

## PESQUISAS EM UM GRUPO DE ESTUDOS EM GEOMETRIA

### RESEARCHS IN A GROUP OF STUDIES ON GEOMETRY

José Carlos P. Leivas

Universidade Franciscana. (México)

leivasjc@ufn.edu.br; leivasjc@gmail.com

#### Resumo

Apresenta-se, neste artigo, considerações sobre um grupo de ensino e pesquisa em Geometria, consolidado junto a um Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciência e Matemática, que busca envolver imaginação, intuição e visualização. Tais grupos colaborativos são relevantes para disseminação de pesquisas que visam o ensino e a aprendizagem matemática. Escolheu-se para divulgar trabalhos resultantes de pesquisas que buscaram ilustrar como realizar a Transposição Didática, levando um saber sábio, aquele do matemático, a um saber ensinado, aquele do professor, segundo Chevallard. Assim, ilustrou-se indicativos de aplicações da Banda de Möebius, com criação de recursos materiais e aplicação no Ensino Básico brasileiro, bem como seu emprego em indústria moveleira. Uma segunda pesquisa ilustrada diz respeito a dobraduras para exploração de propriedades de polígonos e regiões poligonais, além de obtenção de cônicas pelo mesmo processo e uma transposição dessa abordagem para Geometria Dinâmica no Geogebra. Como terceira pesquisa relatada consta a adaptação em um jogo denominado Geometria em Ação, o qual explora gestos que podem proporcionar a descoberta de conceitos geométricos de diversos níveis, aliando, pois, um outro recurso, além da linguagem oral no ensino de Geometria. Resultados das pesquisas do grupo têm sido aplicados em diversas ocasiões e gerado produção científica amplamente divulgada na literatura.

**Palavras-chave:** geometria, topologia, möebius, imaginação, gestos

#### Abstract

This article presents considerations about a group of teaching and research in Geometry consolidated together in a Postgraduate Program in Science and Mathematics Teaching, which seeks to involve imagination, intuition and visualization. Such collaborative groups are relevant for the dissemination of research aimed at teaching and learning mathematics. It was chosen to publish works resulting from research that sought to illustrate how to carry out the Didactic Transposition, taking a wise knowledge, that of the mathematician, to a taught knowledge, that of the teacher, according to Chevallard. Thus, indications of applications of the Banda de Möebius were illustrated, with the creation of material resources and their application in Brazilian Basic Education as well as their use in the furniture industry. A second illustrated research is concerned with a paper folding to explore properties of polygons and polygonal regions, in addition to obtain conics by the same process and transposing this approach to Dynamic Geometry in Geogebra. As a third research reported, there is an adaptation in a game called Geometry and Action, which explores gestures that can provide the discovery of geometric concepts at different levels, thus combining another resource, in addition to oral language in the teaching of Geometry. Results of the group's researches have been applied on several occasions and generated scientific production widely disseminated in the literature.

**Keywords:** geometry; topology, möebius, imagination, gestures

## ■ Introdução

Grupos de estudos estão sendo alternativas teórico-metodológicas para o ensino, especialmente na Educação Matemática. Neste texto apresenta-se alguns resultados de pesquisas de um Grupo de Estudos e Pesquisas em Geometria, atuando junto a um Programa de Pós-Graduação em uma universidade privada no Sul do Brasil.

O grupo é constituído por alunos de graduação e pós-graduação, bem como professores em ação continuada no exercício profissional. A temática deste grupo está na busca de elementos didáticos/teóricos que possam contribuir para a melhoria do ensino de Geometria e, posteriormente, elaboração de recursos para o ensino. As reuniões são realizadas quintas-feiras durante uma tarde, quando são analisados artigos, distribuídos previamente para leitura; confeccionados materiais que possam contribuir na construção de um novo olhar para esta área do ensino em todos os níveis de escolaridade; elaboração de materiais de pesquisa; investigações em diversos ambientes educacionais, dentre outras ações.

Grupos de estudos e pesquisa estão sendo, atualmente, importantes para o desenvolvimento de pesquisas que podem contribuir para a melhoria do ensino e da aprendizagem em Matemática, em geral. Um desses grupos precursores no Brasil é o denominado GDS - Grupo de Sábado, ligado à Faculdade de Educação da Universidade Estadual de Campinas. Este grupo reúne-se semanalmente aos sábados pela manhã, quinzenalmente, com o objetivo de estudar, compartilhar, discutir, investigar e escrever sobre a prática pedagógica em Matemática nas escolas em um ambiente de trabalho colaborativo, conforme é explicitado no site do grupo (<https://www.cempem.fe.unicamp.br/gds/grupo-de-sabado>).

Em outra direção, encontra-se o Grupo de Estudos e Pesquisas em Educação Matemática, Diversidade e Diferença (GEduMaD), tendo este o objetivo um pouco diferenciado do anterior por realizar estudos e pesquisas envolvendo questões sociais, culturais, econômicas, políticas e filosóficas, que sejam atravessadas pelas Filosofias da Diferença ou, ainda, que estejam voltadas para a Formação de Professores ou o processo de ensino e de aprendizagem de grupos minoritários por suas diferenças étnicas, linguísticas, culturais, além do público alvo da Educação Especial. (<https://sites.google.com/view/grupogedumat-ufms/p%C3%A1gina-inicial>).

Uma terceira linha de estudos e pesquisas localizada é a que envolve um espaço de discussão sobre teorias da linha francesa da Educação Matemática com foco no estudo de: Teoria das Situações Didáticas, Teoria Antropológica do Didático, Teoria dos Campos Conceituais, Teoria de Registros de Representação Semiótica e Didática da Matemática. Este grupo é denominado Grupo de Estudos em Didática da Matemática – DDMat, criado mais recentemente em 2013. (<http://grupoddmат.pro.br/index.php/home/>).

Quando se faz uma busca com a palavra-chave “Grupo de Estudos e Pesquisas em Geometria”, praticamente não encontra-se nenhum específico. Por tal razão, justificou-se a criação do Grupo de Estudos em Pesquisa em Geometria- GEPGEO, em 2016, liderado pelo autor do presente artigo, o qual tem se dedicado há várias décadas ao tema Geometria; seu ensino e sua aprendizagem. Até o presente momento tem-se produzido artigos publicados em periódicos e anais de eventos, dissertação de mestrado e recentemente, duas teses de doutorado, todos esses trabalhos com temas envolvendo Geometria em suas diversas vertentes. Por entender-se da precariedade de resultados nessa área, decorrentes de grupos de estudos e pesquisas, justifica-se o presente trabalho no sentido de comunicar alguns desses, provenientes do referido grupo.

## ■ Marco referencial

Em função da área de atuação de seu líder, e autor deste trabalho, ou seja, intuição, imaginação, criatividade e visualização percorrem suas pesquisas e as do grupo, as quais têm sido divulgadas em artigos, conferências e minicursos, em congressos nacionais e internacionais. Essas habilidades são consideradas fundamentais para o

desenvolvimento de um pensamento geométrico. Hilbert e Cohn-Vossen(1932), em seu livro *Geometry and Imagination*, já indicavam tais habilidades para a aprendizagem geométrica:

[...] é nosso objetivo dar uma apresentação da Geometria tal como está hoje, em seus aspectos visual e intuitivo. Com a ajuda da imaginação visual, podemos iluminar a variedade de fatos e problemas da Geometria e, além disso, é possível, em muitos casos, retratar o esboço geométrico dos métodos de investigação e demonstração, sem necessariamente entrar em pormenores relacionados com a estrita definição de conceitos e com cálculos reais (Hilbert e Cohn-Vossen, 1932, p. iii).

Ao abordar sobre a criatividade matemática Ervynck (apud Tall, 2002) indica procedimentos a serem trabalhados para comporem tal habilidade, dos quais destaca-se: intuição da estrutura profunda do sujeito; imaginação e inspiração, os quais, de certa forma, nortearam este trabalho e o grupo de estudo aqui descrito. Para o autor, intuição indica a formação de imagens conceituais suficientemente próximas do conceito formal para permitir a concepção de conjecturas plausíveis. Ela permite que o matemático realize também uma seleção frutífera do que irá criar ou realizar.

No que diz respeito à criatividade, esse autor afirma que seu poder matemático resulta da interação de certos elementos como a compreensão, a qual tem a “capacidade de regenerar os passos da criatividade matemática do(s) autor(res) de um teorema, parte de uma teoria...” (Idem p. 67, tradução livre). A isso reporta-se à denominada ‘compreensão relacional’ apontada por Skemp (2016), a qual significa saber o que fazer e o porquê de se fazer. Dessa forma, a criatividade matemática traz consigo aprofundamento tanto da compreensão quanto do *insight* de determinados conceitos.

Para Fischbein (1987), intuição também tem o sentido de conhecimento intuitivo, sendo uma forma de cognição, a qual está relacionada às afirmações auto evidentes que vão além dos fatos observados e, portanto, está intimamente ligada à criatividade. Para o autor, o conhecimento intuitivo corresponde a uma certeza direta, sendo produzida, em primeira instância pela auto-evidência. Para ele, “Uma intuição é, então, uma ideia que possui as duas propriedades fundamentais de uma realidade concreta, dada objetivamente; imediatez, isto é, evidência intrínseca e certeza (não certeza formal convencional, mas praticamente significativa, certeza imanente)” (*Ibid*, p. 21).

Na medida em que o GEPGEO se dedica à elaboração e aplicação de atividades geométricas envolvendo habilidades criativas, imaginativas e visuais, encontra-se em Fischbein (1987) amparo para explorar intuição, uma vez que, para ele,

[...] intuição é gerada por experiências e conhecimentos aparentemente auto evidentes e inéditos tais como visualização e a história da matemática e das aquisições científicas têm sido influenciados pela tendência de produzir dispositivos mentais que lhe permitam acreditar na validade de suas concepções mesmo antes de serem demonstradas (conhecimentos auto evidentes, evidências ou intuição) é essencial para o raciocínio produtivo. (p. 21).

Como dito no início desta fundamentação, um pilar das pesquisas do grupo envolve habilidades visuais no desenvolvimento do pensamento geométrico. Essa habilidade já é discutida há longo tempo por renomados pesquisadores, sendo indicada como tema de pesquisa pelo *working group of PME*. Alsina, Aymemí e Gómez (2010) afirmam que “desenvolver o pensamento visual e favorecer as habilidades de visualização são dois objetivos chaves na educação geométrica”. (p. 40). Também, indicam que “[...] visualizar significa produzir imagens que ilustrem ou representem determinados conceitos, propriedades ou situações e é a capacidade de realizar certas leituras visuais a partir de determinadas representações”. A isso, Leivas (2009) acrescenta “é um processo de formar imagens mentais, com a finalidade de construir e comunicar determinado conceito matemático, com vistas a auxiliar na resolução de problemas analíticos ou geométricos” (Leivas, 2009, p. 22).

Outro aspecto relevante que o GEPGEO aborda diz respeito à elaboração e disseminação de recursos didáticos que possam auxiliar no desenvolvimento do pensamento geométrico nos diversos níveis de ensino. A esse respeito, reporta-se a Chevallard ao caracterizar “la transformación de un contenido del saber preciso en una versión didáctica de ese objeto de saber puede denominar-se más apropiadamente transposición didáctica stricto sensu” (Chevallard, 1991, p. 46). Isso levou o grupo a investigar criações didáticas sobre temas variados em Geometria, de difícil compreensão para os estudantes até mesmo do ensino superior, bem como opções de recursos para o professor realizar seu ensino.

A partir desses pressupostos teóricos, na sequência apresenta-se algumas reflexões sobre atividades realizadas pelo grupo.

### ■ Reflexões e implicações

Topologia geométrica é um desses temas de difícil compreensão para os estudantes em formação, os quais não conseguem fazer a Transposição Didática para a escola básica. Piaget e Inhelder (2003) já apontavam que tal geometria é mais natural para a criança do que a euclidiana, uma vez que, ao contrário da última, na topológica suas propriedades independem do conceito de distância. Além desse fato, ela é tida como área dura com aplicações na própria Matemática e poucas práticas, as quais se voltam para a Educação Matemática e, mais especificamente, para a escola básica.

O grupo se propôs a estudar alternativas metodológicas e aplicações dessa área da Geometria. Em artigo publicado em 2019, foram feitas algumas abordagens diversas da Banda de Möebius a partir de busca na literatura. Essa superfície, por exemplo, é empregada na questão do ‘jogo de palavras’, ou seja, aproximação entre literatura e hipertexto nas obras de Ítalo Calvino, segundo Moreira e Fux (2010). Em sua obra, Calvino mostra a relação entre os personagens e a estrutura geral do livro, como se fora um algoritmo em que “o *looping* contínuo, caracterizado pela mistura das funções de autor e de leitor, pela ‘passagem contínua de dentro para fora’ é perfeitamente ilustrada com a superfície topológica Faixa de Möebius” (Moreira e Fux, 2010. p. 64). Em suas obras, uma história encontra-se dentro de outra, em processo contínuo e infinito, dentro do mesmo lado da faixa, isto é, apresentam as características de unilateralidade e continuidade, típicas da Faixa de Möebius, ao que Pierre Levy denominou de ‘efeito Möebius’, segundo o autor. Dito de outra forma, é a passagem contínua do interior ao exterior sem atravessar fronteiras.

O exemplo de aplicabilidade na literatura encontra guarida nos Parâmetros Curriculares Nacionais (Brasil, 1998) ao recomendar que o ensino de Matemática deve proporcionar explorações em que a aprendizagem conduza o aluno a resolver problemas de localização e deslocamento no espaço, com o reconhecimento de conceitos como direção e sentido. Aqui se dá uma visão ampla destes dois, aplicados em uma situação em nada convencional no âmbito matemático – a literatura.

Outras aplicações da Faixa de Möebius foram exploradas e publicadas com seu uso na indústria moveleira, como o estofado para sala de estar (Figura 1). Nele, o indivíduo pode ser visualizado a partir de qualquer posição no ambiente.

**Figura 1.** *Ninho Möebius*



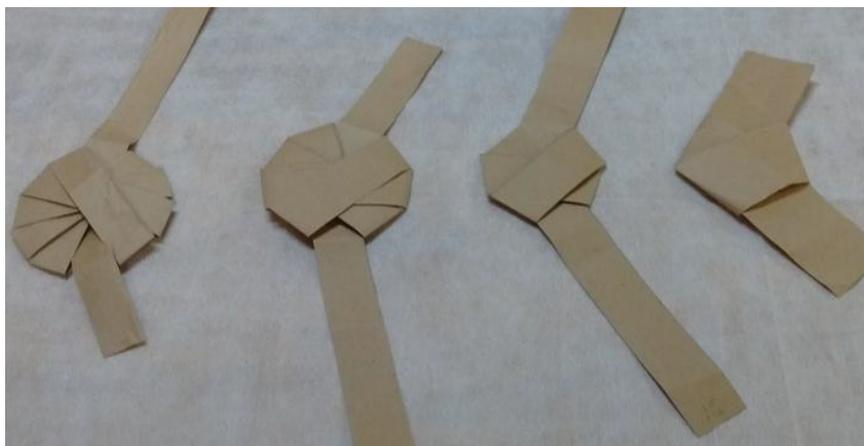
Fonte: [http://www.saccaro.com.br/site20122/upload/produtos/8035\\_g.jpg](http://www.saccaro.com.br/site20122/upload/produtos/8035_g.jpg)

Esse exemplo, além de estimular os indivíduos na criação de objetos com formato geométrico, propicia investigações sobre a forma como se encontra o desenvolvimento do pensamento visual, um dos objetivos da educação geométrica indicado por Alsina, Aymemí e Gómes (s.d).

Nos anos de 2017 e 2018, o grupo dedicou-se à exploração de recursos didáticos para o ensino de geometria plana e, para tal, investigou os vários tipos de papéis que possibilitavam o uso de dobraduras para explorar o ensino de polígonos e regiões poligonais, tendo algumas publicações naquele ano e no seguinte. Analisou-se diversas técnicas, as quais proporcionaram investigações no próprio grupo, em escolas da Educação Básica e do Ensino Superior. Foram aplicadas oficinas a respeito em eventos da área de Educação Matemática que contribuíram com o grupo na certeza da descoberta do caminho intuitivo para explorações visuais.

Divulgou-se uma pesquisa envolvendo o papel pardo na construção desses ‘polígonos ou regiões poligonais’ com uma ou duas faixas (Figura 2).

**Figura 2.** *Dobraduras com papel pardo*



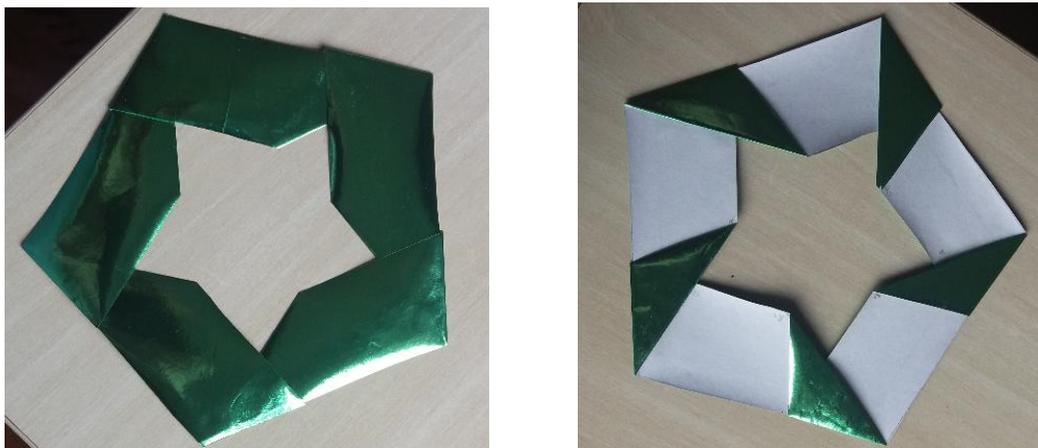
Fonte: dados da pesquisa

A partir desse material, as investigações realizadas exploraram a intuição (Fischbein 1987) na medida em que proporcionavam descobertas e redescobertas sobre propriedades dos polígonos, quanto a lados, ângulos internos etc. Tais investigações comprovaram a importância da compreensão relacional apontada por Skemp (2016), em vez da instrumental, mais frequentemente empregada no âmbito educacional em que o tema é explorado por meio da utilização de fórmulas sem razão de seus porquês, sendo meramente operacionais.

As investigações com esse tipo de papel produziram bons frutos e buscou-se, também, outros materiais para serem explorados com a mesma técnica de dobraduras. Isso conduziu a realizar a Transposição Didática, indicada por Chevallard (1991), a qual leva conteúdo de um saber preciso em uma versão didática do objeto polígonos, de modo a que professores e futuros professores atuantes no grupo de estudos e pesquisas possam efetivar sua aplicabilidade no ensino.

Uma das pesquisas com este material produziu artigo científico e apresentação em evento, oriundo de dobraduras com papel laminado colorido (Figura 3)

*Figura 3. Dobraduras com papel laminado frente e verso*



Fonte: dados da pesquisa

Em um evento nacional foi ofertado um minicurso com o objetivo de explorar a construção do pentágono por meio de dobradura no papel laminado, com o uso de transferidor, da régua, do esquadro e do compasso. As pesquisas realizadas pelo grupo mostraram que este tipo de papel se adequa melhor do que o pardo. Também mostraram quais as dimensões das tiras foram as mais apropriadas para uma melhor visualização do objeto, o que depende do número de lados do polígono a ser construído.

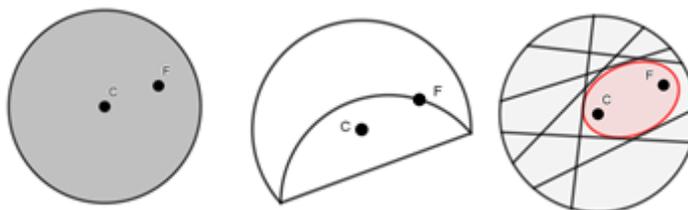
Além da construção e das relações propriamente ditas, foi envolvida a questão de inscrição do pentágono em uma circunferência de modo que se tornou necessário o reconhecimento de mediatrizes, bissetrizes, ângulo central e ângulo inscrito, além de relações trigonométricas envolvidas. A partir disso, os pressupostos da Transposição Didática de Chevallard (1991) propiciaram oportunidades de replicar em sala de aula da Educação Básica, uma vez que os participantes eram todos professores.

Em relação aos recursos didáticos ou manipuláveis, eles se constituíram em meios que devem ser utilizados no ambiente escolar a fim de proporcionar um ensino eficiente de Geometria para uma aprendizagem condizente. Esses constituem-se em apoio ao que deve ser ensinado e para a criação didática (Chevallard, 1991).

Os resultados do minicurso mostraram que é possível explorar intuição, no sentido apontado por Fischbein, de que ela “[...] é gerada por experiências aparentemente auto evidentes e inéditos tais como visualização [...]” (Fischbein, 1987, p. 21). Na medida em que foi solicitada a verificação de que o polígono construído é regular, isso remeteu ao que Alsina, Fortuny e Pérez (1997) tratam sobre a demonstração em aulas de Matemática para diferentes níveis, na resolução de um problema matemático e, para o caso, de Geometria.

Ainda a respeito de pesquisas de materiais didáticos para a exploração de dobraduras, reforça-se, pois, o dito por Lorenzato (2006, p. 18) que: “é qualquer instrumento útil ao processo de ensino-aprendizagem”. Nesse sentido, o grupo fez uso do papel vegetal ou manteiga para obtenção de cônicas, tendo apresentado resultados em evento e publicações em revista. A partir de dobras específicas no papel, visualmente ilustrando parábolas, hipérbolas e elipses, o desafio foi elaborar uma sequência conectada a tal construção a ser feita em software de Geometria Dinâmica, neste caso, no Geogebra. A Figura 4 ilustra a construção da elipse explorando as dobras no papel.

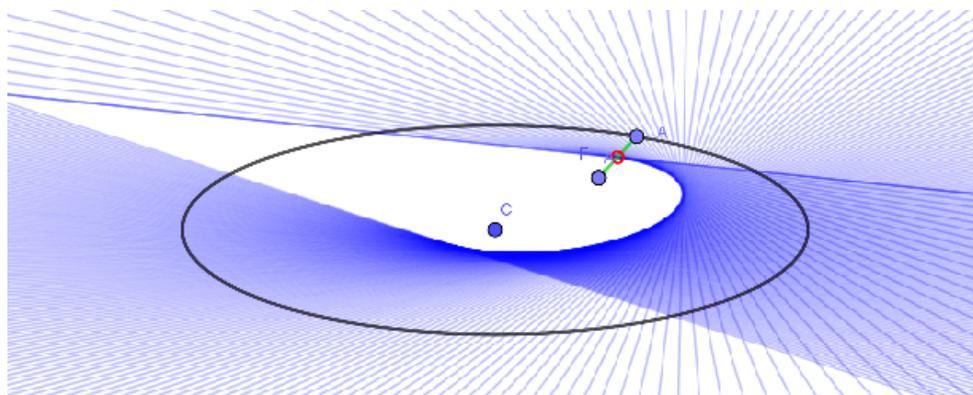
Figura 4. Obtenção da elipse por dobraduras e n Geogebra



Fonte: arquivo do pesquisador

Constrói-se uma circunferência de centro  $C$  e escolhe-se um ponto distinto de  $C$ , denominando-o de  $F$ . Marca-se um ponto qualquer  $P_1$  sobre a circunferência e rebate-se esse de modo a coincidir com  $C$ . Isso gera uma linha de dobra que, bem demarcada, produz a mediatriz do segmento  $CP_1$ . Ao fazer isso para muitos pontos  $P_i$ , as linhas de dobra irão demarcando um lugar geométrico. Reproduz-se tal sequência no *software*, explora-se o recurso ‘habilitar rastro’ para a reta que representa a linha de dobra e, em seguida, o recurso ‘animar’. O lugar geométrico vai sendo visualizado na tela do computador (Figura 5)

Figura 5. Construção da elipse no software.



Fonte: arquivo do pesquisador.

A atividade desenvolvida pelo grupo estabelece conexões entre dois recursos para realizar a Transposição Didática (visualização por dobraduras e por geometria dinâmica) levando o saber sábio do matemático (cônicas) ao saber ensinado (uso da dobradura e do software) gerando formas produtivas de construção de pensamento visual geométrico de um tema que, em geral, é abordado na formação inicial do professor por meio de fórmulas e regras (compreensão instrumental de Skemp). Com isso, acredita-se estar indo ao encontro do preconizado por Hilbert e Cohn-Vossen (1932, iii) a respeito de que a imaginação visual ajuda a “[...] iluminar a variedade de fatos e

problemas da Geometria [...]”. Além disso, reitera o dito por Ervynck (apud Tall, 2002) sobre a criatividade matemática indicar procedimentos que desenvolvam a intuição das estruturas envolvidas.

Ao abordar o envolvimento da criatividade no ensino e na aprendizagem matemática, Sánchez Segura (2012) posiciona-se quanto ao seu uso na disciplina ao afirmar:

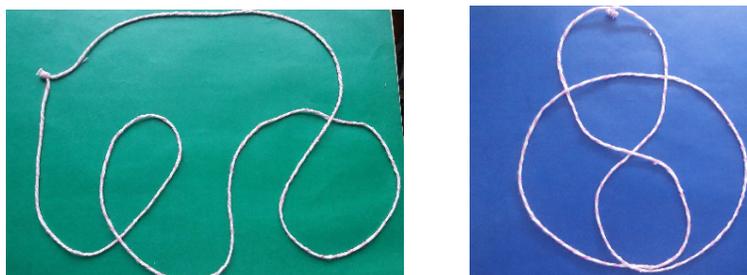
Pode-se dizer que uma educação é criativa quando o professor que a realiza encoraja e energiza a classe para que todos investiguem e redescubram seus próprios conhecimentos, induz ações participativas dos estudantes, são eles que constroem seus conhecimentos a partir do conhecimento (p. 70).

A compreensão instrumental, indicada por Skemp (2016), aquela que usa fórmulas prontas sem os porquês, vai ao encontro do que Carvajal (1997) aborda sobre a mecanização excessiva nesse uso. Para esse autor, é necessário, também exercitar a imaginação, estimular a atividade mental, reafirmando o que Leivas (2009) caracteriza como visualização.

Partindo desses pressupostos, o grupo de estudos e pesquisas encontrou em Conway *et al* (2010), uma possibilidade de realizar uma Transposição Didática de um tema bastante complexo em Geometria que é a Topologia com os Espaços de Recobrimento e Grupo Fundamental. Esses autores exploraram a Teoria dos Nós associando aos ‘laços’ obtidos por correias de bicicleta, colares e outros objetos que se ‘enredam’ quando soltos aleatoriamente. Assim, o grupo se debruçou em realizar atividades correlatas para solucionar alguns dos problemas criativos propostos por Conway *et al* (2010) com o uso de cordões. Isso possibilitou intersecções, por exemplo, com o ensino de Cálculo ao envolver as homotetias por caminhos, no estudo de funções reais contínuas. A proposta dos autores foi considerar um cabo de extensão e conectar uma extremidade a outra, produzindo um laço. Isso levará o indivíduo a imaginar a possibilidade de desatá-lo ou não, sem desconectar ou romper o cabo.

Foram feitos experimentos com cordão de aproximadamente 1m de comprimento, solto aleatoriamente sobre uma mesa, sobrepondo-se. Buscou-se reorganizá-lo de modo que fosse feito o menor número possível de movimentos para eliminar os cruzamentos ocorridos (os nós na Figura 6).

Figura 6. Cordão solto se auto cruzando



Fonte: acervo do grupo.

A partir dos aspectos experimentais, intuitivos e visuais ilustrando laços (nós e caminhos), no que segue, formaliza-se o conceito. Munkres (1975, p. 326) define: “Seja  $X$  um espaço e  $x_0$  um ponto de  $X$ . Um caminho em  $x_0$  que começa e termina em  $x_0$  é denominado um laço com base em  $x_0$ ”.

Um segundo experimento intuitivo sobre o mesmo tema foi feito com o uso de corrente fina (colar para colocar ao redor do pescoço) e solto livremente em uma caixa. Verifica-se que ele fica todo enrolado com nós. Dispõe-se sobre

a mesa e busca-se desenrolar sem levantar, ou seja, perder o contato com ela. Na teoria isso representaria uma curva auto interseccionando-se (nos nós).

Na continuação das pesquisas e estudos do grupo, chegou-se aos ‘gestos’, tema que contribui para o desenvolvimento de pensamento visual, segundo alguns resultados preliminares dessa pesquisa em andamento desde o ano de 2019, tendo, inclusive, já originado publicação de resultados obtidos.

Sobre esse tema, McNeill (1992, p. 105) afirma: “[...] Em outras palavras, o gesto é capaz de expressar toda a gama de significados que surgem de quem o transmite. Dessa forma, o grupo de estudos e pesquisas fez uma adaptação do jogo ‘Imagem e Ação’ para ‘Geometria em Ação’, na busca de resgatar conceitos geométricos em vários níveis de escolaridade, bem como produzir novos conceitos para os estudantes.

Confeccionou-se um tabuleiro (Figura 7); cartas (Figura 8) e um dicionário (Figura 9). Em primeira instância o mesmo foi bem explorado no próprio grupo e, posteriormente, foi aplicado em três vertentes: Ensino Médio, Licenciatura em Matemática e uma oficina em um evento acadêmico a fim de testar sua validade. De cada um deles foram coletados dados para aperfeiçoamento, produção técnica e divulgação.

Figura 7. *Abuleiro*

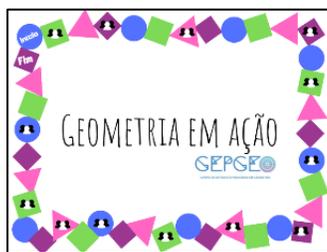
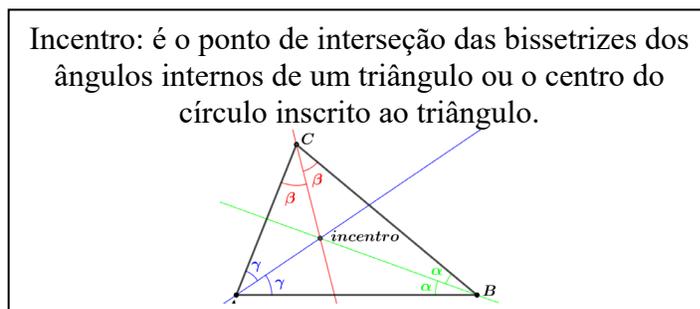


Figura 8. *Carta*



Fonte: dados do grupo

Figura 9. *Dicionário*



Fonte: dados do grupo

O jogo consiste de regras bem definidas, a ser disputado entre dois ou mais grupos de participantes, sendo que um elemento de um dos grupos retira uma carta com um conceito sem que os demais membros saibam qual é. Esse indivíduo deve gesticular para o grupo citá-lo verbalmente. Caso o participante que retirar a carta não souber o conceito, pode pedir ajuda a um de dois dicionários, sendo um apenas com conceitos e o outro com conceitos e

imagens. Se escolher o primeiro, perde um ponto e caso peça o segundo, dois. Ganha o jogo aquele que primeiro chegar ao final da trilha no tabuleiro.

Resultados de uma das aplicações, com participantes de uma jornada acadêmica envolvendo estudantes de vários semestres de um Curso de Formação de Professores de Matemática, mostraram que a aplicação resgatou conceitos geométricos que eles não lembravam e, até mesmo, desconheciam. Nem sempre o conceito era formalizado corretamente pelo grupo, mesmo após a discussão entre os pares. Por outro lado, os gestos produzidos mostram, em grande parte, que os estudantes são capazes de se comunicarem por outros caminhos, não somente o da escrita e das palavras verbais.

Gestos têm sido investigados em várias áreas e situações de ensino, por exemplo, Roth (2001) indica que eles são fundamentais para o conhecimento humano. Afirma serem necessárias pesquisas que se concentrem no seu papel no conhecimento e na aprendizagem, cuja análise conduza à articulação em questões cruciais relevantes para a pesquisa educacional em termos de conhecimento, aprendizagem e ensino.

Sobre a aplicação com estudantes do Ensino Médio, os resultados ainda se encontram em análise, de forma similar ao aplicado em uma turma específica de um Curso de Formação de Professores de Matemática.

No momento, o grupo está debruçado adaptando uma versão *online* do jogo “Geometria em Ação”, já sendo testado internamente no grupo que, em função do isolamento social, está se reunindo *online*. Uma aplicação com um grupo limitado de oito estudantes do Ensino Médio, selecionados espontaneamente, mostrou que tal versão pode ser aplicada a outros grupos maiores e heterogêneos, pois apresenta as condições propícias para tal. Nessa versão o jogo funciona em duas salas abertas em uma plataforma digital, sendo que em uma delas há um árbitro ou controlador que faz o sorteio das cartas e a escolha ou não do participante pelo dicionário. Na outra sala se concentram os outros grupos sem que visualizem o que ocorre na primeira. Após o tempo destinado a imaginar o gesto a ser feito por cada um dos dois, esses se dirigem à segunda sala onde há um árbitro para controlar o tempo e o gesto realizado, todos eles, relembrando, envolvendo conceitos geométricos. Os participantes do grupo devem registrar no chat o significado daquele gesto e, o primeiro que o fizer corretamente, pontua para seu grupo. Por meio de um dado eletrônico obtém o número de avanços a serem feitos no tabuleiro, que é acompanhado visualmente por todos. A Figura 10 ilustra o sorteador eletrônico e uma carta a ser sorteada, a qual remete ao sim, se desejar consultar o dicionário e ao não, em caso contrário, o que retorna ao sorteador novamente para a continuidade do jogo.

Figura 10. *Sorteador eletrônico*



Fonte: autoria própria

A partir dessa estruturação novas aplicações serão feitas e analisadas, inclusive pesquisando o nível de habilidade visual dos participantes.

## ■ Conclusões

Este artigo é resultado de uma ampliação de uma comunicação científica apresentada ao RELME 34 e teve por objetivo divulgar alguns estudos e pesquisas que estão sendo desenvolvidas em um grupo de Geometria, liderado pelo autor do artigo, que atua em um programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática na região Sul do Brasil.

Os participantes são estudantes da Licenciatura em Matemática, professores em ação continuada, estudantes de Mestrado e Doutorado e interessados pela área de Geometria. A abordagem envolvendo a Transposição Didática de Chevallard é um dos rumos que o grupo procura seguir uma vez que, em geral, na formação inicial do professor de Matemática conteúdos como a Topologia, as Geometrias Não-Euclidianas, por exemplo, são estudadas de forma muito teórica. Com isso, o grupo tem se ancorado, também, na Teoria de Skemp, a qual aborda um tipo de compreensão denominada relacional, buscando compreender os porquês dos fatos estudados ou ensinados e não em uma compreensão instrumental que se limita a empregar fórmulas prontas e utilizar, basicamente, a memorização.

Nessa direção, apresentou-se aqui duas pequenas aplicações da Topologia, usando a Banda de Möebius em atividades exploratórias práticas no Ensino Fundamental do Brasil e outra com seu emprego na confecção de móveis exóticos, não triviais, por uma indústria na região de abrangência do grupo.

Ilustrou-se também, sem possibilidade de aprofundamento pela limitação de espaço, o emprego de determinados materiais para o uso de dobras no papel para obtenção de elementos da Geometria Plana e de cônicas, na Geometria Analítica, com posterior conexão com exploração em software de Geometria Dinâmica.

Por fim, ilustrou-se a criação de um jogo para exploração dos gestos no ensino e na aprendizagem de geometrias, tanto em forma presencial, com recursos materiais concretos elaborados pelo grupo, quanto sua adaptação ao jogo online, com outras formas metodológicas envolvidas.

Dessa forma, espera-se que o relato aqui descrito possa permitir novos diálogos e contribuições para o engrandecimento da Geometria como área de atuação, especialmente, na Educação Matemática.

## ■ Referências bibliográficas

- Alsina, C., Aymemi F., Gomez, R.F. (1997) *?Por que geometria? Propuestas didacticas para la ESO*. Sintesis S. A. Madrid, Espana; Unknown Edition, January 1.
- Brasil. (1998). *Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática/ Secretaria de Educação Fundamental*. – Brasília: MEC/SEF. 148p.
- Carvajal, J. (1997). La creatividad en el dibujo geométrico. In: *Geometria Creativa*. Colección Master: Monografía de Creatividad Aplicada. Santiago.
- Chevallard, Y. (1991). *La transposición didáctica: del saber sabio al saber ensinado*. Trad. Claudia Gilman. Argentina: Aique Grupo Editor S.A.
- Conway, J., Doyle, P., Gilman, J., Thurston, Bill. (2010). *Geometry and the Imagination*. Derived from works Copyright (C) 1991 Version 0.941.
- Ervynck, G. (2002). Mathematical Creativity. In: Tall, D. (editor) *Advanced Mathematical Thinking*. New York: Kluwer Academic Publishers, pp. 66-68.
- Mneill, D. (1992). *Hand and Mind: What Gestures Reveal about Thought*. Chicago. The University of Chicago Press.
- Fischbein, E. (1987). *Intuition in science and mathematics: an educational approach*. Dordrecht: Reidel.
- Hilbert, D. e Cohn-Vossen, S. (1932). *Geometry and the imagination*. New York: Chelsea Publishing Company, 1932.

- Leivas, J. C. P. (2009). *Imaginação, intuição e visualização: a riqueza de Possibilidades da abordagem geométrica no currículo de cursos de licenciatura de matemática*. Tese (Doutorado em Educação). Universidade Federal do Paraná. Curitiba, Brasil, 294p.
- Lorenzato, S. (org.). (2006). *O laboratório de ensino de matemática na formação de professores*. Campinas, SP: Autores Associados, pp. 3-38.
- Moreira, M.E.R. e Fux, J. (2010). *Letras de Hoje*. Porto Alegre, v. 45, n. 2, p. 62-70, abr./jun.
- Munkres, J. R. (1975). *Topology: a first course*. New Jersey: Prentice-Hall, Inc.
- Sánchez Segura, M. D.(2012). La influencia de la creatividad en la enseñanza aprendizaje de las matemáticas en educación infantil - *REICE. Revista Iberoamericana sobre Calidad, Eficacia y Cambio en Educación*, vol. 10, núm. 2, 2012, pp. 68-85. Madrid, España, pp. 1-19
- Skemp, R. R. (2016). *Compreensão relacional e compreensão instrumental*. Educação e Matemática. Lisboa, n. 136, pp. 44-48.
- Piaget, J. &Inhelder, B. (2003). Trad. Octavio Mendes Cajada. *A psicologia da criança*. Rio de Janeiro: Difel, 144p.
- Roth, W.M. (2001). Gestures: their role in teaching and learning. *Review of Review of Educational Research, Fall, Vol. 71, No. 3, pp. 365–392*
- Scholz, O. y Montiel, G. (2017). Problematización de la trigonometría en la génesis histórica de la trigonometría. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 30*, pp. 1018-1026.