VOL 34, NÚMERO 1, AÑO 2021

EL PROBLEMA DE LOS CÍRCULOS TANGENTES COMO ILUSTRACIÓN DEL POTENCIAL DEL SGD PARA LA ENSEÑANZA DE LA GEOMETRÍA

THE TANGENT CIRCLE PROBLEM AS ILLUSTRATION OF THE DYNAMIC GEOMETRY SOTFWARE POTENTIAL FOR GEOMETRY TEACHING

Luis Ángel Pérez Fernández, Adriana Galeano Reyes, Marcos Chacón Castro,
Universidad Industrial de Santander. (Colombia)
nanisitagale@gmail.com, laperezf@saber.uis.edu.co, lcmar@outlook.es

Resumen

En las últimas décadas, la geometría sintética ha recuperado importante espacio en el currículo, principalmente por la aparición del software de geometría dinámica (SGD), que ha ofrecido a los profesores la posibilidad de una nueva práctica de la enseñanza de la geometría. Sin embargo, los profesores padecen serias dificultades a la hora de integrarlo en el aula, incluso aquellos que cuentan con infraestructuras adecuadas. El propósito de este artículo es aportar, desde el punto de vista de la *geometría experimental*, una secuencia que muestre el potencial del SGD para el desarrollo del razonamiento geométrico, a partir del histórico problema de los tres círculos. Este clásico de la geometría se puede descomponer en una secuencia de problemas que permiten ejemplificar y caracterizar diferentes usos del SGD, en particular de DGPad-Colombia, que incorpora el arrastre, la traza de puntos y la posibilidad de crear macro construcciones; herramientas que diversifican las posibilidades didácticas.

Palabras clave: geometría experimental, geometría dinámica, construcciones

Abstract

In recent decades, synthetic geometry has regained important space in the curriculum, mainly due to the appearance of dynamic geometry software (DGS), which has offered teachers the possibility of a new geometry teaching practice. However, teachers suffer serious difficulties when it comes to integrating it into the classroom, even those who have adequate infrastructures. The purpose of this article is to provide, from the point of view of *experimental geometry*, a sequence that shows the potential of the DGS for geometric reasoning development, based on the historical problem of the three circles. This classic of geometry can be decomposed into a sequence of problems that allow exemplifying and characterizing different uses of the DGS, in particular of Colombia- DGPad, which incorporates dragging, trace of points and the possibility of creating macro constructions; tools that diversify the didactic possibilities.

Key words: experimental geometry, dynamic geometry, constructions

Introducción

A pesar de que el SGD fue creado para enseñar geometría y que además se han desarrollado numerosas investigaciones concernientes a sus roles y efectos en la enseñanza y el aprendizaje, su uso efectivo en el aula sigue siendo problemático para los profesores (Drijvers, et al., 2009; Pierce y Stacey, 2013). En este sentido, se requiere reflexionar no solo sobre la enseñanza con geometría dinámica, sino también sobre la necesidad hacer matemáticas utilizando la geometría dinámica y por ende del desarrollo de nuevas prácticas y estrategias didácticas entre las que se encuentra la geometría experimental (Acosta, 2005).
En este documento ejemplificamos, desde el punto de vista de la geometría experimental, algunas estrategias y prácticas con SGD, particularmente con DGPad-Colombia (DGPA, s.f.), que puede ejecutarse en línea. Esta versión es una adaptación del software original DGPad, desarrollado en Francia por Eric Hackenholz, el cual tiene todas las características fundamentales del software de geometría dinámica: el arrastre, traza de puntos, macro construcciones y la posibilidad de crear otras. Consideramos que el SGD permite construir un puente entre la percepción y la formalización, dado que los objetos en la pantalla responden a propiedades matemáticas que se perciben al arrastrar (Laborde, 2003).

Mediante la técnica de análisis, donde "se asume como cierto aquello que hay que probar y se razona con base en esta asunción hasta llegar a algo que forma parte de los principios" (González, 2007, p. 213), el problema de los círculos tangentes se puede descomponer sistemáticamente en otros cada vez más elementales, que condensan propiedades de semejanza y relaciones entre ángulos en los círculos, que se estudian comúnmente en los cursos de geometría euclidiana a nivel universitario. Esta descomposición del problema la usaremos para ilustrar cómo el software de geometría dinámica ofrece herramientas para desarrollar una práctica geométrica basada en la observación y manipulación de los objetos en la pantalla, con el fin de desarrollar razonamiento geométrico (Sandoval, 2009). Por ejemplo: elaborar dibujos que no resisten la prueba del arrastre, pero que ofrecen la posibilidad desarrollar la técnica del análisis, a partir del ajuste perceptivo de los objetos en la pantalla. Además, las macro construcciones que permiten simplificar los dibujos, ocultando los objetos intermedios de un proceso de construcción, condensan fragmentos de razonamiento deductivo, que permiten desarrollar otros procesos más complejos y enriquecer el pensamiento geométrico. También, el arrastre favorece el reconocimiento de propiedades invariantes, convirtiendo el dibujo en una fuente para conjeturar y desarrollar estrategias de solución de problemas de construcción y demostración.

Geometría experimental

Acosta (2005) resalta la necesidad de una nueva práctica matemática y didáctica que atienda, entre otras, a las siguientes cuestiones: ¿Cuáles son las consecuencias de la utilización de las nuevas representaciones de los objetos geométricos que ofrecen los SGD? ¿Qué estrategias y técnicas tanto matemáticas como didácticas se pueden usar para justificar el uso de los SGD, no solo para enseñar sino también para hacer matemáticas? Para atender a estos interrogantes, propone y define la geometría experimental como:

> […] Una práctica geométrica que privilegia la observación y manipulación de los objetos geométricos en la pantalla de la computadora, con la intención de emitir conjeturas sobre las propiedades geométricas de dichos objetos, conjeturas que se ponen a prueba mediante el arrastre, la medición y la construcción de objetos auxiliares. La invalidación de una conjetura en geometría experimental puede considerarse equivalente a una demostración de su falsedad por medio de un contraejemplo. Las conjeturas que no sean invalidadas por la experiencia se consideran verdaderas, en espera de una demostración formal. Aunque una figura dinámica no puede constituir una demostración de la validez de una conjetura, sí puede contribuir a la construcción de una demostración formal, pues permite encontrar relaciones que pueden constituir encadenamientos lógicos de dicha demostración. (p. 124)

La geometría experimental legitima entonces, el uso del SGD para elaborar procesos de experimentación que permitan conjeturar, a partir de la percepción visual y buscar estrategias para formalizar y argumentar las relaciones establecidas perceptivamente. Es este sentido, el software funge como un laboratorio donde la experimentación y la visualización son protagonistas.

Como ejemplos de experimentos que se pueden desarrollar con el SGD, tenemos: producir construcciones en las que un punto u otros objetos se puedan ajustar mediante el arrastre, para que cumpla una condición y a partir de ese dibujo elaborar un análisis, en el sentido de González (2007), que permita desarrollar estrategias de solución. También la posibilidad de activar la traza de un punto que describe una trayectoria al arrastrar otro del cual depende. Es decir, explicitar un lugar geométrico a partir del registro del movimiento de un punto en la pantalla, mediante la opción traza.

A continuación, contextualizaremos el problema de los tres círculos tangentes y expondremos de manera sucinta el proceso de análisis que nos permitirá descomponerlo en problemas más simples, de los que extraeremos los elementos para desarrollar nuestras reflexiones didácticas y de esta manera, ejemplificar las ideas expuestas en los párrafos precedentes.

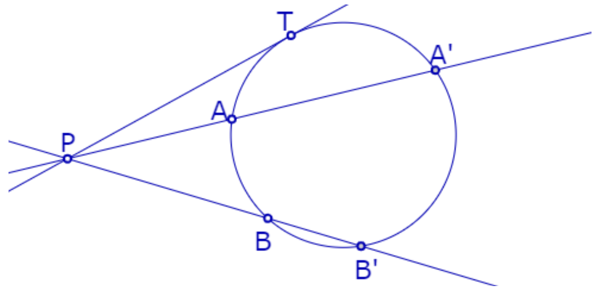
El problema de los tres círculos tangentes

Las ideas de la teoría geométrica que expondremos a continuación, aunque no son completamente fieles, se sustentan en el trabajo de Rabu-Boyé (2009), que expone el análisis hecho por Vieta en el siglo XVII del problema de los tres círculos tangentes, que se encuentra en el *Tratado de los Contactos* de Apolonio, basándose en los ejemplos propuestos por Papo de Alejandría en el siglo IV d.C., quien redujo el problema a partir de otros diez que enunciaremos de manera general como sigue: dados tres objetos (puntos, rectas o círculos) construir un círculo tangente a las rectas y a los círculos dados, que pase por los puntos dados. El más elemental de todos es: dados tres puntos, construir un círculo que pase por ellos; cuya solución es el circuncírculo. El más complejo: dados tres círculos construir un círculo tangente a ellos.

Nuestro interés no es hacer una revisión exhaustiva de cada uno de estos diez problemas, tampoco exponerlos de manera general uno a uno; simplemente usaremos un caso particular del último, el de los tres círculos, y otros intermedios, con el propósito de desarrollar el análisis con el que pretendemos ejemplificar algunos usos del SGD para resolver problemas de construcción no rutinarios, aunque en general, los problemas de construcción no lo son per sé. Enunciaremos cada problema exponiendo los tres objetos dados (puntos, rectas o círculos), entendiendo que se debe construir un círculo, como se mencionó antes; y para facilitar la interpretación de las figuras, se mostrarán los objetos dados en color verde, en color rojo el círculo que se desea construir como objeto final y en color azul los objetos intermedios.

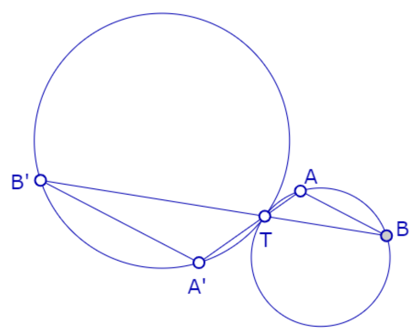
Antes de empezar a exponer los problemas, expondremos tres teoremas que consideraremos para desarrollar el análisis y en algunos casos simplificar pasos de construcción.
Teorema 1: potencia de un punto respecto a un círculo. Si desde un punto P exterior a un círculo se trazan una tangente en T y dos secantes PA y PB, que cortan al círculo nuevamente en A' y B' respectivamente, entonces $PA \cdot PA' = PB \cdot PB'$. Ver Figura 1. Llamamos potencia de P respecto al círculo al producto $PA \cdot PA'$, el cual no depende de la secante trazada desde P. Es decir, es invariante.

Figura 1. *Potencia de un punto respecto a un círculo.*



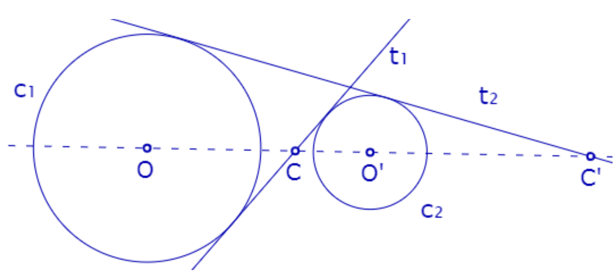
Teorema 2: circuncírculos de triángulos en posición de similitud. Diremos que dos *triángulos están en posición de similitud* si son semejantes, comparten un vértice y los lados opuestos a este son paralelos. Ahora, si dos triángulos están en posición de similitud, entonces sus circuncírculos son tangentes en el vértice común. En la Figura 2, se ilustran dos triángulos (ΔABT y $\Delta A'B'T$) en posición de similitud con sus circuncírculos respectivos tangentes.

Figura 2. *Triángulos en posición de similitud.*



*Teorema 3: centros de similitud de dos círculos exteriores***.** Para todo par de círculos exteriores, existen dos puntos alineados con los centros de estos, que llamaremos *centros de similitud* de los dos círculos, desde los cuales se pueden trazar cuatro rectas tangentes a ambos; dos desde cada centro de similitud. En la
Figura 3, se muestran dos círculos c_1 y c_2 con centros respectivos O y O', con sus centros de similitud C y C' alineados con O y O'.

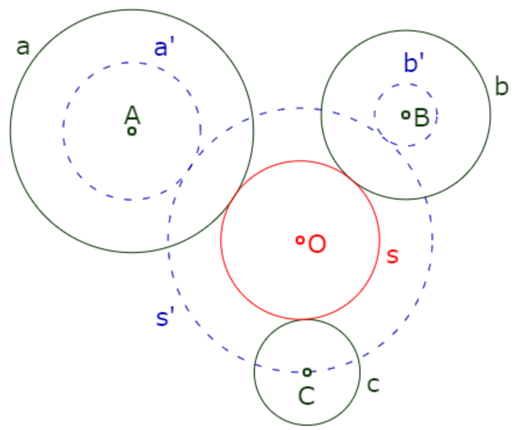
Figura 3. *Centros de similitud de dos círculos*



A continuación, ilustraremos cómo se agota sistemáticamente el problema de los tres círculos a otros más básicos. Estrategia que llamamos análisis, cuya efectividad se fortalece gracias a las herramientas del SGD, como mostraremos más adelante.

Problema 1: dados tres círculos. Sean a, b y c los círculos dados, con A, B y C sus respectivos centros. Consideraremos además el caso particular donde los círculos son exteriores y tienen radios, de mayor a menor, en el orden enunciado, como se observa en la Figura 4.

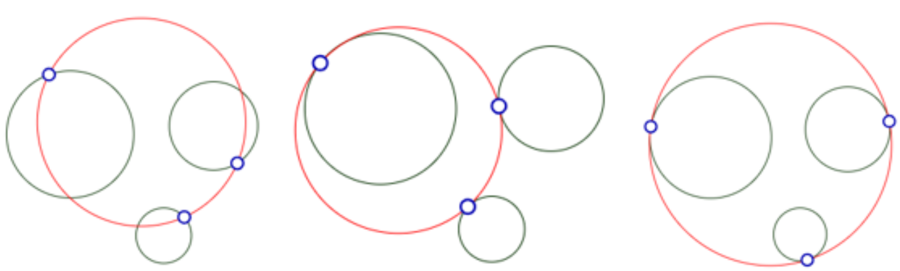
Figura 4. *Dados tres círculos*



En la Figura 4, se constata perceptivamente, que para obtener una solución (círculo s), basta construir un círculo s' concéntrico con s, que pase por C y sea tangente a los dos círculos a' y b', concéntricos con a y b respectivamente. Es decir, el problema se reduce a construir un círculo tangente a dos círculos y que pase por un punto.

Consideraciones didácticas problema.. En este primer problema podemos proponer una primera exploración a los estudiantes, que consiste en construir un punto en cada círculo dado, luego un círculo que pase por eso tres puntos y ajustarlos hasta que se cumpla la condición de tangencia. La Figura 5 ilustra la exploración que se propone.

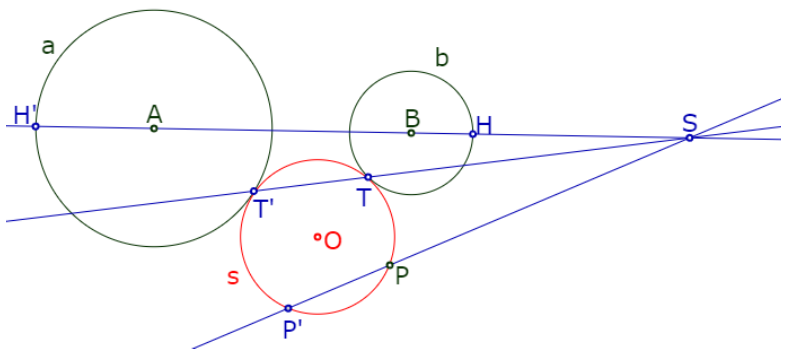
Figura 5. *Exploración para el problema 1*



Poder arrastrar los puntos sobre los círculos, ajustándolos hasta lograr percibir la tangencia ofrece elementos para conjeturar que en este caso particular existen ocho soluciones. Además, que, si fijamos uno de los puntos en una posición arbitraria de uno de los círculos, no existe un círculo que sea tangente a los tres, con un punto de tangencia el punto fijado.

Problema 2: dados dos círculos y un punto. Sean a, b y P los dos círculos y el punto dados, con A y B los respectivos centros. Veamos la Figura 6, donde se considera un caso particular, el problema se imagina resuelto y se dibuja un círculo solución como se hizo en el anterior problema. La recta determinada por los puntos de tangencia T y T' pasa por el centro de similitud exterior de los dos círculos dados.

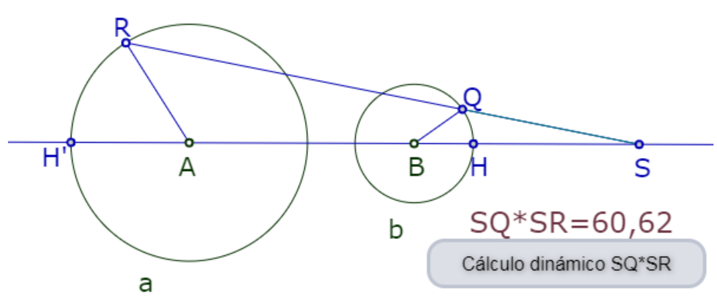
Figura 6. *Dados dos círculos y un punto.*



Usando el teorema 1 expuesto previamente, podemos concluir que $SP \cdot SP' = ST \cdot ST'$. Con otros pocos cálculos extra, que $ST \cdot ST' = SH \cdot SH'$, por lo tanto $SP \cdot SP' = SH \cdot SH'$. Luego, los puntos H, H', P y P' están en un círculo. Este razonamiento permite construir un segundo punto P' del círculo buscado, que se encuentra en la recta SP; trazando un círculo que pase por los puntos P, H y H'. Así, el problema se reduce a: dados dos puntos (P y P') y un círculo (a o b), construir un círculo tangente al círculo que pase por los dos puntos.

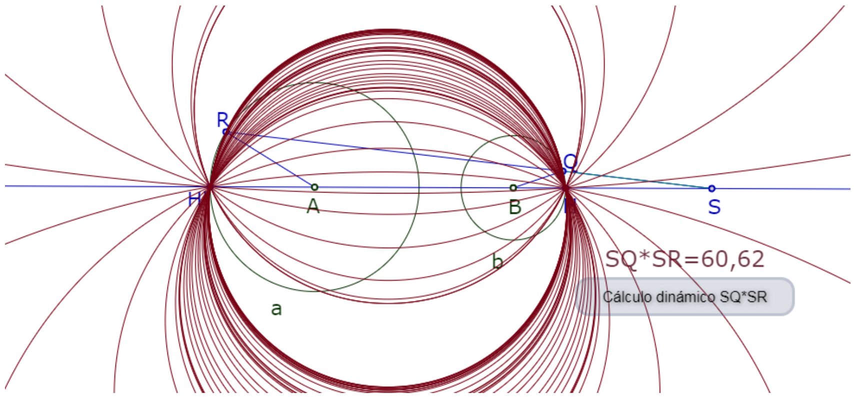
Consideraciones didácticas problema. Nuevamente hay muchas posibilidades de crear experimentos que permitan elaborar conjeturas en dirección del análisis propuesto previamente. Por ejemplo, si se cambia la posición del punto P relativa a los círculos y se construye el centro de similitud, se puede apreciar la alineación de los puntos T, T' y S, en diferentes dibujos ajustados perceptivamente. Además, la posibilidad de hacer cálculos dinámicos (que cambian conforme los objetos involucrados se mueven), ofrece elementos para conjeturar que si se traza una secante SQ al círculo b desde el centro de similitud S, corta al círculo a en un punto R que deja el producto $SQ \cdot SR$ constante. Ver Figura 7.

Figura 7. *Exploración 1 problema 2.*



En ese sentido, el círculo determinado por los puntos H, Q y R, pasa por H'; sin importar la posición de la secante SQ. Para esto se puede proponer a los alumnos construir dicho círculo, activarle el rastro y cambiar la posición de la recta secante. Este hecho fundamental del SGD, que permite percibir propiedades invariantes a partir de la traza de un punto y el movimiento de otros, se ilustra a continuación en la Figura 8.

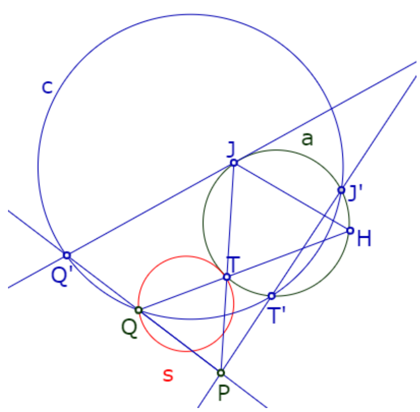
Figura 8. *Exploración 2 problema 2*.



Se observa cómo la familia de círculos que pasa por H, Q y R tiene un segundo punto fijo H'. Hecho que permite comprobar experimentalmente, que los puntos T y T' están en un círculo de esa familia, al igual que los puntos P y P', de modo que para obtener P', basta construir el círculo que pase por P, Q y R.

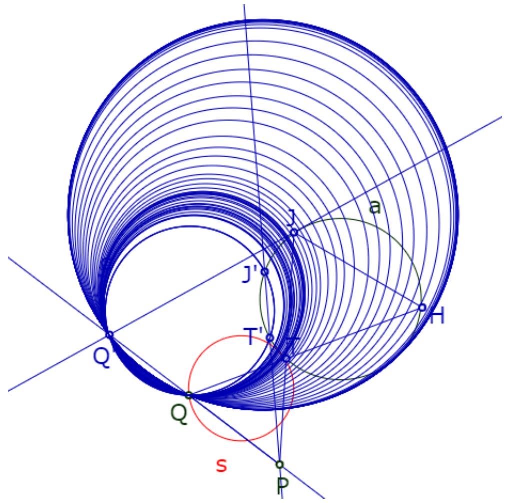
*Problema 3: dados un círculo y dos puntos***.** Consideremos la Figura 9. Sean a, P y Q el círculo y los dos puntos dados respectivamente. Imaginando el problema resuelto, dibujamos el círculo s, para obtener una figura que no resiste el arrastre, pero que como en los anteriores casos permite hacer el análisis a partir de la identificación de propiedades en él. Considerando T al punto de tangencia de los dos círculos y trazando las rectas PT y QT, constatamos que los cortes con el círculo a, determinan dos triángulos en posición de similitud (ΔPQT y ΔHJT). De acuerdo con el teorema 2, esto último es suficiente para que los círculos sean tangentes. Si consideramos además, cualquier otra secante al círculo a trazada desde P, que corte en los puntos P' y J', se deduce que P tiene igual potencia respecto a a y respecto a cualquier otro círculo c que pase por J' y T', en particular aquel que pasa por Q. Por lo tanto, el punto Q', de intersección de c y la recta PQ, es un punto invariante al movimiento de la secante PT', obteniendo de esta manera, la recta JQ', la cual es tangente a a en J. De esta manera se concreta la construcción obteniendo Q' a partir de cualquier secante PT' y luego J como punto de tangencia desde el punto Q', luego la recta JP determina el punto de tangencia T y el problema se reduce a construir el círculo que pasa por los puntos P, Q y T.

Figura 9. Dados dos puntos y un círculo.



Consideraciones didácticas problema. Al igual que en los anteriores casos, las posibilidades de experimentación en este problema, son diversas. Por ejemplo, podemos sugerir a los estudiantes, que construyan la secante PT' que corta al círculo en J', luego que construyan el círculo que pasa por J', T' y Q y activen la traza de este. Al hacer esto se obtiene el dibujo que se muestra en la Figura 10.

Figura 10. *Exploración problema 3.*



Se percibe nuevamente, que el punto Q' es invariante, hecho que se puede justificar mediante el teorema de la potencia del punto respecto al círculo, dado que P tiene potencia respecto a a, la misma que respecto a cualquier círculo que pase por J' y T', por lo tanto si Q permanece fijo, Q' debe permanecer también para que $PQ \cdot PQ'$ sea constante.

También se puede sugerir a los alumnos medir algunos ángulos y observar que a partir de la tangencia de $Q'J$ y a se pueden establecer relaciones entre el ángulo formado por una tangente y una cuerda, los ángulos inscritos en arcos opuestos de un círculo, con el propósito de garantizar el paralelismo de PQ y HJ.

Podríamos realizar muchos más experimentos para enriquecer la práctica experimental, robustecer las conjeturas propuestas y formalizar las demostraciones de estas, aprovechando los mismos experimentos. Sin embargo, por cuestiones de espacio, proponemos solo estas exploraciones básicas con el objetivo de exponer el potencial del SGD para el desarrollo de una práctica matemática y didáctica sustentada en la geometría experimental.

Para concretar la construcción del problema de los tres círculos en el SGD, al menos en algunos casos particulares, sugerimos elaborar macro construcciones para obtener los centros de similitud de dos círculos y una recta tangente a un círculo desde un punto exterior además de las correspondientes a los problemas 2 y 3. Esto favorece no solo la simplificación del dibujo, sino que permite al alumno enfrentar problemas más elaborados, a partir de la consolidación de herramientas más potentes. Así como los teoremas, que condensan propiedades más básicas, las macros condensan pedazos de razonamiento deductivo que favorecen la aparición de estrategias de solución de problemas de construcción sintéticos.

Conclusiones

Consideramos que enseñar matemáticas con software de geometría dinámica requiere la determinación y empleo de nuevas técnicas que hagan uso de estas herramientas, no solo para enseñar, sino para hacer matemáticas. Es decir, que la geometría dinámica no solo pone en evidencia la necesidad de nuevas formas de enseñanza, sino también, nuevas formas de hacer matemáticas.

Hemos expuesto algunas estrategias de solución de problemas de construcción, que son propias de la geometría dinámica, basadas en la exploración, medición y conjeturación, mediante el desarrollo de una práctica de geometría experimental, como un ejemplo de praxeología matemática, sentándonos en los términos de Acosta (2005). Por ejemplo, los dibujos blandos, aquellos que soportan el arrastre parcialmente, junto con el dinamismo de los objetos en el SGD, favorecen la consolidación del análisis como una técnica genuina para la resolución de problemas tanto de construcción como de demostración.

Con este artículo pretendemos aportar ideas para el fomento de la geometría sintética, la de las construcciones, no en el sentido estricto de los griegos, sino en el sentido que debemos replantear nosotros los educadores, en términos de estas nuevas herramientas de representación de objetos dinámicos, que, así como ofrecen oportunidades para mejorar la enseñanza y el aprendizaje de la geometría, proponen muchos interrogantes para la comunidad científica.

Referencias bibliográficas

Acosta, M. (2005). Geometría experimental con Cabri: una nueva praxeología matemática. *Educación Matemática*, 17(3), pp. 121-140.

Rabu-Boyé, A. (2009). *El Apollonius Gallus y el problema de los tres círculos como defensa e ilustración de la geometría sintética*. Ediciones Universidad Industrial de Santander.

Drijvers, P., Kieran, C., Mariotti, M. A., Ainley, J., Andresen, M., Chan, Y., Dana-Picard, T., Gueudet, G., Kidron, I., & Meagher, M. (2009). Integrating technology into mathematics education: Theoretical perspectives. En *Mathematics education and technology-rethinking the terrain* (pp. 89-132). Springer, Boston, MA.

González, P. (2007). Raíces históricas y trascendencia de la geometría analítica. *Sigma: revista de matemáticas matematika aldizkaria*, (30), 205-236.

Laborde, C. (2003). Technology used as a tool for mediating knowledge in the teaching of mathematics: the case of Cabri-geometry. In *Plenary speech delivered at the Asian Technology Conference in Mathematics*.

Pierce, R., & Stacey, K. (2013). Teaching with new technology: four 'early majority'teachers. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 16(5), 323-347.

Sandoval, I. (2009). La geometría dinámica como una herramienta de mediación entre el conocimiento perceptivo y el geométrico. *Educación matemática*, 21(1), 5-27.