Desarrollo del razonamiento algebraico elemental. Desafíos para la formación de profesores.

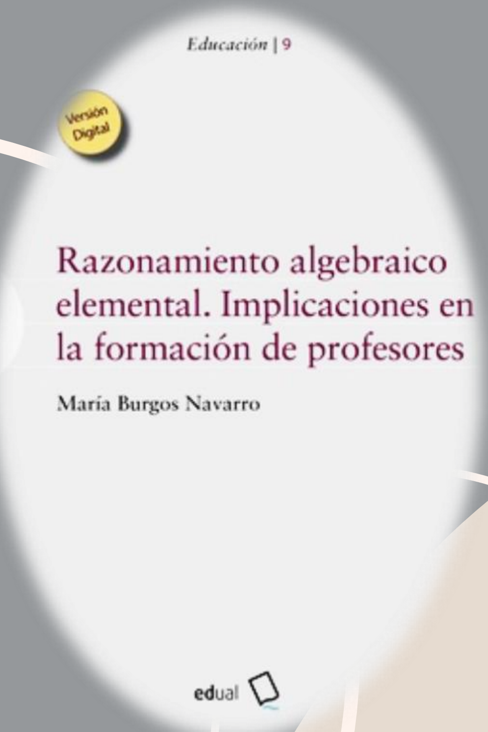
Uniandes Colombia | Facultad de Educación

Julio, 2024

María Burgos

Universidad de Granada (España)

Desarrollo del razonamiento algebraico elemental. Desafíos para la formación de profesores



Introducción

Desde hace ya varias décadas se ha venido consolidando el interés en la comunidad de investigadores en educación matemática por el desarrollo del razonamiento algebraico en los primeros niveles de enseñanza

.

Diversas perspectivas teóricas y propuestas curriculares recomiendan la introducción de contenidos algebraicos desde los primeros niveles educativos, con el objetivo de enriquecer la actividad matemática escolar y de favorecer el acceso a la matemática en secundaria.

Clarificar la naturaleza del álgebra escolar

Desarrollo de formas de razonamiento algebraico desde los primeros niveles educativos

Desarrollo de formas de razonamiento algebraico desde los primeros niveles educativos

Clarificar la naturaleza del álgebra escolar

¿Qué?

- ✓ Buscar regularidades, relaciones y propiedades
- ✓ Generalizar
- ✓ Representar
- ✓ Justificar y razonar con generalizaciones como nuevos objetos matemáticos

¿Dónde?

- ✓ Aritmética
- ✓ Geometría
- ✓ Medida
- ✓ Estocástica

¿Cómo?

Diversos grados de formalización

Clarificar la naturaleza del álgebra escolar

Diseñar propuestas curriculares que garanticen el desarrollo progresivo del razonamiento algebraico en los escolares

¿Qué?

- ✓ Generalización
- ✓ Estudio de patrones
- ✓ Estudio de relaciones funcionales

Desarrollo de formas de razonamiento algebraico desde los primeros niveles educativos

Desarrollo de formas de razonamiento algebraico desde los primeros niveles educativos

Clarificar la naturaleza del álgebra escolar

Diseñar propuestas curriculares que garanticen el desarrollo progresivo del razonamiento algebraico en los escolares

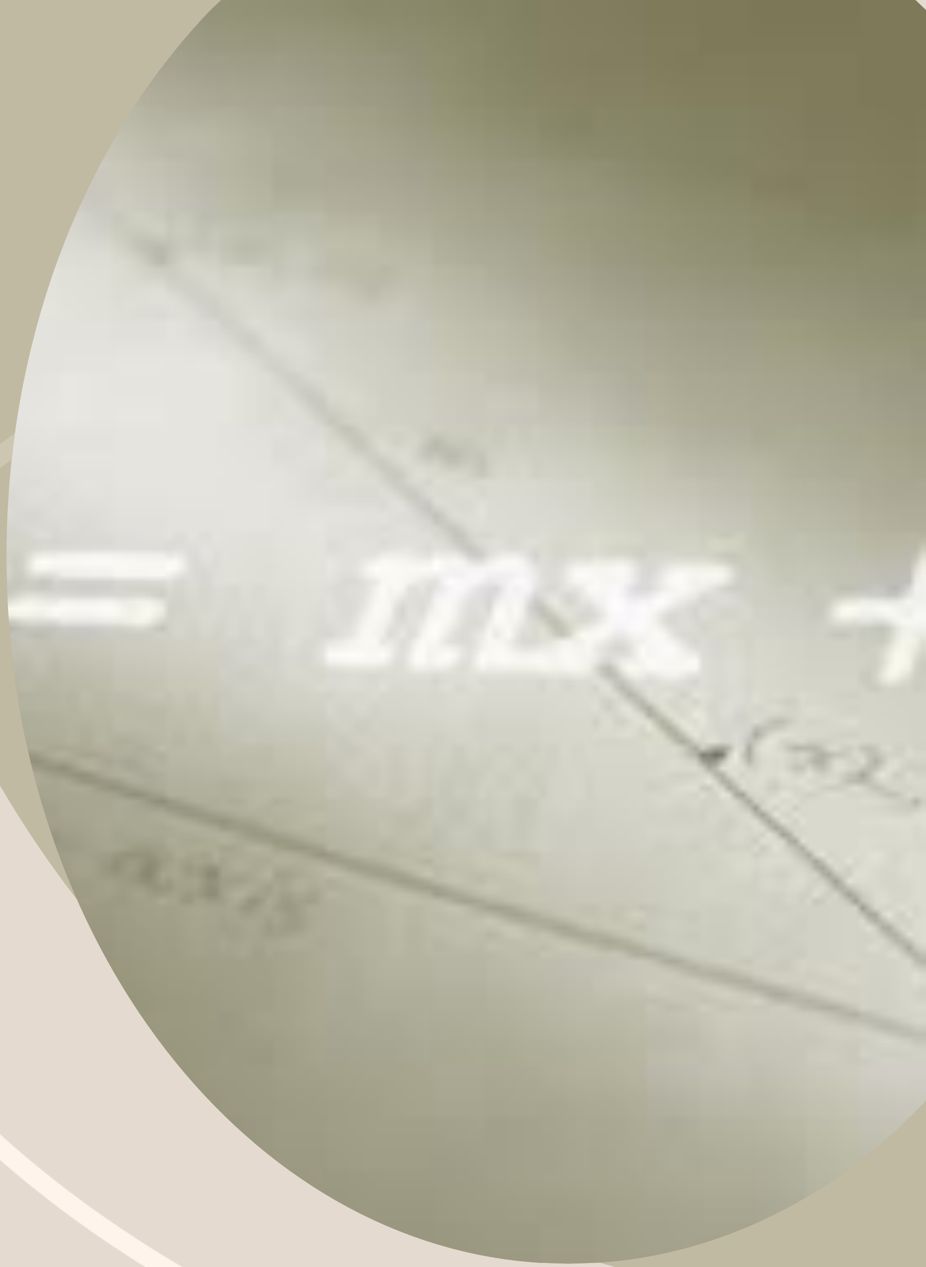
Formar a los profesores para desarrollar el razonamiento algebraico en los escolares

- ✓ Reconocer el carácter algebraico en las actividades matemáticas escolares
- ✓ Diseñar tareas que impliquen objetos y procesos algebraicos
- ✓ Prestar atención a estructura y relaciones

Aproximaciones al razonamiento algebraico elemental

El *early algebra* viene motivado por diversos aspectos:

- El cuestionamiento del enfoque tradicional para la enseñanza del álgebra, centrado en el uso y representación de incógnitas, variables y su tratamiento.
- La crítica a la organización curricular clásica que prescribe que los contenidos aritméticos deben ser introducidos antes que los algebraicos.
- Las demandas de la formación matemática de los alumnos para afrontar los desafíos del nuevo siglo, que persigue desarrollar en ellos competencias para razonar, formular, emplear e interpretar las matemáticas, situando al sentido algebraico como elemento integrador del currículo.



Relación entre aspectos, prácticas y enfoques del álgebra temprana (Blanton et al., 2011; Kaput, 2008).

Grandes ideas del álgebra temprana

ARITMÉTICA GENERALIZADA

ECUACIONES, EXPRESIONES, IGUALDAD Y DESIGUALDAD

PENSAMIENTO FUNCIONAL

RAZONAMIENTO PROPORCIONAL

VARIABLES

Project LEAP:

Learning through an Early Algebra Progression

Grandes ideas del álgebra temprana

ARITMÉTICA GENERALIZADA

- ✓ Es aritmética a un nivel más abstracto.
- ✓ Considerar el álgebra como aritmética generalizada supone comprender el carácter intrínsecamente algebraico de la aritmética, que trata de casos generales. El "sentido algebraico" de las operaciones aritméticas es un elemento esencial.
- ✓ La aritmética puede ser considerada como algebraica porque proporciona elementos para:
  - construir y expresar generalizaciones,
  - introducir el concepto de función a través de los sistemas de numeración y operaciones aritméticas.

Grandes ideas del álgebra temprana

ARITMÉTICA GENERALIZADA

Líneas de desarrollo

- Relaciones que rigen las operaciones y su generalización
- Representaciones de las relaciones aritméticas
- Justificaciones de las generalizaciones
- Razonamiento con generalizaciones

Project LEAP:
Learning through an Early Algebra Progression

Grandes ideas del álgebra temprana

ECUACIONES, EXPRESIONES, IGUALDAD Y DESIGUALDAD

- ✓ Aunque el álgebra es el medio que permite la expresión y manipulación de la generalidad, lo que distingue al pensamiento algebraico del aritmético es su carácter analítico (Radford, 2018).
- ✓ El lenguaje algebraico, como sistema de signos y reglas gramaticales, va de la mano de la formalización y la abstracción.
- ✓ Los objetos matemáticos, entidades abstractas (ideales, generales), necesitan estar mediados por signos para representarlos y operar con ellos.
- ✓ Distintas representaciones destacan diferentes propiedades de los objetos o las situaciones.

Grandes ideas del álgebra temprana

ECUACIONES, EXPRESIONES, IGUALDAD Y DESIGUALDAD

Expresiones algebraicas como objetos

- Considerar expresiones aritméticas desde un punto de vista estructural
- Concebir las expresiones como totalidades que puedes ser comparadas, igualadas, transformadas
- Entender las operaciones y expresiones aritméticas como objetos y no sólo como procesos
- Uso del lenguaje horizontal (de igualdades y paréntesis)
- Interpretación bidireccional de las igualdades y sentencias
- Desarrollar métodos propios y flexibles para la resolución de ecuaciones e inecuaciones

Molina (2009)

Grandes ideas del álgebra temprana

Se basa en la construcción, descripción y razonamiento con y sobre las funciones y los elementos que las constituyen (Cañadas y Molina, 2016)

PENSAMIENTO FUNCIONAL

Generalizar las relaciones entre cantidades que varían de forma conjunta

- Covariación
- Correspondencia
- Patrones recursivos

Expresar estas relaciones

- Verbal/ pictórico
- Diagramático/Tabular
- Gráfico/Simbólico

Usar dichas expresiones para analizar el comportamiento de una función

Grandes ideas del álgebra temprana

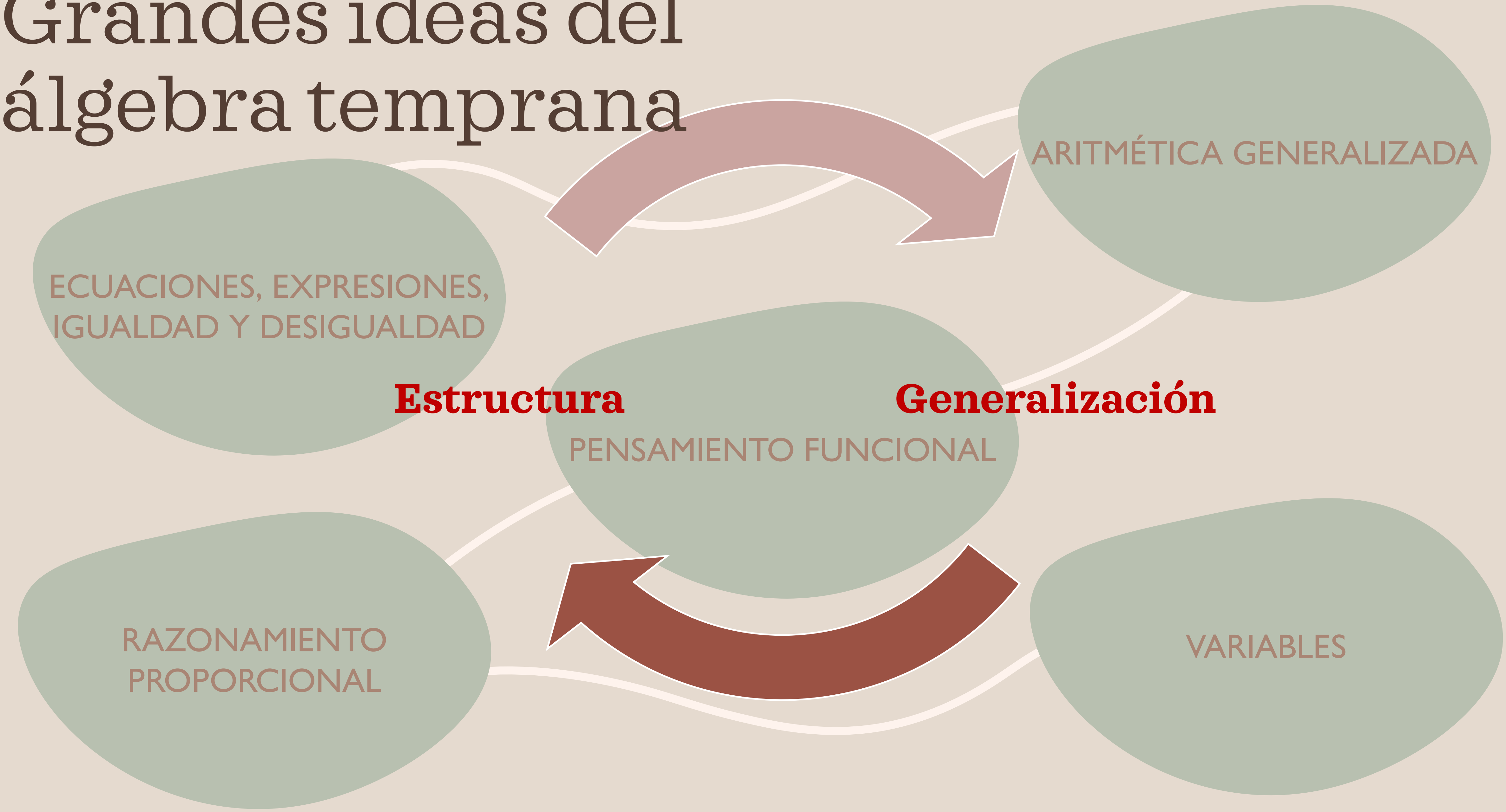
"Razonar algebraicamente sobre dos cantidades generalizadas que están relacionadas de tal manera que la correspondencia de una cantidad con la otra es invariable" (Blanton et al., 2015). Involucra:

- ✓ analizar las relaciones entre cantidades
- ✓ reconocer la estructura
- ✓ estudiar el cambio
- ✓ generalizar
- ✓ argumentar en base a las relaciones estructurales

RAZONAMIENTO PROPORCIONAL

en situaciones que involucran relaciones de proporcionalidad.

Grandes ideas del álgebra temprana



Grandes ideas del álgebra temprana

Forma de ver un objeto matemático como combinación de partes reconocibles, junto con propiedades y conexiones que sitúan al objeto como ejemplo particular de un tipo más general.

Lo que se generaliza en gran parte del álgebra temprana son los aspectos estructurales de las relaciones.
La generalización en el álgebra escolar supone reconocer estructuras para describir y expresar regularidades que se extraen de distintas situaciones (aritméticas, funcionales).

Estructura

- Relaciones entre las cantidades
- Relaciones a través de las cantidades
- Propiedades de las operaciones
- Relaciones entre las operaciones

Generalización

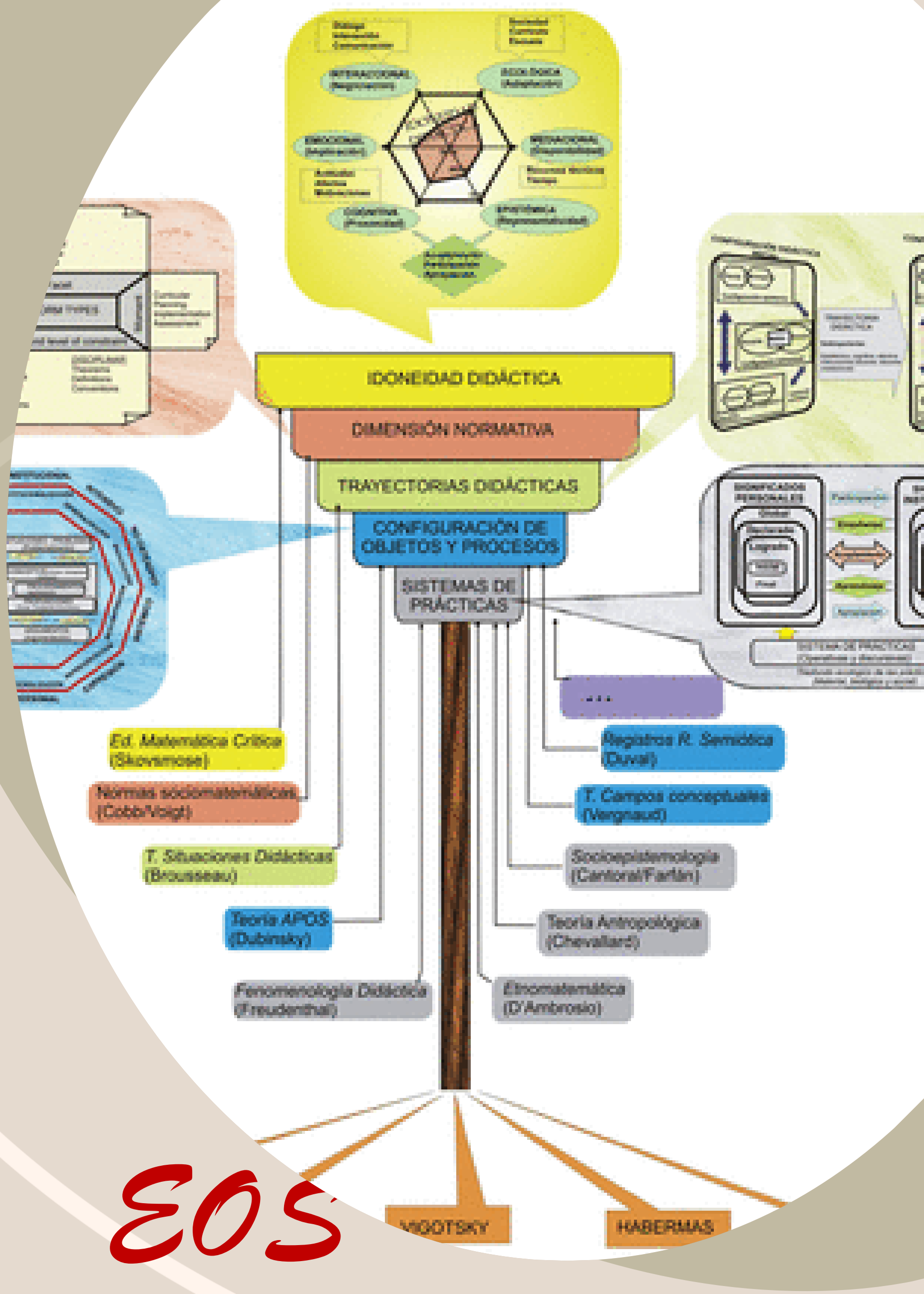
1. Identificar los elementos comunes
2. Extender el razonamiento más allá
3. Obtener resultados más amplios que los casos particulares
4. Proporcionar una expresión directa que permita generar cualquier término

El EOS y el modelo RAE

El EOS asume una visión de las matemáticas en la que la actividad de resolución de problemas aparece como elemento central en la construcción del conocimiento matemático.

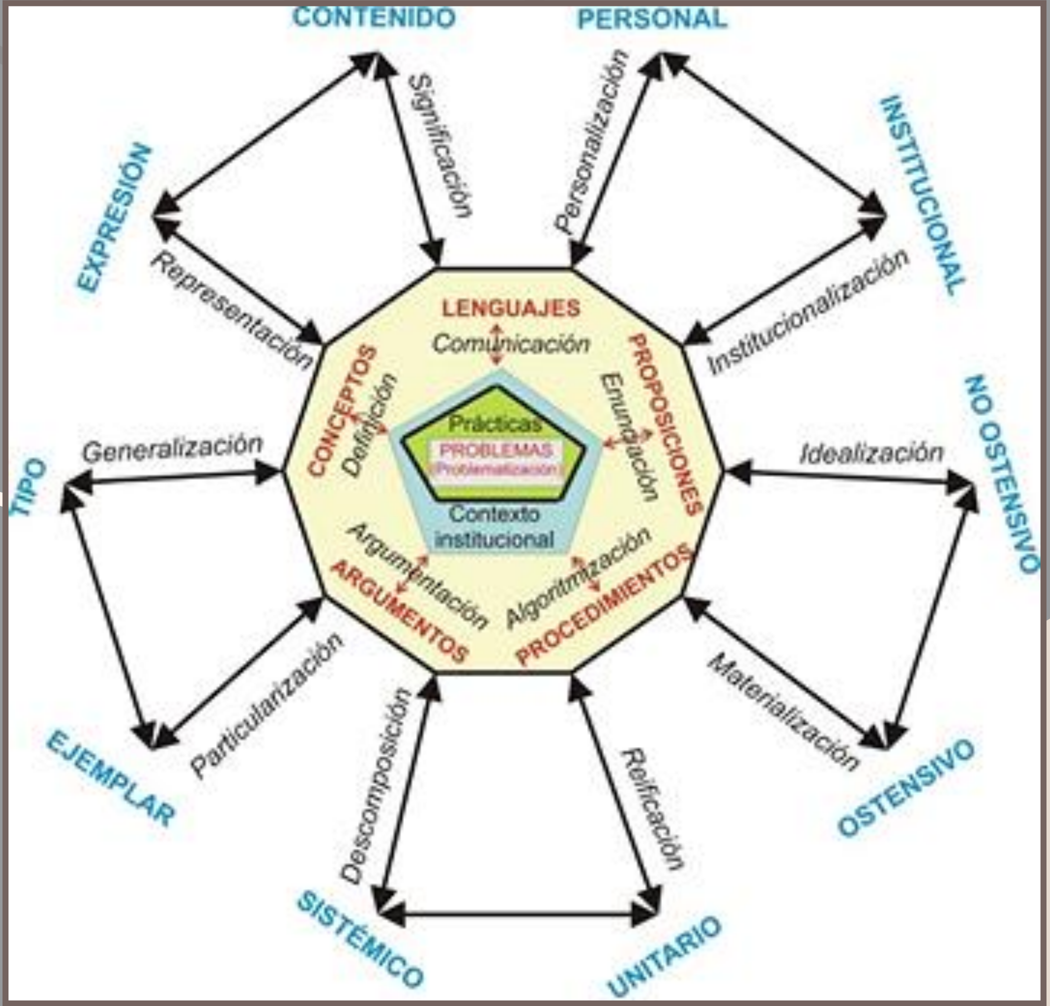
Las prácticas matemáticas constituyen la razón de ser y el significado de los objetos emergentes de las mismas.

Ha desarrollado nociones teóricas y herramientas metodológicas que permiten analizar tanto a nivel macro como micro los procesos de enseñanza y aprendizaje en sus diferentes dimensiones.



EOS

Las nociones de práctica matemática y sistema de prácticas constituyen el punto de partida para el análisis de la actividad matemática (Font, Godino y Gallardo, 2013).



Un problema

Hemos comprado seis cajas de muffins. Los de frutos rojos vienen en cajas con 4 unidades y los de chocolate vienen en cajas de 3 unidades. En total hay 20 muffins. ¿Cuántas cajas son de muffins de frutos rojos y cuántas son de muffins de chocolate?

Dos soluciones…

El **alumno A** resolvió el problema de la siguiente manera:

Supongamos que hay el mismo número de cajas de muffins de frutos rojos y de chocolate: tres de cada.

$$4 + 4 + 4 + 3 + 3 + 3$$

Como el resultado sobrepasa el total de 20 muffins, excediéndose en un muffin, se cambia una caja de los de frutos rojos (de 4 muffins) por una de los de chocolate (de 3 muffins).

Finalmente se obtiene 4 cajas de muffins de frutos rojos y 2 de los de chocolate:

$4 + 4 + 3 + 3 + 3 + 3$, *teniendo un total de 20 patas.*

El **alumno B** resolvió el problema de la siguiente manera:

Sea C el número de cajas de muffins de chocolate y F el número de cajas de muffins de frutos rojos. Como el total de cajas debe sumar 6, entonces,

$C + F = 6$.

Por otro lado, se debe tener un total de 20 muffins entre las cajas de ambos tipos, esto es, $3C + 4F = 20$.

De $C + F = 6$ *se obtiene que* $C = 6 - F$*; por tanto,* $3(6 - F) + 4F = 20$,

esto es $18 + F = 20$, *obteniéndose finalmente que* $F = 2$.

Si $F = 2$, *entonces* $C = 4$.

Se deben tener 2 cajas de muffins de frutos rojos y 4 cajas de muffins de chocolate para tener un total de 20 muffins.

Dos soluciones…

El **alumno A** resolvió el problema de la siguiente manera:

Supongamos que hay el mismo número de cajas de muffins de frutos rojos y de chocolate: tres de cada.

$$4 + 4 + 4 + 3 + 3 + 3$$

Como el resultado sobrepasa el total de 20 muffins, excediéndose en un muffin, se cambia una caja de los de frutos rojos (de 4 muffins) por una de los de chocolate (de 3 muffins).

Finalmente se obtiene 4 cajas de muffins de frutos rojos y 2 de los de chocolate:

$4 + 4 + 3 + 3 + 3 + 3$, *teniendo un total de 20 patas.*

A emplea números naturales particulares a los cuales les aplica operaciones aritméticas.

El **alumno B** resolvió el problema de la siguiente manera:

Sea C el número de cajas de muffins de chocolate y F el número de cajas de muffins de frutos rojos. Como el total de cajas debe sumar 6, entonces,

$C + F = 6.$

Por otro lado, se debe tener un total de 20 muffins entre las cajas de ambos tipos, esto es, $3C + 4F = 20.$

De $C + F = 6$ *se obtiene que* $C = 6 - F$*; por tanto,* $3(6 - F) + 4F = 20,$

esto es $18 + F = 20$*, obteniéndose finalmente que* $F = 2.$

Si $F = 2$*, entonces* $C = 4.$

Se deben tener 2 cajas de muffins de frutos rojos y 4 cajas de muffins de chocolate para tener un total de 20 muffins.

B usa "letras" para representar las cantidades desconocidas y opera con ellas de acuerdo con ciertas reglas para obtener la solución.

Dos soluciones...

El **alumno A** resolvió el problema de la siguiente manera:

Supongamos que hay el mismo número de cajas de muffins de frutos rojos y de chocolate: tres de cada.

$$4 + 4 + 4 + 3 + 3 + 3$$

Como el resultado sobrepasa el total de 20 muffins, excediéndose en un muffin, se cambia una caja de los de frutos rojos (de 4 muffins) por una de los de chocolate (de 3 muffins).

Finalmente se obtiene 4 cajas de muffins de frutos rojos y 2 de los de chocolate:

$4 + 4 + 3 + 3 + 3 + 3$*, teniendo un total de 20 patas.*

Solución aritmética

A emplea números naturales particulares a los cuales les aplica operaciones aritméticas.

El **alumno B** resolvió el problema de la siguiente manera:

Sea C el número de cajas de muffins de chocolate y F el número de cajas de muffins de frutos rojos. Como el total de cajas debe sumar 6, entonces,

$C + F = 6.$

Por otro lado, se debe tener un total de 20 muffins entre las cajas de ambos tipos, esto es, $3C + 4F = 20.$

De $C + F = 6$ *se obtiene que* $C = 6 - F$*; por tanto,* $3(6 - F) + 4F = 20,$

esto es $18 + F = 20$*, obteniéndose finalmente que* $F = 2.$

Si $F = 2$*, entonces* $C = 4.$

Se deben tener 2 cajas de muffins de frutos rojos y 4 cajas de muffins de chocolate para tener un total de 20 muffins.

Solución algebraica

B usa "letras" para representar las cantidades desconocidas y opera con ellas de acuerdo con ciertas reglas para obtener la solución.

El consenso en la consideración de una actividad como aritmética o algebraica no siempre es tan claro.

¿Sólo podemos considerar como solución aritmética aquella actividad matemática que involucra números particulares y operaciones aritméticas, como la realizada por el alumno A?

¿Sólo podemos considerar como solución algebraica aquella actividad matemática que involucra el uso de símbolos literales y operaciones con dichos símbolos, ecuaciones, como la realizada por el alumno B?

Una tercera solución

Supongamos que un **alumno C** resuelve el problema de la siguiente manera:

Teniendo en cuenta que el número de cajas es 6 y que cada caja de muffins de frutos rojos aporta 4 y cada caja de los de chocolate tiene 3 unidades, se puede construir una tabla con todos los casos posibles:

Número de cajas	1	2	3	4	5	6
De frutos rojos	4	8	12	16	20	24
De chocolate	3	6	9	12	15	18

Luego, tiene que haber 2 cajas de muffins de frutos rojos y 4 cajas de muffins de chocolate, ya que entonces hay 6 cajas en total ($2 + 4 = 6$) y el número total de muffins suma 20 ($8 + 12 = 20$).

Número de cajas	1	2	3	4	5	6
De frutos rojos	4	8	12	16	20	24
De chocolate	3	6	9	12	15	18

Una tercera solución… con rasgos proto-algebraicos

El problema así resuelto permite reconocer ciertos aspectos considerados propios del razonamiento algebraico:

Teniendo en cuenta que el número de cajas es 6 y que cada caja de muffins de frutos rojos aporta 4 y cada caja de los de chocolate tiene 3 unidades, se puede construir una tabla con todos los casos posibles:

Número de cajas	1	2	3	4	5	6
De frutos rojos	4	8	12	16	20	24
De chocolate	3	6	9	12	15	18

Luego, tiene que haber 2 cajas de muffins de frutos rojos y 4 cajas de muffins de chocolate, ya que entonces hay 6 cajas en total $(2+4=6)$ *y el número total de muffins suma 20* $(8+12=20)$.

Número de cajas	1	2	3	4	5	6
De frutos rojos	4	8	12	16	20	24
De chocolate	3	6	9	12	15	18

- ✓ **Determinación de reglas o técnicas generales.** Se construye una tabla con tantas columnas como número de cajas haya y se determina cuál de las combinaciones posibles determina el número de cajas justo con el número de muffins exacto.
- ✓ **Obtención de propiedades y proposiciones.** La tabla muestra el número de muffins que "aportan" uno, dos, tres, … cajas de cada sabor. Así, se deducen las propiedades: las seis cajas no podrían ser solo de frutos rojos o de chocolate; el número de muffins de frutos rojos es múltiplo de 4; el de chocolate es múltiplo de 3; si el número de muffins es impar, el número de cajas de los de chocolate tiene que ser impar….

Desde el EOS se entiende el **Razonamiento Algebraico Elemental (RAE)** como el sistema de prácticas operativas y discursivas puestas en juego en la resolución de tareas abordables desde la Educación Primaria en las que intervienen objetos y procesos algebraicos:

Desde el EOS se entiende el **Razonamiento Algebraico Elemental (RAE)** como el sistema de prácticas operativas y discursivas puestas en juego en la resolución de tareas abordables desde la Educación Primaria en las que intervienen objetos y procesos algebraicos:

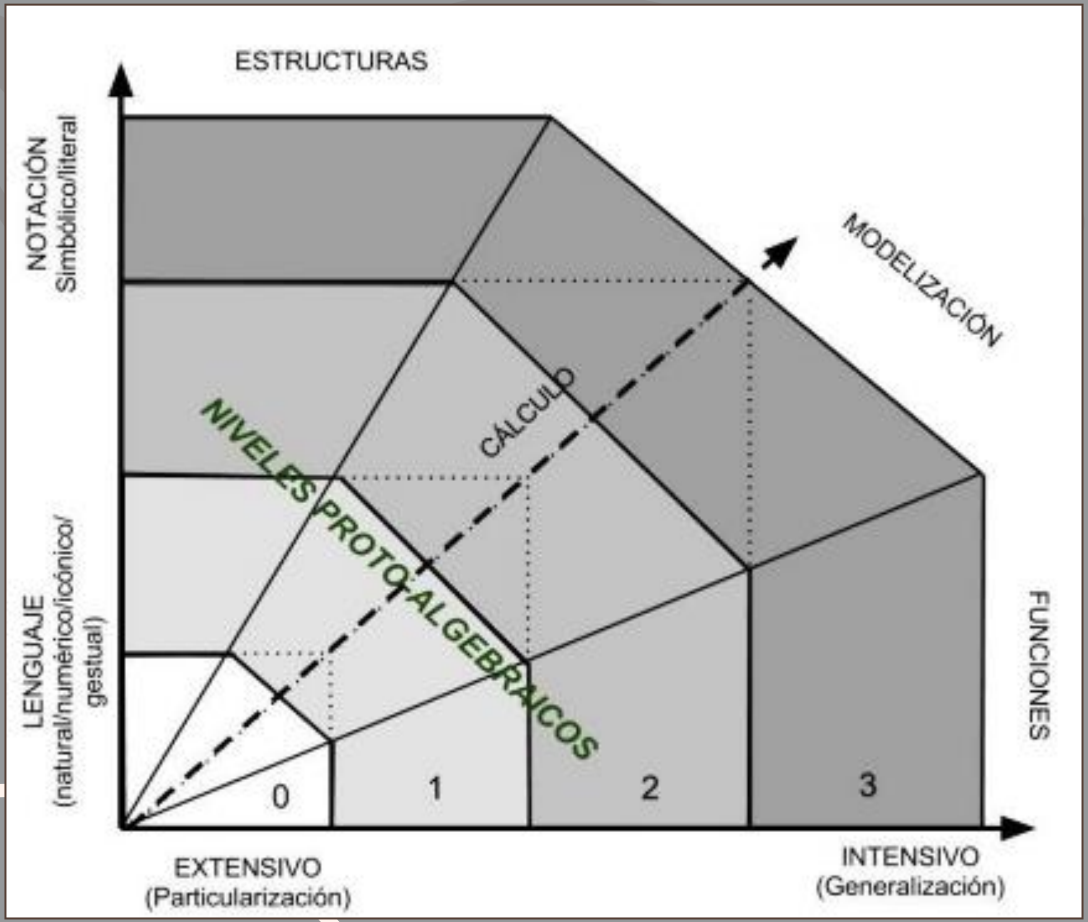
Objetos algebraicos en el EOS

- ***Relaciones binarias*** —de equivalencia o de orden— y sus respectivas propiedades (reflexiva, transitiva y simétrica o antisimétrica). Estas relaciones son **usadas para definir nuevos** conceptos matemáticos.
- ***Operaciones y sus propiedades,*** realizadas sobre los elementos de conjuntos de objetos diversos.
- ***Funciones,* operaciones y propiedades**. Se contemplan además las distintas representaciones de una función: analítica, tabular o gráfica.
- ***Estructuras, sus tipos y propiedades*** (semigrupo, grupo, módulo, anillo, cuerpo, espacio vectorial, etc.)

Desde el EOS se entiende el **Razonamiento Algebraico Elemental (RAE)** como el sistema de prácticas operativas y discursivas puestas en juego en la resolución de tareas abordables en la Educación Primaria en las cuales intervienen objetos y procesos algebraicos:

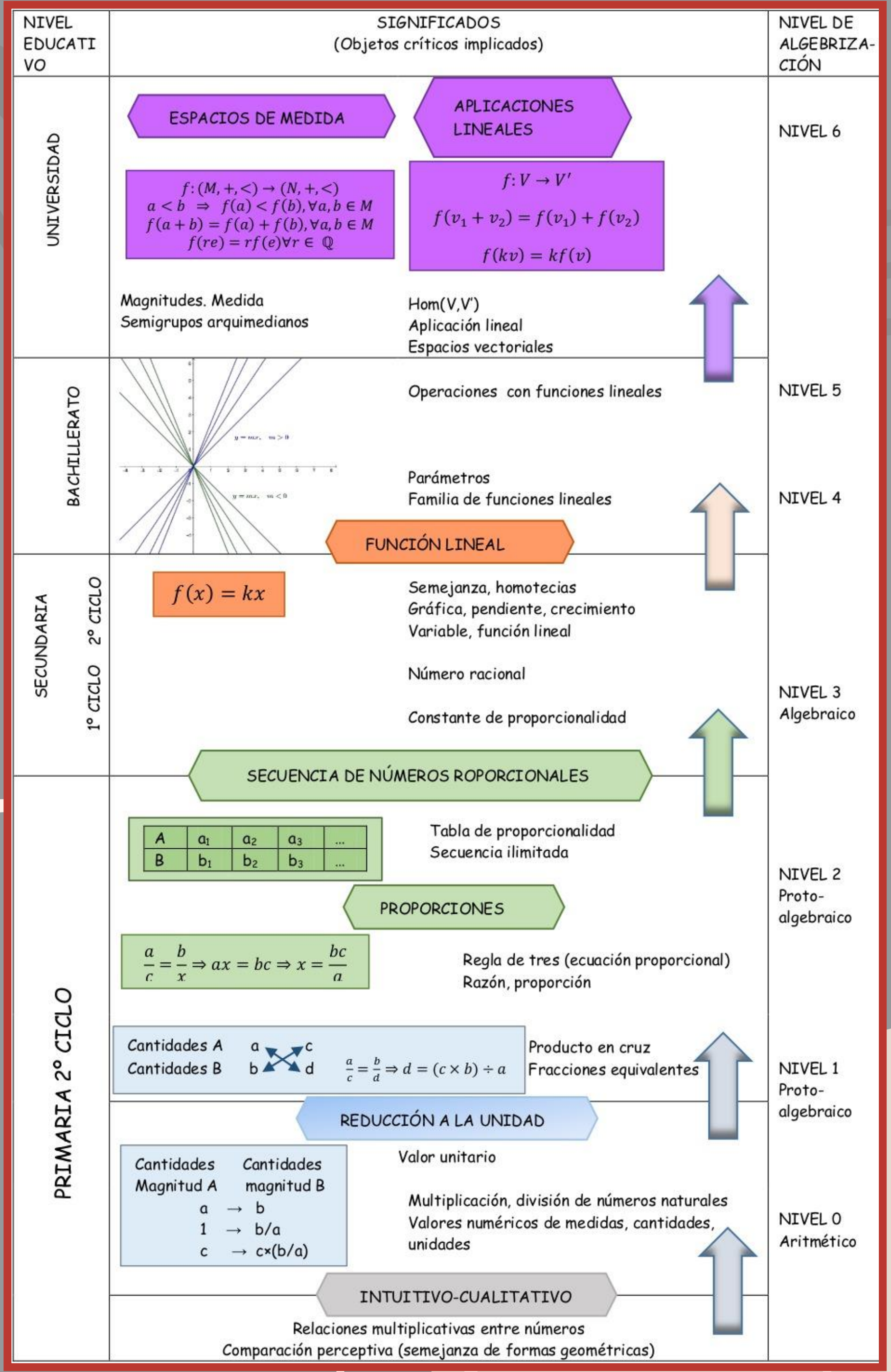
Procesos algebraicos en el EOS

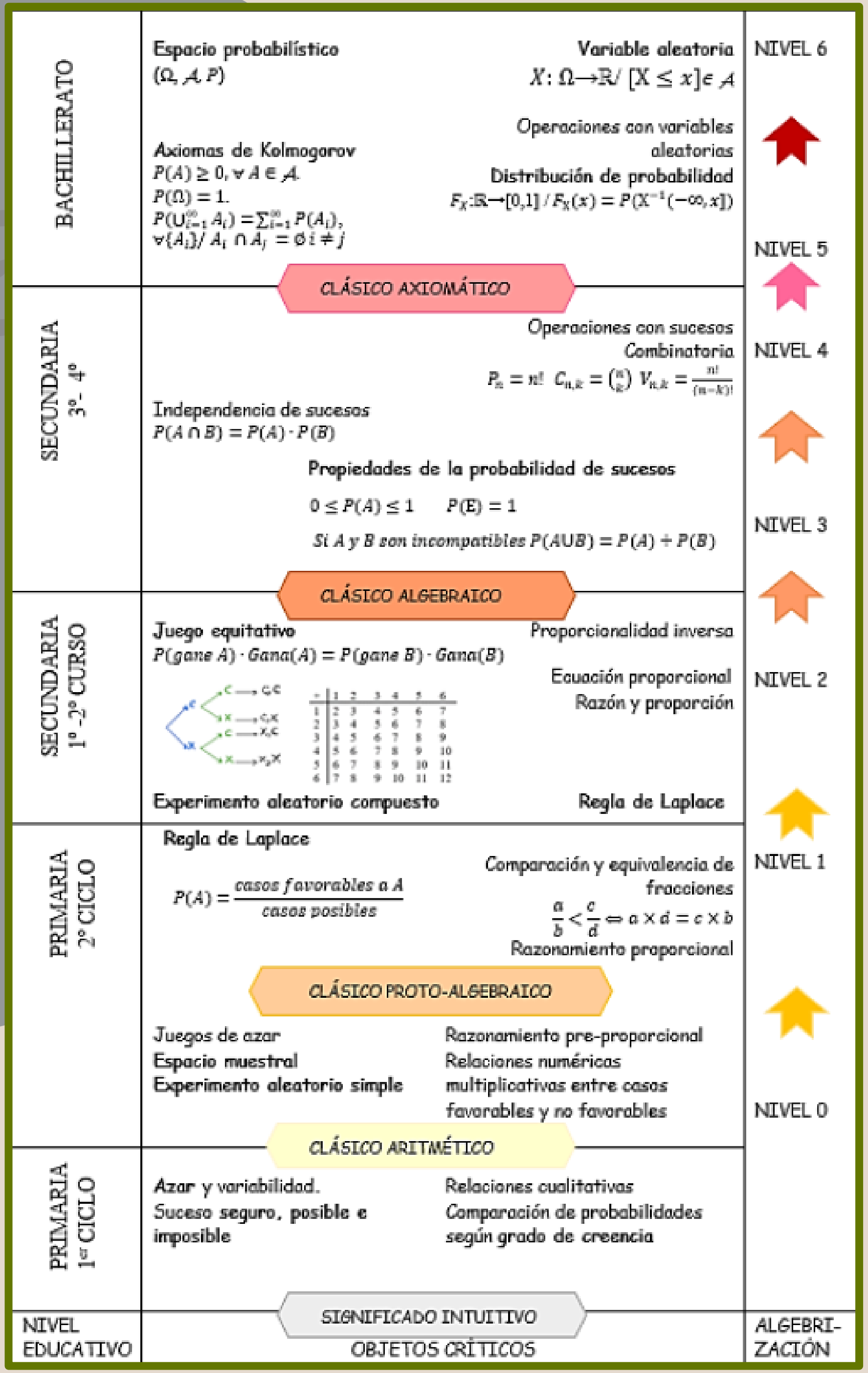
- ***Generalización***. Determinación o inferencia de la clase.
- ***Unitarización.*** Reconocimiento explícito de la regla que determina la clase.
- ***Materialización.*** Nombramiento (simbólico-literal) de la nueva entidad.
- ***Transformación.*** Utilización de los nuevos objetos en procesos de cálculo o nuevas generalizaciones.



Modelo de Razonamiento Algebraico Elemental (RAE)
Niveles de Algebrización

- 0 — Actividad netamente aritmética
- 1, 2 — Niveles proto-algebraicos
  Representaciones simbólicas referidas a intensivos reconocidos contextualizados
- 3 — Actividad algebraica: cálculo analítico con símbolos
- 4 — Primer encuentro con parámetros
- 5 — Tratamiento analítico con parámetros y variables
- 6 — Introducción de las primeras estructuras algebraicas





Los niveles RAE en la elaboración de modelos ontosemióticos de refencia

Burgos, M., & D. Godino, J.D. (2020). Modelo ontosemiótico de referencia de la proporcionalidad. Implicaciones para la planificación curricular en primaria y secundaria. *AIEM*, 18, 1–20.

Burgos, M., Batanero, C. & Godino, J.D. (2022). Algebraization Levels in the Study of Probability, *Mathematics* 10, nº1: 91

DESARROLLO DEL SENTIDO ALGEBRAICO EN ESCOLARES

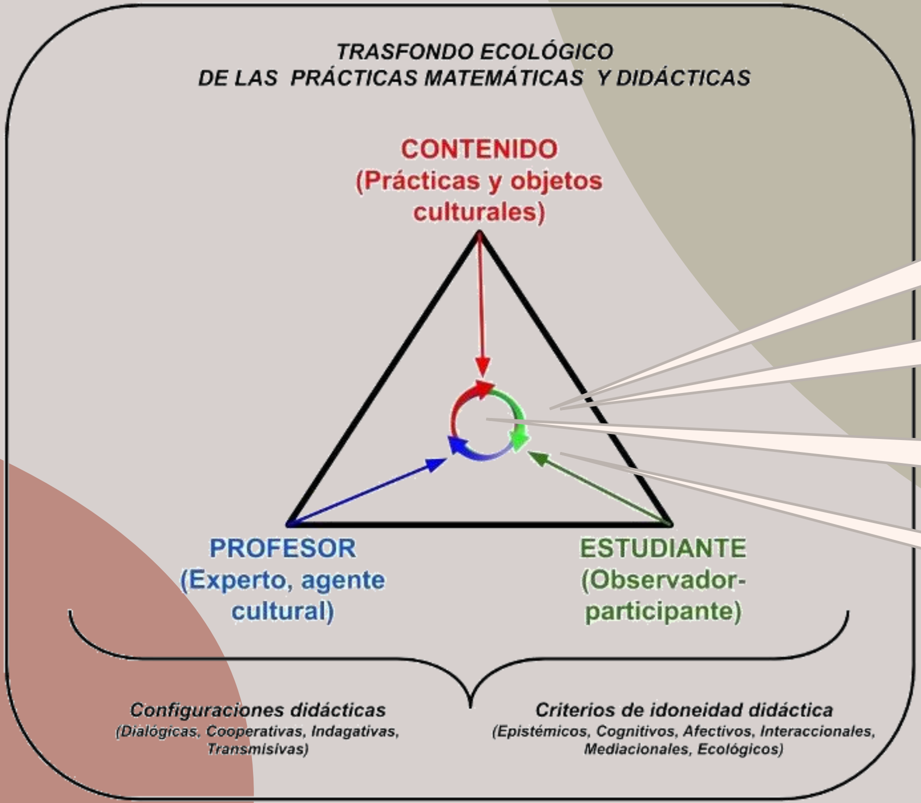
Sentido algebraico en el modelo RAE

- Usar de manera sistemática símbolos para expresar cantidades indeterminadas y generalizaciones.
- Reconocer y aplicar propiedades estructurales de los sistemas matemáticos (fundamentalmente, de los conjuntos de números, las operaciones definidas en éstos y sus relaciones).
- Identificar patrones, regularidades y funciones, modelizar situaciones intra- o extra-matemáticas.
- Operar de manera sintáctica (siguiendo reglas) con expresiones simbólico-literales para obtener una respuesta interpretable en la situación modelizada.

Sentido: conjunto de capacidades relacionadas con el dominio en contexto, el uso de manera functional de contenidos numéricos, geométricos, estocásticos, …algebraicos.

- ✓ Es posible desarrollar el sentido algebraico en los niños como resultado de la realización de actividades debidamente planificadas que, partiendo de tareas aritméticas o de otros bloques de contenido, tiendan hacia la generalización, la simbolización y el cálculo analítico.

- ✓ La identificación de los objetos, procesos y significados propios de los distintos niveles de RAE (análisis epistémico) puede permitir el diseño de prácticas operativas, discursivas y regulativas que faciliten el desarrollo del sentido algebraico.



Formular conjeturas (generalizar)

Validar conjeturas (argumentar)

Usar conceptos, propiedades y representaciones matemáticas

Atender a los procesos de significación

Ideas para desarrollar el sentido algebraico en escolares

Razonamiento algebraico presimbólico

ARITMÉTICA GENERALIZADA

EXPLORACIÓN DE LAS RELACIONES FUNCIONALES

INTERPRETACIÓN RELACIONAL DEL SIGNO IGUAL

Justificar las prácticas matemáticas

Pensar en la estructura y la relación que subyace entre situación, datos y requerimiento

Aproximación al estudio de la prueba matemática

Ideas para desarrollar el sentido algebraico en escolares

Razonamiento algebraico presimbólico

ARITMÉTICA GENERALIZADA

EXPLORACIÓN DE LAS RELACIONES FUNCIONALES

INTERPRETACIÓN RELACIONAL DEL SIGNO IGUAL

RAZONAMIENTO PROPORCIONAL

Justificar las prácticas matemáticas

Pensar en la estructura y la relación que subyace entre situación, datos y requerimiento

Aproximación al estudio de la prueba matemática

Ideas para desarrollar el sentido algebraico en escolares

ARITMÉTICA GENERALIZADA

Los números y las operaciones con números se emplean como contexto para desarrollar el razonamiento algebraico.

2■42 + 35●5	¿Qué cambia en estas dos sumas?
35●5 + 2■42	¿Cómo son los resultados? Explica tu respuesta.

- ✓ **Generalización** de relaciones aritméticas (obtención de reglas sobre clases de números, propiedades de las operaciones aritméticas y su conexión).
- ✓ **Unitarización,** consideración de las reglas aritméticas como objetos diferentes de los elementos (números, operaciones con números) que las constituyen.
- ✓ **Representación** de las entidades unitarias emergentes por medio de lenguajes con diferentes grados de formalización.
- ✓ **Transformación**, participación en nuevas prácticas . Desarrollo de nuevas generalizaciones o cálculos sintácticos.

Ideas para desarrollar el sentido algebraico en escolares

- ✓ Estudio de la equivalencia.
- ✓ Representación y razonamiento con expresiones, ecuaciones.
- ✓ Relaciones entre cantidades generalizadas.

INTERPRETACIÓN RELACIONAL DEL SIGNO IGUAL

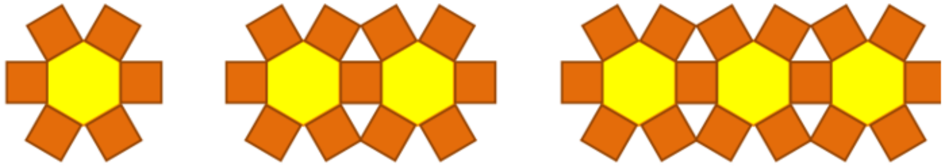
- ✓ Considerar expresiones aritméticas y ecuaciones en su totalidad y no como procedimientos.
- ✓ Usar las propiedades fundamentales de las operaciones para relacionar o transformar cantidades.
- ✓ Recomponer números y expresiones.

Escribe tres posibilidades diferentes para que se cumpla la igualdad:

398 + _____ = 405 + _____

Ideas para desarrollar el razonamiento algebraico en escolares

Julio hizo una cadena de margaritas con los bloques del patrón:



1 flor   2 flores   3 flores

a) ¿Qué observas en la estructura de la cadena de margaritas y en la forma en que crece cada vez que se añade una flor?

b) ¿Cuántos hexágonos y cuadrados necesitará Julio para hacer una cadena de margaritas con 7 flores? Explica /muestra cómo has obtenido tu respuesta.

c) ¿Cuántos hexágonos y cuadrados necesitará Julio para hacer una cadena de margaritas con 20 flores? Explica /muestra cómo has obtenido tu respuesta.

d) Para cualquier número de margaritas que te den, ¿cómo calculas el número total de bloques que necesitará Julio para su cadena? Explica/muestra cómo has obtenido tu respuesta.

e) Dibuja un gráfico de dispersión para las diez primeras cadenas de margaritas.

f) ¿Qué observas en el gráfico?

Reto: ¿Es posible hacer una cadena de margaritas que utilice exactamente 100 cuadrados? Explica/muestra cómo has obtenido tu respuesta.

EXPLORACIÓN DE LAS RELACIONES FUNCIONALES

Identificar patrones recursivos.
Razonamiento covariacional.
Relación de correspondencia.
Construir, interpretar y analizar gráficos de forma global.

- ✓ Generalizar las relaciones entre cantidades que covarían.
- ✓ Expresar estas relaciones a través del lenguaje natural, notación simbólica, tablas y gráficos.
- ✓ Emplearlas para interpretar y predecir el comportamiento de las funciones.

Formación de profesores

La relación entre el grado de conocimiento del profesor de matemáticas y el logro de aprendizaje de sus alumnos justifica el interés por determinar el tipo de conocimiento didáctico-matemático que deben tener los futuros profesores para enseñar el álgebra escolar.

Los profesores deben conocer y fomentar entornos de enseñanza en los que los estudiantes puedan explorar, modelar, hacer predicciones, discutir y probar ideas.

Su actuación en clase debe perseguir la comprensión de patrones, relaciones y funciones, el análisis de ecuaciones y estructuras matemáticas, incorporando progresivamente los símbolos algebraicos.

Algebra formal → Algebra temprana

Formación de profesores

Hohense (2017)

- Comprender la necesidad de trabajar con el álgebra temprana
- Desarrollar la capacidad de encontrar elementos algebraicos en las tareas matemáticas que utilizan

Ferreira, Ponte y Ribeiro (2022)

Algebra formal → Algebra temprana

Formación de profesores

Hohense (2017)

Razonamiento algebraico presimbólico
- Resolución informal de problemas con estrategias aritméticas

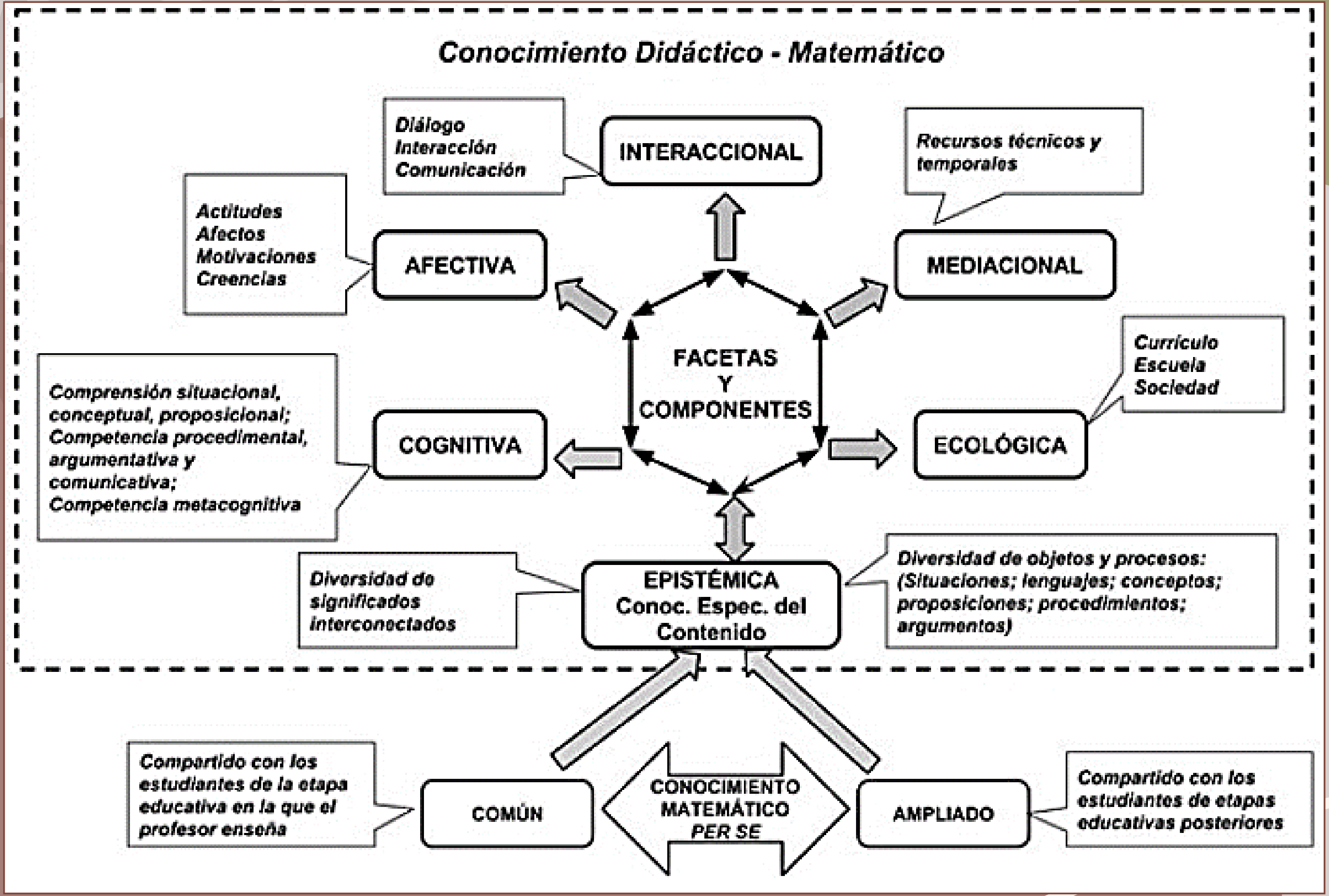
Aritmética Generalizada
- Generalización de operaciones aritméticas a contextos que después podrán representarse con expresiones algebraicas

Pensamiento funcional
- Exploración temprana del álgebra de funciones y relaciones funcionales (lineales) representadas tanto de manera verbal como con diagramas

Equivalencia
- Interpretación relacional del signo igual primero en enunciados aritméticos y después en la resolución de problemas verbales

Uso de diagramas en la resolución de problemas
- Representar variables e incógnitas por medio de diagramas informales.

EOS



Modelo CCDM de Conocimientos y Competencias Didáctico-Matemáticos del profesor

Acciones para desarrollar conocimientos y competencias sobre razonamiento algebraico en futuros profesores

- ✓ Resolución de tareas por varias formas.
- ✓ Identificación de prácticas, objetos y procesos. Reconocimiento de aquellos de naturaleza algebraica. (Análisis epistémico).
- ✓ Asignación de niveles de RAE (Análisis epistémico).
- ✓ Análisis del carácter algebraico (objetos, procesos y niveles de RAE) en las prácticas matemáticas desarrolladas por escolares. (Análisis cognitivo)
- ✓ Creación de problemas para desarrollar el razonamiento algebraico o modificar los niveles de razonamiento implicados.
- ✓ Análisis didáctico de recursos educativos con relación al razonamiento algebraico implicado.

Resolución de tareas por varias formas.

¿Seguro que es de 5º de primaria???

Identificaci
los de nat

Asigna

Creaci
algebr

Análisis d
RAE) en l

Análisis didá
razonamiento algebraico implicado.

Camino al colegio

Andrés va a un colegio que está a 480 m de su casa. En el camino se para a recoger a sus amigos Víctor y Elena. Primero se detiene a recoger a Víctor. Después, recorren 52 m. A continuación recogen a Elena. El camino que les queda hasta el colegio desde ese punto supera en 20 m al triple de la distancia ya recorrida.

¿Cuál es la distancia entre la casa de Víctor y el colegio?

Explicad vuestra respuesta.

Resolución de tareas por varias formas

Acciones para desarrollar conocimientos y competencias sobre razonamiento algebraico en futuros profesores

Consigna	Intencionalidad
Conocimiento matemático común/ampliado	
1. Resolver problemas propios de las matemáticas escolares del nivel educativo correspondiente.	Identificar conocimiento o carencias sobre un contenido concreto de las matemáticas escolares. Promover la argumentación y justificación matemáticas.
Conocimiento didáctico-matemático	
Resolver los problemas de varias maneras, considerando las estrategias que usarían los alumnos y posibles representaciones.	Promover la flexibilidad de resolución y la capacidad de adaptación al nivel educativo pertinente

Análisis didáctico de recursos educativos con relación al razonamiento algebraico implicado.

Identificación de prácticas, objetos y procesos. Reconocimiento de aquellos de naturaleza algebraica

Asignación de niveles de RAE

Análisis del carácter algebraico (objetos, procesos y niveles de RAE) en las prácticas matemáticas desarrolladas por escolares.

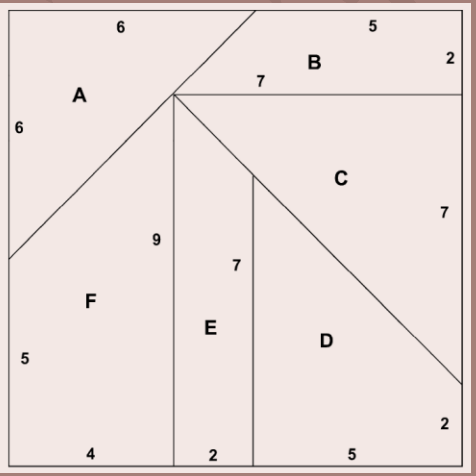
Acciones para desarrollar conocimientos y competencias sobre razonamiento algebraico en futuros profesores

Creación de pro
modificar los niv

Análisis didáctico de
algebraico implicado.

Consigna	Intencionalidad
Conocimiento didáctico-matemático	
2. Enumerar la secuencia de prácticas e identificar los objetos y procesos emergentes.	Desarrollar la competencia de análisis de significados y análisis ontosemiótico.
3. Asignar niveles de razonamiento algebraico a las distintas soluciones.	Profundizar en la faceta epistémica del CCDM analizando RAE.
4. Reflexionar sobre las dificultades que pueden observarse en la resolución del problema usando cada estrategia.	Desarrollo de la faceta cognitiva del CCDM.
5. Valoración de respuestas de alumnos: corrección, reconocimiento de objetos matemáticos y niveles de RAE. Toma de decisiones para afrontar dificultades de alumnos.	Profundizar en la dimensión cognitiva de las competencias análisis de significados y análisis ontosemiótico del CCDM. Fomentar la dimensión instruccional del CCDM.

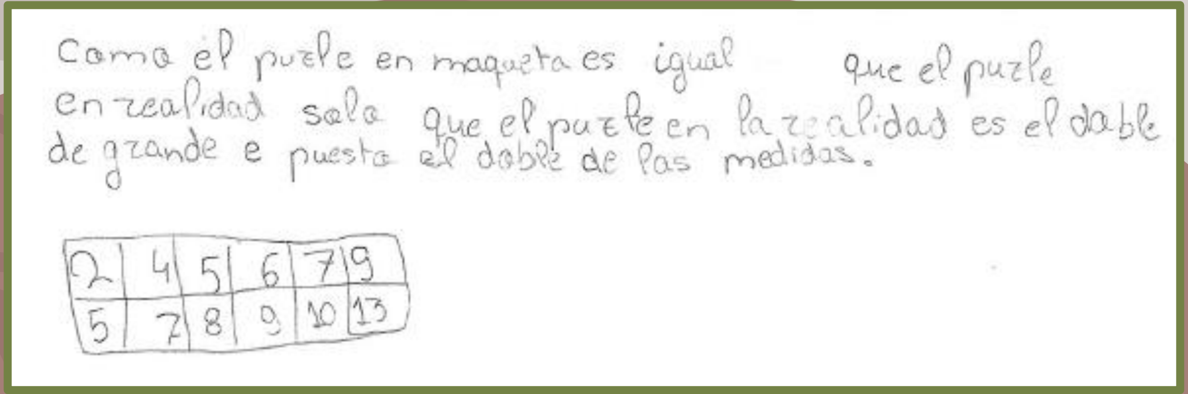
El puzle (Brousseau) En la figura adjunta se presentan las piezas de un puzle. Los números escritos junto a los lados de los polígonos corresponden a las medidas de dichos lados expresadas en centímetros. Construir en cartulina este puzle, pero de mayor tamaño, de tal manera que el lado de 4 cm tenga una longitud de 7 cm.



Objetos: Clases de números (racionales, clases de equivalencia de fracciones, expresión como decimal)
Símbolo literal para dar la regla general. Sin cálculo analítico
Transformaciones: Obtención de la escala (valor unitario), operaciones con números particulares
Lenguaje: natural, numérico, símbolos referidos a contexto sin operar con ellos

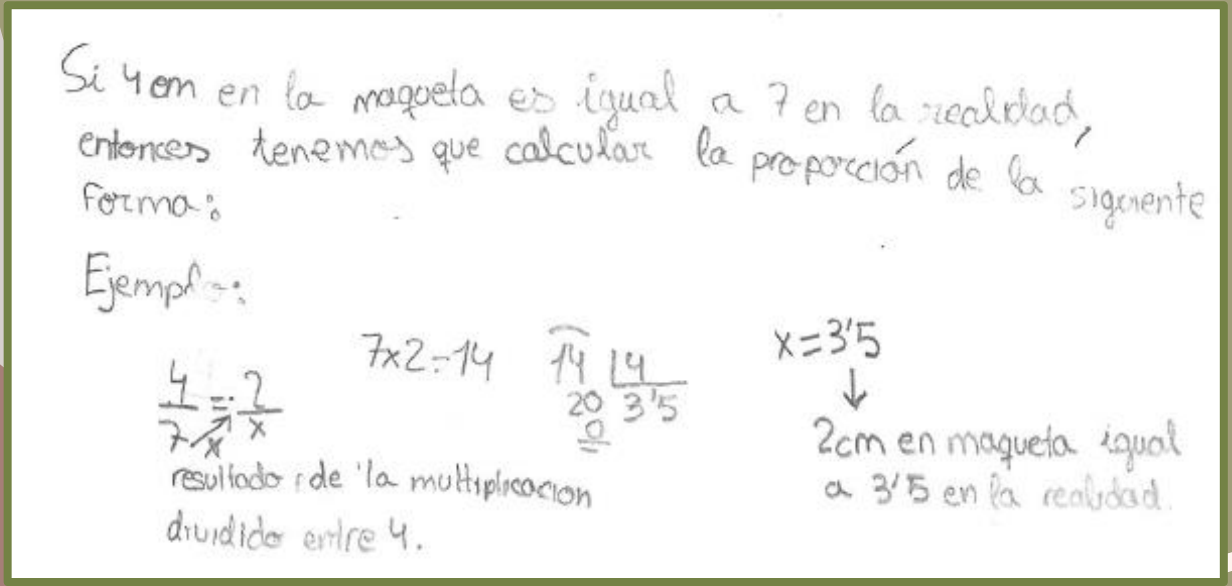
Secuencia de prácticas elementales para resolver la tarea	*Uso e intencionalidad de las prácticas*	*Objetos y procesos referidos en las prácticas*
1) La relación entre la distancia en la figura y la distancia en el puzle de cartulina es de proporcionalidad directa, puesto que se debe construir el mismo puzle, pero de mayor tamaño	Explicitar que se cumplen en el contexto del problema las condiciones de aplicación de la proporcionalidad directa	*Conceptos:* magnitud, longitud, proporcionalidad directa, escala. *Lenguaje:* natural. *Proposición* P1: la relación entre ambas magnitudes es de proporcionalidad directa. *Argumento*: se debe construir el mismo puzle, pero de mayor tamaño
2) Calculamos la longitud que corresponde en el puzle de cartulina a un centímetro de la figura: 7/4=1,75.	Reducción a la unidad	*Conceptos*: escala, unidad de medida (cm) *Lenguaje*: natural, numérico *Procedimiento:* división con decimales *Proposición:* la ampliación que corresponde a 1cm es 1,75 *Argumento*: la relación es de proporcionalidad directa
3) La longitud en el puzle de cartulina, que le corresponde a un segmento de longitud k en la figura será $1{,}75 \times k$.	Enunciar una regla que permite calcular la longitud que corresponde a un segmento de longitud k en la figura ampliada.	*Proposición* P2: Enunciado de la práctica 3) *Lenguaje: natural, numérico, simbólico* *Argumento:* Secuencia de prácticas 1) a 4), condiciones de proporcionalidad que definen una escala. *Generalización:* Obtención de la regla que permite determinar la longitud de todo segmento en la figura.

Nivel 1 de RAE



Como el puzle en maqueta es igual que el puzle en realidad solo que el puzle en la realidad es el doble de grande e puesto el doble de las medidas.

2	4	5	6	7	9
5	7	8	9	10	13



Si 4cm en la maqueta es igual a 7 en la realidad, entonces tenemos que calcular la proporción de la siguiente forma:

Ejemplo:

$\frac{4}{7} = \frac{2}{x}$ 　 $7 \times 2 = 14$ 　 $14 \,|\, 4$ → 20, $3'5$, 0 　 $x = 3'5$

↓

2cm en maqueta igual a 3'5 en la realidad.

resultado de la multiplicacion dividido entre 4.

Nivel 0 de RAE

Objetos: Números particulares, tabla como registro de resultados (no expresa generalidad)

Transformaciones: Operaciones con números particulares,

Lenguaje: natural, numérico, diagramático.

Nivel 1 de RAE

Objetos: Se reconoce la relación de proporcionalidad y se establecen las proporciones entre las medidas de la maqueta y la del puzle real.

Transformaciones: Operaciones con números particulares, aplicando propiedades de la estructura del conjunto de los números naturales (No opera con la incógnita)

Lenguaje: natural, numérico, diagramático.

Acciones para desarrollar conocimientos y competencias sobre razonamiento algebraico en futuros profesores

- Creación de problemas para desarrollar el razonamiento algebraico o modificar los niveles de razonamiento implicados

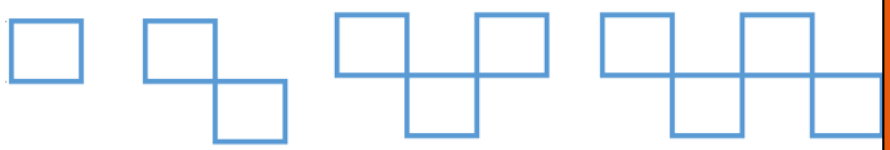
La creación de problemas:
- ✓ mejora el conocimiento del contenido matemático
- ✓ fortalece la articulación de conocimientos y competencias didáctico-matemáticas del profesor de matemáticas (análisis de la actividad matemática, detección de dificultades, reconocimiento del grado de formalización implicado...)
- ✓ capacita para la enseñanza de resolución de problemas.

Compara los resultados:

a) $250 + 345 + 150$ y $345 + 400$

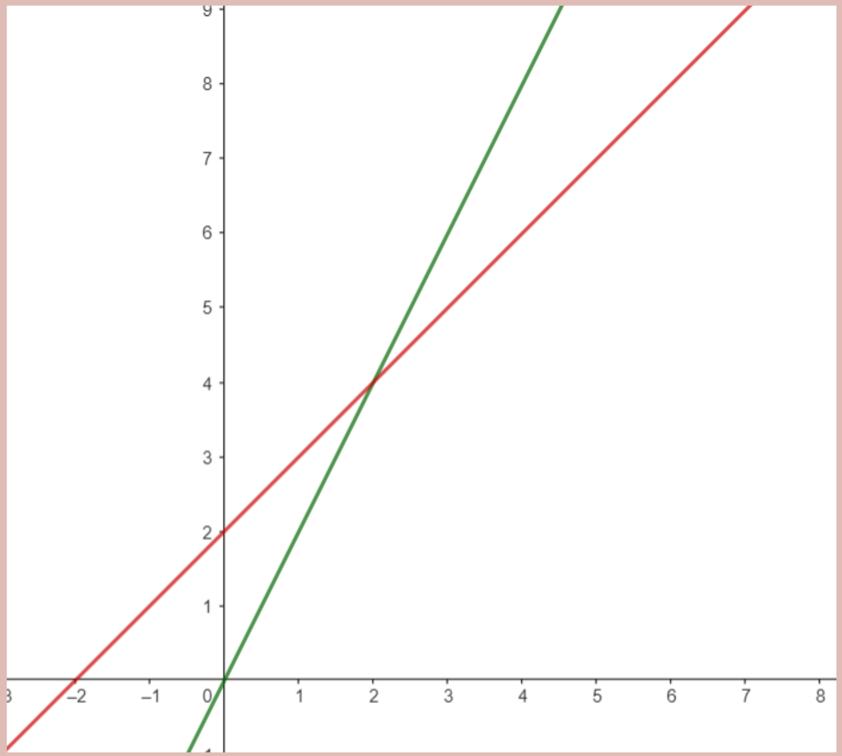
b) $(1525 \times 44) \div (22 \times 2)$ y $1000 + 425 + 100$

Considera la siguiente secuencia:



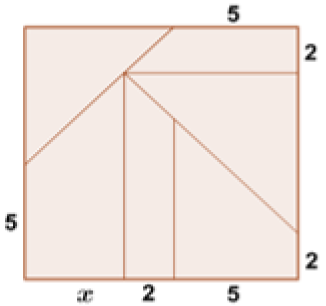
¿Cuántos vértices tendrá la figura que tenga 8 cuadrados?
¿Y aquella que tenga 20 cuadrados?

Crear problemas que fomenten el razonamiento algebraico a partir de situaciones dadas por variación o elaboración.



x	y
2	2
3	4
4	6
5	8
	14
10	18
12	22
15	28
20	
...	...

1. Aspectos del razonamiento algebraico que permite desarrollar.
2. Objetos y procesos algebraicos implicados y nivel RAE previsible.
3. Curso al que estarían destinados y potenciales dificultades.



Variante de la tarea:
Se quiere construir un puzle cuadrado igual al de la figura de perímetro 77 cm, de forma que al lado de x cm le corresponda uno de 7 cm. ¿Cuál es la escala?

Crear problemas por variación que impliquen potenciales cambios en el nivel de RAE implicado.

Solución: Dado que el puzle es cuadrado y el lado de la figura tiene de longitud $2 + 5 + x = 7 + x$ cm, sabemos que su perímetro será $4(7 + x) = 28 + 4x$ centímetros.

Al lado de x centímetros le corresponde uno de 7 cm. Dado que la relación es de proporcionalidad directa:

$$x \rightarrow 7$$
$$28 + 4x \rightarrow 77$$

En toda relación de proporcionalidad directa, las razones de las cantidades de magnitudes que se corresponden son iguales: $\frac{x}{7} = \frac{28+4x}{77}$

De aquí, $77x = 7(28 + 4x)$; $11x = 28 + 4x$;

$$7x = 28; \quad x = \frac{28}{7} = 4$$

Por tanto, la escala es 4:7.

Nivel 3 de RAE

Objetos: Intervienen incógnitas y ecuaciones de la forma $Ax \pm B = Cx \pm D$.
Transformaciones: Se opera con la incógnita para obtener formas canónicas de expresión de la ecuación ("llevar todo lo que acompaña a la incógnita al mismo lado de la igualdad, operar con los coeficientes de la incógnita")
Lenguaje: Simbólico se usan los símbolos de manera analítica, sin referir a información contextual.

Acciones para desarrollar conocimientos y competencias sobre razonamiento algebraico en futuros profesores.

Análisis didáctico de recursos educativos con relación al razonamiento algebraico implicado.

- ✓ Es necesario prestar atención a las tareas matemáticas propuestas en libros de texto para promover una enseñanza efectiva del álgebra temprana.
- ✓ Las tareas de los libros de texto pueden no estar dirigidas intencionalmente al desarrollo del pensamiento algebraico temprano.

El profesor debe:

- reconocer las características de las tareas relacionadas con el álgebra temprana en los libros de texto,
- identificar la actividad que deben desarrollar los alumnos en su solución,
- profundizar en los conocimientos que promueven,
- explotar las ideas aunque no parezcan algebraicas a simple vista.

Herramientas para guiar su análisis

- **Tipos de tareas y sus características según los enfoques del álgebra temprana**
  - Demostheneus y Stylianides (2014)
  - Pincheira y Alsina (2021)
    1. Tareas de relaciones aritméticas situadas
    2. Tareas de relaciones basadas en reglas
    3. Tareas de relaciones conocidas-desconocidas
- **Análisis de la actividad matemática que promueven según grados de RAE**
  - Aké y Godino (2018)
    1. Tipo de objetos algebraicos (carácter estructural, funcional)
    2. Tipos de representaciones involucradas o requeridas
    3. Cálculo analítico implicado
    4. Modelización

Síntesis

Desarrollar el razonamiento algebraico desde los primeros niveles es un reto, intensificado por la perspectiva competencial real del currículo.

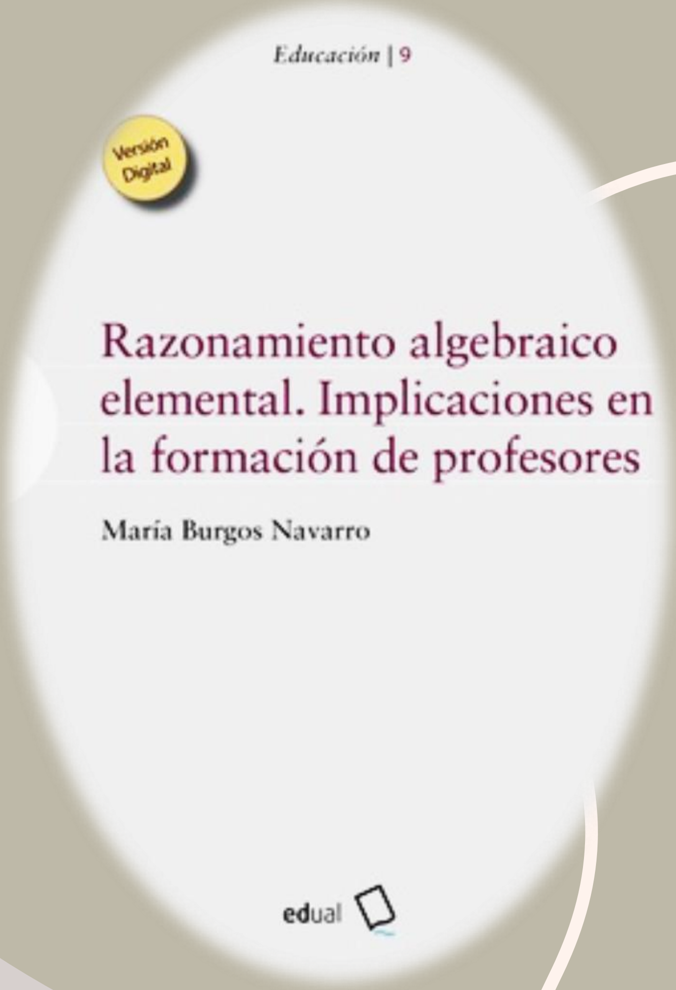
La generalización, el estudio de las relaciones funcionales y las estructuras aparecen como elementos conductores de la formación algebraica de los estudiantes.

Los profesores necesitan formación específica para conocer las características del álgebra temprana y diseñar propuestas de enseñanza que permitan desarrollar el sentido algebraico en sus alumnos.

Es un desafío que merece la pena afrontar.

¡Gracias!

María Burgos
mariaburgos@ugr.es



UNIVERSIDAD DE ALMERÍA edual editorial UNIVERSIDAD DE ALMERÍA

https://www.unebook.es/es/ebook/razonamiento-algebraico-elemental-implicaciones-en-la-formacion-de-profesores_E1000025017