultar en Internet qué significa que dos magnitudes sean proporcionales, uno de ellos compartió con el grupo la descripción que encontró, quedado plasmada en la pizarra del aula y luego copiada a la hoja de trabajo de uno de ellos (Figura 10) de la siguiente manera: "Dos magnitudes son proporcionales si al dividir una con otra, el resultado es la misma constante". Empleando este *concepto-definición* de proporcionalidad, durante una discusión grupal, se llegó a la conclusión de que el tiempo y la base no eran proporcionales uno a otra; sino que "El cambio en el tiempo (Δt) es directamente proporcional al cambio en la base (ΔB), $\frac{\Delta B}{\Delta t} = 0.5$" (Figura 10), es decir, la proporcionalidad existía entre los cambios de la base y los cambios del tiempo. De esta manera, a través de la noción de proporcionalidad entre los incrementos de dos magnitudes variables, se define la variación lineal conjunta de las magnitudes. Cabe mencionar que en la discusión grupal la profesora introdujo el símbolo "Δ" para denotar a los incrementos de las magnitudes.

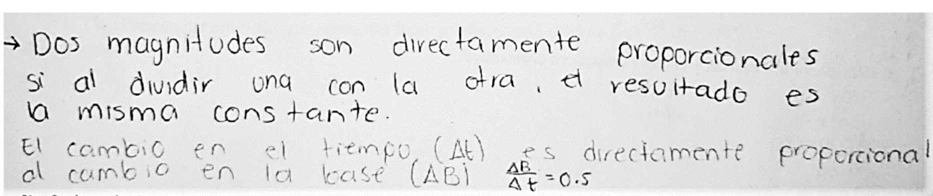

→ Dos magnitudes son directamente proporcionales si al dividir una con la otra, el resultado es la misma constante.
El cambio en el tiempo (Δt) es directamente proporcional al cambio en la base (ΔB) $\frac{\Delta B}{\Delta t} = 0.5$

Figura 10. Proporcionalidad entre el cambio de la base y el cambio en el tiempo. Respuesta de un estudiante.

Las prácticas matemáticas y objetos primarios desarrollados por los estudiantes al explorar cómo varía la base del rectángulo cuando varía el tiempo, fueron extendidas al estudio de la variación conjunta de otras magnitudes, como el perímetro y el tiempo. En la Figura 11 se muestran los *procedimientos* seguido por un estudiante al explorar la variación del perímetro con respecto al tiempo: elabora una tabla de datos con incrementos constantes del tiempo, calcula la constante de proporcionalidad entre los incrementos del perímetro y el tiempo mediante un cociente y, al calcular el cociente entre valores del perímetro y el tiempo concluye que estas magnitudes no son directamente proporcionales (*propiedad*).

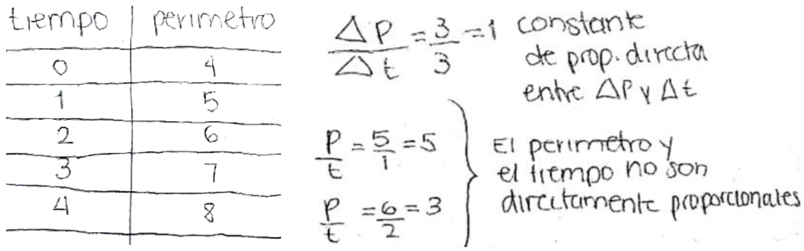


Figura 11. El estudiante emplea las prácticas matemáticas en el estudio de otro par de magnitudes.

Una vez realizada esta exploración numérica de la variación, se procedió a la obtención de expresiones algebraicas que representaran los datos de las tablas ($B = t/2$ para la base con respecto al tiempo y $P = t + 4$ para el perímetro con respecto al tiempo). Posteriormente, se pasó a un estudio gráfico y dinámico en GeoGebra de la covariación de las magnitudes. En un applet de GeoGebra se presentaron dos puntos variables, uno en el eje de las abscisas representando al tiempo y otro en el eje de las ordenadas representando a la longitud de la base. Luego de observar cómo variaban cada uno de los puntos en los ejes, la profesora preguntó a los estudiantes cómo graficarían los datos de la tabla y ellos indicaron que colocarían un punto con coordenadas x y y, siendo x el tiempo y y la base. La profesora indicó a los estudiantes que entonces los puntos serían del tipo (t, B) y dado que $B = \frac{t}{2}$, el punto o par ordenado podría escribirse también como $\left(t, \frac{t}{2}\right)$. Los estudiantes teclearon en GeoGebra el punto $\left(t, \frac{t}{2}\right)$ y al pulsar el botón inicio el punto comenzó a moverse. Al activar el rastro del punto en GeoGebra, los estudiantes pudieron observar la gráfica generada por la variación conjunta de los puntos sobre los ejes que representaban las magnitudes variables tiempo y base. Los estudiantes aplicaron esta estrategia para graficar par ordenado variable que generar la gráfica del perímetro con respecto al tiempo (Figura 12).

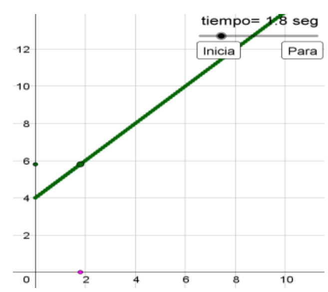


Figura 12. Gráfica del perímetro con respecto al tiempo con el par ordenado variable (t ,$t + 4$).

Una vez representada la gráfica del perímetro y la base, ambas con respecto al tiempo, las siguientes propiedades de la función lineal se enriquecieron con la representación gráfica del fenómeno: “Es directamente proporcional a la diferencia del tiempo y perímetro”, “tienen pendiente constante, y la pendiente es la constante de proporcionalidad” (Figura 13).

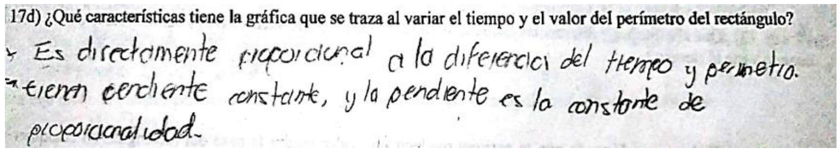


Figura 13. Propiedades de la función lineal

En general, las prácticas matemáticas de la actividad 1 se pueden resumir como sigue: Identificar magnitudes variables, describir cómo cambian, elegir una magnitud de referencia, explorar numéricamente cómo varía una con respecto a la de referencia, crear en GeoGebra el par ordenado variable y la gráfica, y determinar una expresión algebraica que relacione a las magnitudes. Estas prácticas matemáticas, así como la situación problema de partica, son distintas a las prácticas típicas en el estudio de la función lineal en los cursos de cálculo.

En la actividad 2 se realizó el estudio de un fenómeno que incluía magnitudes que crecen de manera uniforme y una magnitud que crece cada vez más rápido. Este fenómeno geométrico fue el crecimiento de un cuadrado conforme pasa el tiempo. Los estudiantes se aproximaron al problema mediante las prácticas matemáticas desarrolladas en la actividad 1 y encontraron que los incrementos del área no son proporcionales a los incrementos del tiempo. Al construir los pares ordenados con la mediación de GeoGebra observaron que la gráfica de la generada por el área con respecto al tiempo no era una recta. Este caso dio pie al estudio de la variación que no crece de manera constante, sino acelerada. La profesora/investigadora promovió durante varias sesiones el establecimiento de una relación entre la noción de velocidad y la noción de pendiente de una recta, mediante el estudio de problemas de movimiento rectilíneo uniforme. De manera que posteriormente se pudiera pasar al estudio de las "funciones de pendientes" asociadas a la gráfica de una función dada.

En la actividad 3, comenzando con el caso de la parábola como gráfica de la posición con respecto al tiempo en GeoGebra, se colocó un punto variable A sobre la gráfica y se realizó un estudio de la pendiente de la parábola en ese punto mediante la herramienta de *zoom* de GeoGebra, que permitió a los estudiantes observar que localmente la parábola es recta y por lo tanto tiene localmente una velocidad constante. Sin embargo, al variar el punto A en torno al cual se hace zoom, la velocidad es distinta, por lo tanto, la velocidad del movimiento representado en la parábola es variable. Como la parábola es localmente recta, y las rectas tienen pendiente, esa pendiente se puede medir, entonces se puede relacionar con la noción de magnitud variable estudiada previamente en la actividad 1.

La profesora indicó a los estudiantes que emplearan la herramienta "recta tangente" de GeoGebra para trazar una recta tangente a la gráfica en el punto variable que fue colocado sobre esta. Los estudiantes observaron cómo la recta tangente cambiaba su inclinación al cambiar el punto variable. Luego, al hacer zoom a la gráfica en torno al punto variable, observaron que la recta tangente y la gráfica eran idénticas localmente, por lo cual tenían la misma pendiente. De esta manera, surgió la idea de establecer un par ordenado que asociara el punto variable con la pendiente (variable) de la recta tangente para medir la velocidad variable del movimiento representado por la parábola. La profesora sugirió a los estudiantes que emplearan la herramienta de GeoGebra para medir la pendiente de una recta y que una manera de crear el par ordenado variable que ellos querían era asociar la coordenada x del punto variable (que se escribe $x(A)$ en GeoGebra) con el valor de la pendiente, calculado con GeoGebra. Los estudiantes crearon el par ordenado $(x(A), m)$ y generaron la gráfica de la recta asociada a la parábola, su función de pendientes. Después de esto, graficaron un polinomio de grado 3, colocaron un punto variable sobre su gráfica, trazaron la recta tangente, midieron su pendiente, crearon el par ordenado variable $(x(A), m)$ y trazaron la gráfica de la función de pendientes del polinomio de grado 3, la cual resultó ser una parábola (Figura 14).

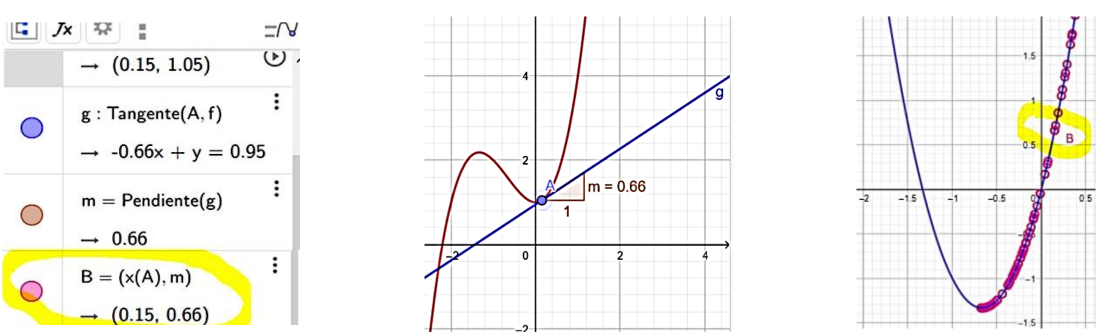


Figura 14. Función de pendientes. Construcciones de un estudiante en la hoja de trabajo virtual.

En la actividad 4, la construcción de las funciones trigonométricas seno y coseno se realizó mediante el estudio del círculo trigonométrico, observando un punto A que giraba sobre la circunferencia. Los estudiantes identificaron como magnitudes variables en este fenómeno al ángulo con el que giraba el punto A y las coordenadas del punto mismo. El applet mostraba posteriormente los valores de las coordenadas x y y del punto A asociadas a longitudes de los catetos en un triángulo como se muestra en la Figura 15. Al construir un par ordenado que asociara el ángulo α con con el que gira el punto A y el valor de la coordenada x del punto A, se trazó la gráfica de la función coseno y los estudiantes se sorprendieron al ver cómo se generaba la curva que les era familiar del curso de matemáticas que habían cursado sin éxito. De manera similar generaron la gráfica de la función seno (Figura 15).

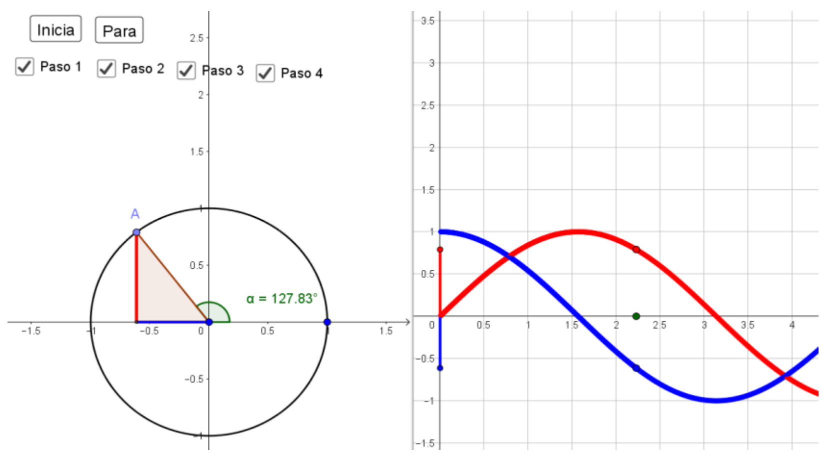


Figura 15. Funciones seno y coseno.

En la actividad 5, tendiendo como antecedente la actividad donde construyeron las funciones de pendientes de los polinomios de grado 2 y 3, los estudiantes procedieron a elaborar las gráficas de las funciones de pendientes asociadas a las funciones seno y coseno (Figura 16). Nuevamente los estudiantes se sorprendieron con las gráficas obtenidas y comenzaron a darse cuenta de que las funciones de pendientes tenían relación con la derivada que habían aprendido mecánicamente en el curso previo, pues expresaron proposiciones como: "¡Ah! ¡La derivada de seno es coseno!".

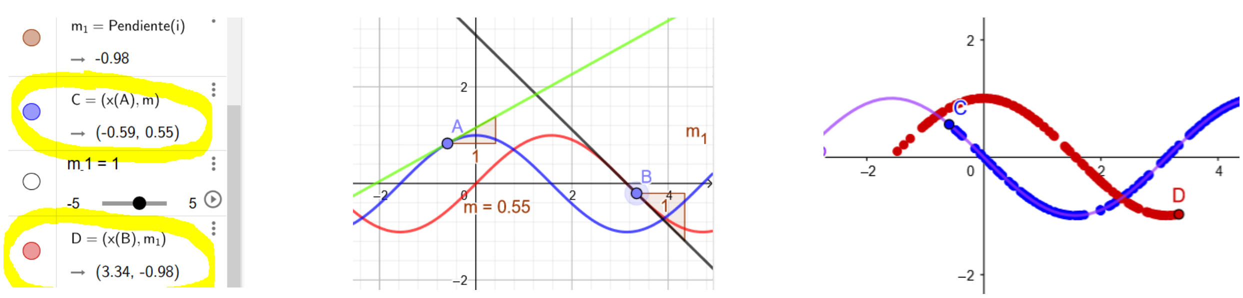


Figura 16. Función de pendientes de seno y coseno, realizadas por un estudiante en la hoja de trabajo virtual.

Conclusiones

El análisis de las prácticas matemáticas desarrolladas por los estudiantes durante la puesta en escena del diseño didáctico, así como la identificación de los objetos matemáticos personales manifestados en tales prácticas, permiten concluir que las actividades propuestas, aunque requieren modificaciones, tienen el potencial para iniciar el desarrollo de un significado personal para la noción de función como modelo de un fenómeno geométrico dinámico donde intervienen magnitudes variables. Este significado es más robusto (en prácticas y objetos matemáticos) que aquel manifestado por los estudiantes al inicio del curso, el cual se restringía a un proceso de sustitución de valores en una fórmula o expresión algebraica. De una actividad didáctica a otra, los estudiantes se fueron apropiando de prácticas matemáticas como: identificación y elección de magnitudes variables en los fenómenos geométricos presentados; exploración de la variación de éstas a través del estudio de los valores obtenidos mediante las herramientas de GeoGebra para la medición de segmentos, tangentes, etc.; distinción entre variación lineal y no lineal usando la noción de proporcionalidad; establecimiento de una relación entre dos magnitudes formando un par ordenado variable que generaba de la gráfica de la función; entre otras.

El sistema de prácticas promovido con las actividades diseñadas favoreció que la gráfica de la función emergiera, gradualmente, como la representación de una relación que se puede establecer entre dos magnitudes que están variando de manera conjunta en un fenómeno, se tenga o no una expresión algebraica dada. Además, fue un elemento de discusión que la elección del par de magnitudes a relacionar, así como la elección de la magnitud que sería considerada variable independiente, condicionan la gráfica que resultará. Aunque durante la puesta en escena del diseño didáctico no se realizó una discusión profunda sobre las propiedades definitorias de una relación funcional, es importante resaltar que los applets diseñados tienen el potencial de proveer al estudiante un espacio de reflexión sobre tales propiedades, pues permiten poner en relación diferentes pares de magnitudes y elegir de diferente manera cuál será la variable independiente, lo cual permite al estudiante explorar las consecuencias de estas elecciones al trazar la gráfica con el par ordenado variable. Una consecuencia interesante de estas elecciones es que la gráfica obtenida al relacionar dos magnitudes variables podría no representar una función.

Una característica positiva del diseño didáctico es que la derivada de una función pudo ser introducida de manera temprana, como una función obtenida a partir del estudio de fenómenos geométricos donde la pendiente de una recta era una magnitud variable. Una posible ampliación del diseño podría incluir naturalmente el estudio de fenómenos geométricos donde sea una magnitud variable el área delimitada por la gráfica de una función y el eje x, en un intervalo variable (variando el extremo derecho del intervalo), de manera que se pueda introducir la integral como “función de área” de manera dinámica, y no de manera estática como valor correspondiente al área fija de una región dada. Es importante, sin embargo, resaltar que el tratamiento que se propone en este diseño didáctico para la derivada y la integral, como funciones que emergen como modelos de fenómenos geométricos de variación, es limitado en el sentido de que la “función de pendientes” y la “función de área” son solamente una pequeña parte del significado de estas nociones matemáticas que puede ser estudiado en los cursos de cálculo. Un estudio más robusto de la derivada y la integral, desde un punto de vista genuinamente variacional, escapa de los alcances de este diseño didáctico, pues su propósito central es proponer una introducción a la noción de función. Sin embargo, las prácticas matemáticas promovidas en las actividades 1 y 2 (como la identificación de magnitudes variables y la caracterización de la variación lineal) pueden ser retomadas en el estudio de fenómenos de variación en contextos extramatemáticos y ser redirigidas hacia el estudio de la variación y la acumulación.

Por último, se resalta la utilidad del EOS tanto para la formulación del diseño como para el análisis de los datos emanados de su implementación. Por un lado, las nociones de práctica matemática y de objeto matemático primario del EOS permitieron caracterizar con detalle el significado (institucional) de la noción de función que el diseño buscaría desarrollar en los estudiantes. Por otro lado, estas herramientas permitieron también dar cuenta del trabajo matemático realizado por los estudiantes al abordar las actividades didácticas del diseño propuesto, mediante la descripción de la diversidad de prácticas matemáticas y objetos matemáticos personales manifestados por ellos en las tareas propuestas.

Referencias bibliográficas

Artigue, M. (1998). Enseñanza y aprendizaje del Análisis elemental: ¿qué se puede aprender de las investigaciones didácticas y los cambios curriculares? *Revista Latinoamericana de Matemática Educativa, 1*(1)*,*44-55.

Bressoud, D., Martinez-Luaces, V., Ghedamsi, I. y Törner, G. (2017). Topic Study Group No. 16: Teaching and Learning of Calculus. En G. Kaiser (Ed) *Proceedings of the 13th International Congress on Mathematical Education. ICME-13 Monographs* (pp. 447-452). Springer, Cham.

Godino, J. D. Batanero, C. y Font, V. (2007). The onto-semiotic approach to research in mathematics education. *ZDM-The International Journal on Mathematics Education*, *39* (1-2), 127-135.

Ímaz, C., y Moreno, L. (2010). *La génesis y la enseñanza del cálculo. Las trampas del rigor*. México: Trillas.

Kidron, I. (2014). Calculus teaching and learning. En S. Lerman (Ed.). *Encyclopedia of Mathematics Education* (pp. 69-75). doi: 10.1007/978-94-007-4978-8.

Kouropatov, A. y Dreyfus, T. (2014). Learning the integral concept by constructing knowledge accumulation. *ZDM-The International Journal on Mathematics Education*, *46*(4), 533-548. doi: 10.1007/s11858-014-0571-5

Leithold, L. (1998). *El cálculo* (7a. ed.). México: Oxford University Press.

Moreno-Armella, L. (2014). An essential tension in mathematics education. *ZDM-The International Journal on Mathematics Education, 46*(4), 621-633. doi: 10.1007/s11858-014-0580-4

Pino-Fan, L., Font, V. y Godino J. D. (2014). El conocimiento didáctico-matemático de los profesores: Pautas y criterios para su evaluación y desarrollo. En C. Dolores, M. García, J. Hernández y L. Sosa (Eds.), *Matemática Educativa: La formación de profesores* (pp. 137-151). México, DF: Ediciones DDS y Universidad Autónoma de Guerrero.

Robles, M. G., del Castillo, A. G. y Font, V. (2012). Análisis y valoración de un proceso de instrucción sobre la derivada. *Educación Matemática, 24*(1), 35-71.

Thompson, P. W., y Carlson, M. P. (2017). Variation, covariation, and functions: Foundational ways of thinking mathematically. En J. Cai (Ed.), *Compendium for research in mathematics education* (pp. 421-456). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.