

# ANÁLISIS DEL ESTUDIO DE FUNCIONES ALGEBRAICAS POR MEDIO DE LA MODELACIÓN MATEMÁTICA EN NIVEL MEDIO SUPERIOR DEL IPN

## ANALYZING THE STUDY OF ALGEBRAIC FUNCTIONS THROUGH MATHEMATICAL MODELING AT HIGH SCHOOL LEVEL OF THE NPI

Guillermina Ávila García, Liliana Suárez Téllez, Víctor Hugo Luna Acevedo  
Instituto Politécnico Nacional, Centro de Estudios Científicos y Tecnológicos No. 11, Dirección de Formación e Innovación Educativa, Escuela Nacional de Ciencias Biológicas. (México)  
gavilag@ipn.mx, lsuarez@ipn.mx, vhluna@ipn.mx

### Resumen

Esta investigación presenta un avance del reporte parcial del proyecto de investigación SIP 20201239, que considera como marco teórico a la Modelación Graficación, mediante el análisis de funciones por medio del uso de gráficas con el tema de funciones algebraicas, dentro de la unidad de aprendizaje de Cálculo Diferencial, con estudiantes de nivel medio superior (cuyas edades son de 16 a 18 años). La metodología consistió en análisis de situaciones de movimiento para interpretar el cambio y las variaciones, desde una visión experimental de la graficación con el uso de tecnología como la herramienta Tracker en su versión gratuita, descargable en línea. Los datos se recolectaron a partir del trabajo de un grupo de treinta y cinco estudiantes que utilizaron el Tracker. Los resultados muestran que cuando los estudiantes se involucran en la modelación, logran una comprensión más asequible con respecto al tema de funciones.

**Palabras clave:** análisis de funciones, graficación, modelación, tecnología

### Abstract

This research presents a preview of the SIP 20201239 research project provisional report, which takes into account mathematical modeling as the theoretical framework, by analyzing functions through the use of graphics in the topic of algebraic functions included in the differential calculus learning unit; with high school students aged 16 to 18. The methodology entails making the analysis of movement situations to interpret change and variations, from an experimental view of graphing with the use of technology such as the Tracker tool in its free version, downloadable online. The data were collected from the work of a group of thirty-five students who used the Tracker tool. The results show that when students engage in modeling, they achieve a more accessible understanding regarding the topic of functions.

**Key words:** function analysis, graphing, modeling, technology

## ■ Introducción

De acuerdo con Suárez (2014), “la modelación se ha estudiado en relación con la variedad de representaciones *más accesibles* que se puede proporcionar de un fenómeno es importante ... ir más allá” (p.47), concibiendo la modelación como una herramienta que transforma el fenómeno estudiado, más aún “cuando se incorpora el uso de la tecnología para la graficación se genera un *espacio gráfico* que ha sido estudiado” (p.47). En concordancia con la autora, en este reporte de investigación se ilustra una representación de fenómeno físico, que a su vez puede ser modelado por medio de modelo verbal, algebraico y gráfico, éste último analizado a través de herramienta tecnológica para el estudio de funciones.

Diversos autores (Irazoqui, 2015; Nolan y Herbert, 2015) argumentan que un concepto básico y fundamental que debería haberse aprendido en la etapa de secundaria es el concepto de “función”, lamentablemente el desconocimiento de dicho concepto y su alcance más inmediatos representa una seria dificultad para el aprendizaje del Cálculo, no olvidando que, en buena medida, la matemática no es más que el estudio de las funciones, junto a las relaciones que se pueden establecer con ella.

En México, el caso del Centro de Estudios Científicos y Tecnológicos No. 11 (CECyT 11) del Instituto Politécnico Nacional (IPN), una de las competencias particulares que deben desarrollar los estudiantes en la materia de Cálculo Diferencial es la resolución de problemas de funciones, en el campo de los números reales, que involucren los conceptos de límite y continuidad en situaciones relacionadas con su entorno académico.

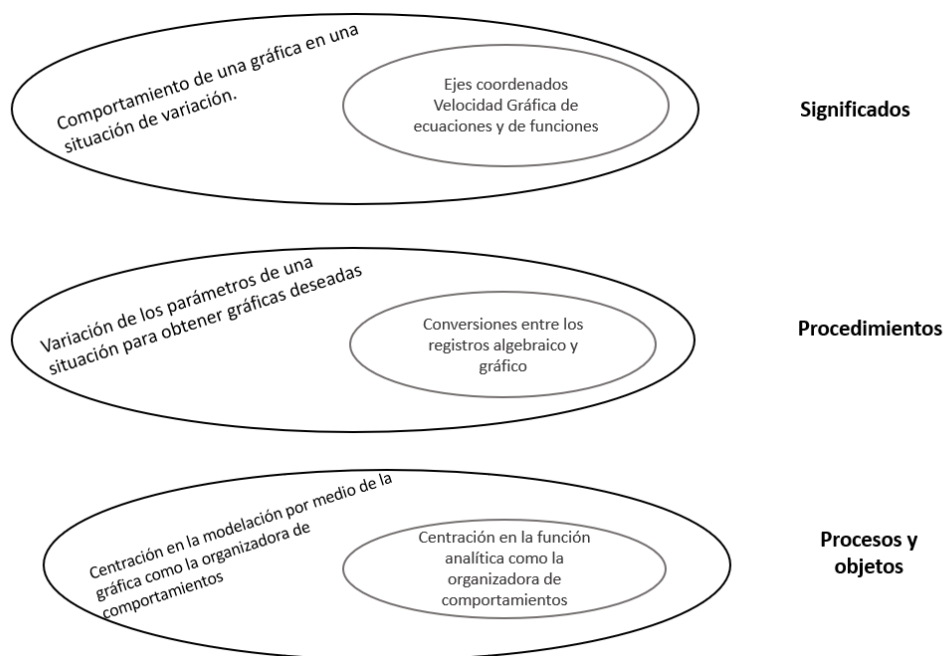
En esa vertiente es que se lleva a cabo la propuesta de integrar herramientas tecnológicas para el análisis de gráficas en el estudio de funciones a través de experimentos que involucran movimiento, surgiendo interrogantes sobre la importancia y aportaciones al aprendizaje del estudiante a través de la modelación matemática con el estudio de funciones, integrando la herramienta Tracker.

## ■ Marco teórico

Esta investigación explora la situación de movimiento con gráficas, a partir de ello se distinguen las líneas de razonamiento que coadyuvan al estudiante a un aprendizaje significativo referente al estudio de las funciones, diferenciando también los tipos de funciones. Suárez (2014), enfatiza en la modelación de una situación de cambio y variación por medio de una gráfica, proporciona un eje que hace que surja una argumentación gráfica a partir de la necesidad misma de la modelación y para ello plantea los elementos de resignificación de la modelación-graficación (figura 1).

La forma de graficar ecuaciones o funciones y el cálculo de las velocidades se organizan en nuevos significados que surgen del comportamiento que debe seguir la curva cuando está relacionada con una situación de cambio y variación (conceptos previos al concepto e interpretación de la derivada). Asimismo, Suárez (2014) menciona que “las relaciones desplazan centración en la función analítica para darle un estatus a la *situación de cambio y variación* que rige las características de las gráficas” (p. 28-29), a lo que llama una “resignificación de la variación y tiene como eje a la modelación-graficación.” (p. 29).

**Figura 1. Elementos de resignificación de la modelación-graficación**



Tomado de Suárez (2014, p.28).

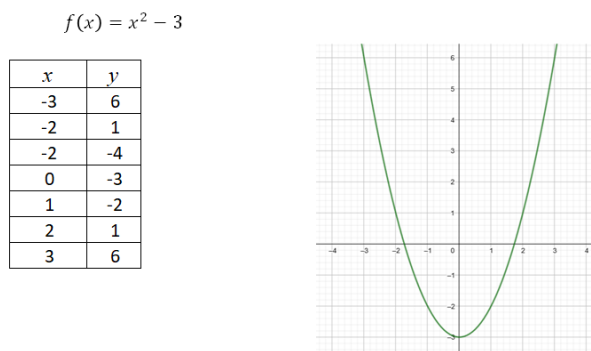
Por otro lado, Trigueros (2009) señala que, en el proceso de modelación en el aula, no se piensa en construir la matemática para luego establecer un proceso de modelación, sino se construye un conocimiento matemático a partir de la interacción y reflexión del contexto-estudiante; es decir, el docente ofrece al estudiante la posibilidad de tomar decisiones que le permitan construir significados de la situación que se estudia.

Molina-Toro, Villa-Ochoa y Suárez (2018) enfatizan, que la modelación vista desde la experimentación, graficación y el uso de tecnología pueden considerarse como medio para la producción de conocimiento, manifestando que la tecnología no es concebida como una herramienta de apoyo para la actividad de experimentación, más allá de ello, la tecnología se considera como un aspecto constitutivo; es decir, una experimentación sin tecnología no tiene sentido. Por ello, la propuesta va enfocada al análisis de las gráficas generadas a partir de la experimentación y que son interpretadas con Tracker.

Por otro lado, Torres (2004), menciona que los elementos que sirven de base para la caracterización de usos de gráficas en bachillerato son considerados no sólo en su relación con el concepto de función, sino además con los significados, procedimientos y argumentos que intervienen en las acciones que desarrolla un estudiante ante una actividad de graficación.

El primer uso de las gráficas se refiere a su construcción utilizando una relación de correspondencia entre dos variables, es decir, localizar parejas de puntos ordenados a partir de la relación algebraica, este procedimiento se encuentra con frecuencia en libros de texto del Nivel Medio Superior (figura 2).

**Figura 2.** *Uso de las gráficas a partir de su expresión algebraica.*



Tomado de Suárez (2014, p. 43).

Y finalmente, la descripción del uso de las gráficas en bachillerato (tomado de Torres, 2004), que es un referente en esta investigación, para el análisis de los trabajos expuestos por los estudiantes.

**Tabla 1.** *Descripción del uso de las gráficas en bachillerato.*

| Construcción de representaciones   | Gráficas utilizando la relación de correspondencia                          | Operaciones gráficas   | Gráficas a partir de la simulación de un fenómeno físico con tecnología   |
|------------------------------------|---|--|---|
| Significados y sistemas simbólicos | Establecer ejes de coordenadas.<br>Determinar puntos en el eje cartesiano   | Transformación de funciones<br>Comportamiento de una función<br>Función derivada y primitiva | Comportamiento de las gráficas de la posición y de la velocidad en relación con la simulación (función primitiva y su derivada)   |
| Procedimientos                     | Operaciones fundamentales   | Variación de la variable y de sus coeficientes   | Determinar la escala para el tiempo y la posición.<br>Identificar el tipo de movimiento<br>Relacionar las gráficas con la situación   |
| Procesos y objetos                 | Variables<br>Función  | Forma de la gráfica  | Forma de la gráfica para identificar patrones de comportamiento relacionando las gráficas de la posición y de la velocidad.   |
| Argumentos                         | Relaciones de la función con la gráfica a partir de su expresión algebraica | Comportamiento tendencial de la función  | A mayor velocidad mayor valor absoluto de la pendiente en la gráfica de posición.<br>A mayor pendiente en la gráfica de posición, mayor distancia con respecto al eje en la gráfica de velocidad. |

Tomado de Torres, A. (En Suárez, 2014, p.45).

El análisis de funciones a partir de graficas generadas de un fenómeno fisico en donde interviene el movimiento se considera para este reporte de investigación.

## ■ Método

El estudio se llevó a cabo con 35 estudiantes que cursaron la unidad de aprendizaje de Cálculo Diferencial en el segundo año de bachillerato en México (16 a 18 años). Las actividades de conexión entre los fenómenos relacionados con el movimiento y las funciones fueron modeladas en la experiencia propia de los estudiantes al interactuar en equipos de trabajo dentro de la institución educativa.

El diseño de una situación de modelación del movimiento para el estudio de las funciones algebraicas consideró tres momentos que establece Suarez (2014):

Momento 1: Establecimiento de la forma del funcionamiento de las gráficas en el estudio de las funciones.

En este caso el movimiento de una persona que camina de modo “rápido”, “lento”, “se detiene” y se mantiene “constante”.

Este primer momento se llevó a cabo mediante el planteamiento del problema de “Valentina” el cual enuncia lo siguiente:

*“Valentina llegó temprano a su clase de música. Apunto estaba de sentarse cuando advirtió que había olvidado su cuaderno en su refugio predilecto: la siempre cómoda y acogedora biblioteca.*

*No podía perderse el comienzo de la clase, así que fue a la biblioteca, cogió su cuaderno y regresó a su asiento, a tiempo para comenzar su, probablemente disfrutable, clase de música. Pero en el camino se encontró a su bienamado Juan y se detuvo a intercambiar unas muestras de su muy autentico cariño, lo que le llevó 4 segundos, pero de los largos, lo que le obligó a recuperar estos instantes, también aprovechados, porque cuando salió del salón no previó la epifanía.*

*“La biblioteca está en un punto diametralmente opuesto al salón de música en el patio circular, que tiene 50 metros de diámetro, de la escuela. Valentina tardó en total 9 segundos.” Tomado de Torres, 2004.*

Iniciando con la construcción de representaciones que dan sentido a los significados y sistemas simbólicos de la lectura de un problema en lenguaje común, atendiendo solamente la lectura del problema y con ello la realización de una gráfica de acuerdo con las variables que intervienen en la situación.

Momento 2: Construcción de los argumentos en el uso de las gráficas de modelación, donde refieren las funciones algebraicas y los intervalos de las funciones.

Realización de los argumentos que permiten la descripción del comportamiento de una función, donde se inician las primeras indagaciones de la gráfica relacionadas con la posición, velocidad y función, así como la forma de la gráfica.

Momento 3: Puesta en marcha del uso de las gráficas en la modelación con tecnología mediante Tracker y el análisis de la función generada.

Para llevar a cabo la puesta en marcha se recurre a una simulación como modelación con tecnología, que de acuerdo con Suárez (2014), la simulación en términos educativos refiere a “una estrategia que permite imitar problemas complejos del mundo real para analizar el comportamiento de los sistemas, así como de su progreso” p. 31.

El software Tracker puede hacer un análisis de videos y ayudar a la construcción de modelos; la modelación a partir del análisis en video con Tracker es una forma de combinar la modelación en computadora

Esta modelación permite crear modelos dinámicos y cinemáticos de partículas de masa puntual y sistemas de dos cuerpos. El procedimiento consistió en realizar un video en tiempo real, grabarlo, para luego proceder a utilizar las herramientas analíticas de Tracker para la generación de datos y tablas; de esta manera los estudiantes tuvieron la posibilidad de obtener representaciones gráficas, tabulares y algebraicas de las cantidades y la razón de cambio.

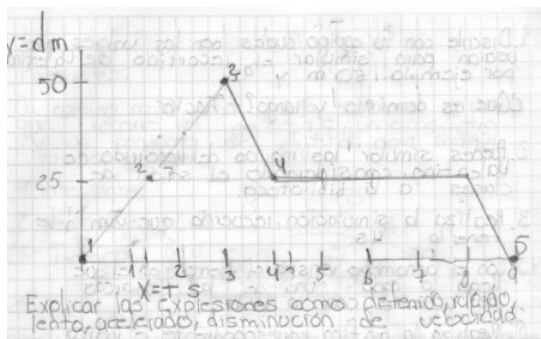
Este reporte de investigación evidencia cómo los estudiantes analizaron una situación de movimiento, explorando el cómo llevar una situación real a la simulación, así como la representación de funciones paso por paso. En este caso, se representó la situación real del Problema de Valentina a la simulación, grabando, estudiando y analizando la representación gráfica obtenida de manera digital.

## ■ Resultados

### Diseño de la situación de modelación graficación

Se induce a los estudiantes mediante el problema de “Valentina” a relacionar el movimiento del personaje a través de una representación gráfica, de donde se obtuvieron los siguientes resultados:

Figura 3. Representación gráfica del movimiento de “Valentina”



Los estudiantes identifican los siguientes conceptos respecto al movimiento.

Si es función porque el tiempo es lineal y la distancia recorrida iba aumentando y cuando se va al mismo punto la distancia regresa el tiempo sigue avanzando.  
 Avance: recorre distancias iguales en la misma cantidad de segundos el tiempo nunca se detiene.  
 Expresiones: Detenido: no hay movimiento por el tiempo continúa.  
 Rápido: Avanza a un ritmo alto.  
 lento: avanza a un ritmo bajo.  
 Acelerado: Realiza cosas a gran velocidad.  
 Disminución de velocidad: Carga de velocidad.

Recuperado del trabajo de los estudiantes.

Los estudiantes construyen los primeros argumentos de la función generada a partir de la situación que se plantea, en las primeras indagaciones se puede observar que los estudiantes identifican y relacionan los conceptos de función, lo que conlleva a la representación de la situación cuando aumenta, disminuye o permanece constante.

Después de que los estudiantes llevaron a cabo la solución en forma gráfica la situación de “Valentina”, inician con la simulación de la situación considerando la situación-simulación, de donde se espera que el estudiante construya argumentos y que conciben la resignificación de los objetos asociados a la situación del cambio y variación, con relación a una función.

Posteriormente, los estudiantes realizaron la simulación de la situación de “Valentina”, donde se consideró la siguiente secuencia:

**Tabla 2.** Cuadro comparativo entre actuaciones del docente y estudiante

| Profesora   | Estudiantes   |
|---|---|
| - Organización en equipos de cuatro o cinco integrantes.                                | - En equipo de trabajo realizan aportaciones sobre la gráfica generada del problema de “Valentina”.                 |
| - Indica la forma de trabajo para la elaboración del reporte del análisis con Tracker.  | - Participación con sugerencias para llevar la situación de “Valentina” para poder realizar la grabación.           |
| - Regulación de las participaciones de los equipos de trabajo.                          | - Elaboran el reporte escrito con las evidencias de trabajo, representaciones y el análisis con respecto a función. |
| - Atención a posibles dudas y preguntas sobre el trabajo encomendado a los estudiantes. |   |
| - Moderación de la exposición de los equipos.   | - Exposición del producto obtenido y aprendizajes alcanzados con respecto al tema de función.                       |

Fuente: elaboración propia

El trabajo en equipo, la discusión y la puesta en escena de la simulación fue en modalidad presencial, durante la sesión de clase con duración de ciento veinte minutos, de los cuales fueron asignados veinte minutos para las aportaciones de los integrantes del equipo, media hora para llevar a cabo la simulación con la grabación del movimiento y posteriormente cada equipo trabajo realizó el análisis en Tracker (60 minutos).

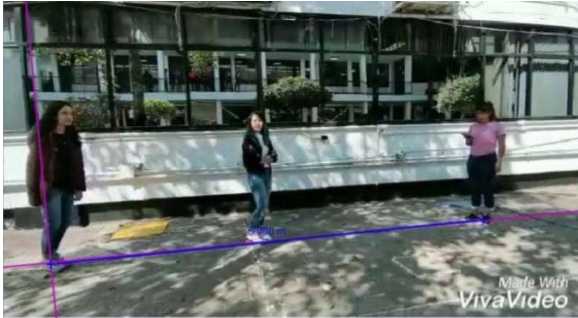
Para la elaboración del reporte final, los estudiantes se pusieron de acuerdo para la redacción e igualmente para la exposición de los resultados.

Cada equipo realizó la exposición del trabajo con el fin de que el resto del grupo hiciera observaciones y de esa forma ir validando la solución y sobre todo aportaciones del tema de funciones como:

- La posición, los cambios de posición con respecto a la velocidad, rapidez y aceleración.
- La relación entre características el modelo verbal, gráfico y algebraico.
- Las variables que intervienen en la situación.
- Intervalo de funciones: creciente y decreciente

Simulación de la situación de “Valentina”

Figura 4. Representación experimental del movimiento de “Valentina”

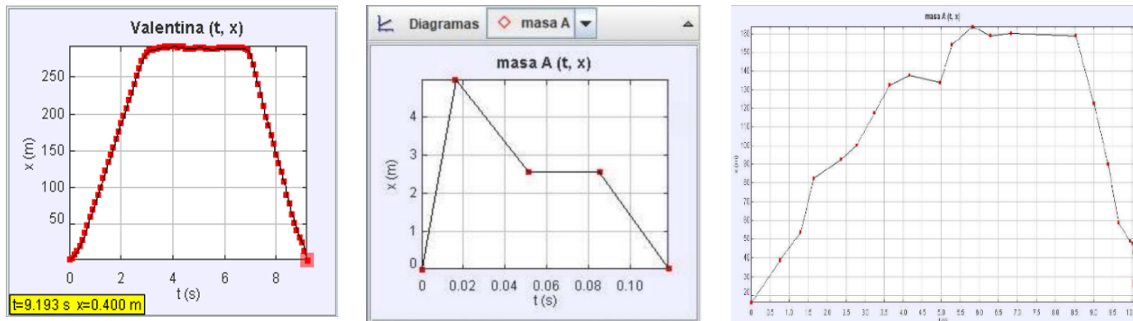


La simulación la llevaron a cabo en el patio escolar considerando los movimientos de la situación de Valentina considerando la grabación por medio del celular, en la figura 4, se muestra el sistema de referencia que dio inicio al análisis con Tracker.

Recuperado del trabajo de los estudiantes.

En esta simulación los estudiantes realizaron los comparativos sobre los movimientos de “lento”, “rápido” y “detenido” en forma experimental y que además interpretan al momento en que se genera la gráfica y tablas en Tracker que a continuación se muestra en la figura 5, se muestran las gráficas que se obtienen que son muy semejantes y que demuestran argumentos de parte de los estudiantes que se describen en la siguiente sección.

Figura 5. Gráficas generadas a partir del uso de la herramienta Tracker.



Recuperado del trabajo de los alumnos.

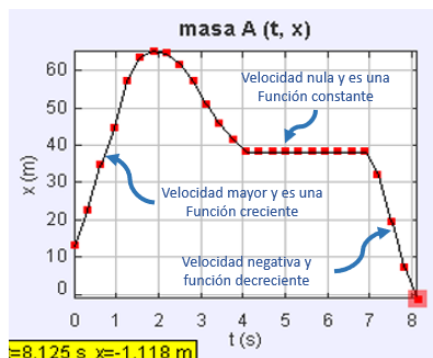
La gráfica de la derecha indujo a preguntas entre los estudiantes como: ¿porqué hay tanta variación?, ¿Es una función a pesar de las protuberancias?

El equipo de trabajo menciona que realizaron la experiencia 5 veces y que fue la mejor gráfica obtenida, los estudiantes argumentan que puede ser por el celular, debido a que se movía mucho cuando grabaron el video. También respondieron que la gráfica obtenida si cumple con el concepto de función.

De las gráficas generadas, se integran los hallazgos más representativos que los estudiantes identificaron, además de dar sentido a una función.



Figura 6. Gráficas con hallazgos representativos de parte de los estudiantes.



Los estudiantes también llevan los resultados a la identificación de los intervalos en donde la función es creciente, decreciente y constante.

Expresan durante la exposición de equipos de trabajo la importancia del modelo verbal que en este caso es la situación de “Valentina”, modelo algebraico y el modelo gráfico a partir de lo que realizaron con la herramienta tecnológica.

Los elementos de resignificación de la modelación-graficación de acuerdo con los modelos: verbal, algebraico y gráfico.

En primer lugar; los estudiantes identifican los ejes coordenados con apoyo de la herramienta Tracker y lo que concluyen es:

[...] En la gráfica que representamos, estamos hablando de una función ya que cada calor del eje “x” le corresponde uno y sólo un valor de “y, además es importante señalar que tenemos “tiempo” en el eje “x” y el tiempo no regresa [...]

[...] El modelo gráfico es bastante descriptivo pues a partir de observarlo puedes identificar en qué momento iba de prisa la persona, en qué momento se detuvo y cómo no se dio cuenta del tiempo que había transcurrido y emprendió el regreso [...]

[...] La gráfica es muy visual para saber cuándo la gráfica es creciente, decreciente y constante [...]

Por otro lado, en el caso del registro algebraico, los estudiantes consideran que es importante tener la gráfica que dio como resultado el experimento porque a partir de esta observación pueden definir los intervalos en dónde una función es creciente, decreciente o constante.

En total 30 estudiantes consideraron los datos reales del problema, por ello la coincidencia en los intervalos no varía, en el caso de un equipo es semejante el resultado, pero con un intervalo diferente. En el caso de un equipo conformado por 5 estudiantes variaron sólo en el intervalo que consideraron en la simulación del fenómeno físico.

Figura 7. Intervalos de simulación del fenómeno físico.

|                    |                       |                     |
|--------------------|-----------------------|---------------------|
| DOMINIO: (0, 9)    |                       |                     |
| IMAGEN: (0, 500)   |                       |                     |
| MODELO ALGEBRAICO: |                       |                     |
| CRECIENTE          |                       |                     |
| $F(x)=200x$        | $0 \leq x \leq 2.5$   | INTERVALO [0,2.5]   |
| CONSTANTE          |                       |                     |
| $F(x)=500$         | $2.5 \leq x \leq 6.5$ | INTERVALO [2.5,6.5] |
| DECRECIENTE        |                       |                     |
| $F(x)=-200x+1800$  | $6.5 \leq x$          | INTERVALO [6.5,9]   |

Los datos fueron extraídos con base a la gráfica generada. Consideran los estudiantes que en modo concreto es más útil usar herramientas tecnológicas para describir con mayor precisión los intervalos, además de que también consideran que al medir el tiempo se cometen errores de medición.

Recuperado del trabajo de los estudiantes

En cuanto al modelo numérico que representan los estudiantes con base a la centración de la función de analítica, en la figura 8 se muestran las tablas generadas a partir de la experiencia.

**Figura 8.** Tablas de funciones generadas a partir de la experiencia

| FUNCION CRECIENTE: |     | FUNCION CONSTANTE:    |     | FUNCION DECRECIENTE: |     |
|--------------------|-----|-----------------------|-----|----------------------|-----|
| $F(x) = 200x$      |     | $F(x) = -200x + 1800$ |     | $F(x) = 200x + 1800$ |     |
| X                  | Y   | X                     | Y   | X                    | Y   |
| 0.5                | 100 | 3                     | 500 | 7                    | 400 |
| 1                  | 200 | 4                     | 500 | 8                    | 200 |
| 2                  | 400 | 5                     | 500 | 9                    | 0   |

Durante las exposiciones de los estudiantes se concretaron al análisis de la experiencia simulada de “Valentina” argumentando que la gráfica con la serie de modelos que la respaldan representan una buena herramienta de análisis, manifestando la comprensión del comportamiento de un fenómeno físico, que permite desde la observación hasta un análisis más profundo, pero también estudiar el fenómeno físico desde la perspectiva del Cálculo, distinguen también que es importante tener una calidad de movimiento que sea visible dando un significado más cerca a lo que se observa.

## ■ Conclusiones

La modelación con respecto al movimiento se sustenta en la epistemología de la modelación-graficación, que propicia una resignificación de la variación. Las gráficas de las funciones son herramientas para modelar una variación con respecto al movimiento que involucra la velocidad y la aceleración que se muestra en el trabajo presentado por los estudiantes.

Además el estudio de las gráficas de funciones propician el desarrollo analítico en el concepto de función caracterizado por los intervalos en donde la función crece o decrece, en este contexto, las aportaciones recopiladas a través de los trabajos de los estudiantes, explican los aspectos estructurados que construye la función en un curso de Cálculo Diferencial a partir de la simulación, permitiendo la argumentación en una situación de aprendizaje a través de gráficas de funciones de se genera a partir de un fenómeno físico en movimiento lo que contribuye a establecer relaciones y argumentos a partir de los resultados.

Uno de los principales resultados es el razonamiento de los estudiantes a través de la experiencia en la modelación de un fenómeno físico y que al llevar el análisis mediante el uso de un software se vuelve una discusión enriquecida por los conceptos propios de Cálculo Diferencial y las relaciones entre la función, caracterizando el modelo gráfico, algebraico mediante el lenguaje común, donde dan cuenta de una mayor solidez en los conceptos.

Esta combinación entre el uso de los modelos y la tecnología permitió la posibilidad de trabajo colaborativo, análisis y reflexión que brinda una oportunidad para que los estudiantes desarrollen sus habilidades en Cálculo Diferencial, cabe resaltar la importancia del diseño de la secuencia que favorece el aprendizaje de los estudiantes.

## ■ Agradecimientos

Al Instituto Politécnico Nacional por el apoyo otorgado a través del proyecto de investigación SIP-20201239. y a la Red de los Seminarios Repensar con registro DES/RED/003/2015.

## ■ Referencias bibliográficas

- Irazoqui, E. (2015). *El aprendizaje del cálculo diferencial: una propuesta basada en la modularización* (Doctoral dissertation, UNED. Universidad Nacional de Educación a Distancia (España)).
- Molina-Toro, J. F., Villa-Ochoa, J., & Suárez Téllez, L. (2018). La modelación en el aula como un ambiente de experimentación-con-graficación-y-tecnología. Un estudio con funciones trigonométricas. *Revista Latinoamericana de Etnomatemática: Perspectivas Socioculturales de la Educación Matemática*, 11(1), 87-115.
- Nolan C. & Herbert S. (2015). Introducing linear functions: an alternative statistical approach. *Mathematics Education Research Journal*, 27(4), 401-421. <https://doi.org/10.1007/s13394-015-0147-x>
- Posada, F. A., & Villa-Ochoa, J. (2006). *El razonamiento algebraico y la modelación matemática*. Universidad de Antioquia
- Suárez, L. (2014). *Modelación-graficación para la matemática escolar*. México: Ediciones Díaz de Santos.
- Tigueros, M. (2009). El uso de la modelación en la enseñanza de las matemáticas. *Innovación educativa*, 9(46), 75-87.
- Torres, A. (2004). *La modelación y las gráficas en situaciones de movimiento con tecnología*. Tesis no publicada del Programa de Maestría del CICATA-IPN.