EVIDENCIAS DE PENSAMIENTO FUNCIONAL EN ESTUDIANTES DE EDUCACIÓN PREESCOLAR

EVIDENCE OF FUNCTIONAL THINKING IN PRESCHOOL EDUCATION STUDENTS

Yurry Daniela Quenorán Lucano, Honorina Ruiz Estrada, Juan Nieto Frausto
Benemérita Universidad Autónoma de Puebla (México)
daniela.quenoran@alumno.buap.mx, honorina.ruizestrada@viep.com.mx, juan.nieto@correo.buap.mx

Resumen
Se reportan evidencias orales de la presencia de pensamiento funcional de recurrencia y correspondencia en cinco niños de tercero de Preescolar Comunitario de la Comunidad Santa Cruz La Ixtla, Puebla, México. Los datos se obtienen de entrevistas clínicas que involucran seis tareas basadas en investigaciones previas realizadas en los Estados Unidos de América y en España. Las sesiones fueron grabadas en audio y luego transcritas, de donde se observa como transitan los informantes a través del pensamiento funcional antes citado. A diferencia de estos trabajos, nosotros interrogamos individualmente a los escolares y no encontramos evidencias de pensamiento covariacional.

Palabras clave: pensamiento funcional, educación prescolar, pensamiento de recurrencia, correspondencia y covariacional

Abstract
This paper reports oral evidence of the presence of recurrence and correspondence functional thinking in five third-grade children from the Community Preschool of Santa Cruz La Ixtla Region, in Puebla, Mexico. Data are obtained from clinical interviews involving six previous research-based tasks which were conducted in the United States of America and Spain. The sessions were recorded in audio and then transcribed, from which it is observed how the participants go through the above mentioned functional thinking. Unlike those papers, we questioned schoolchildren individually, but we found no evidence of co-variational thinking.

Key words: functional thinking, preschool education, recurrence, correspondence, and co-variational thinking

Introducción

El enfoque Early Algebra, busca que los estudiantes construyan su razonamiento de forma intuitiva sobre patrones y relaciones en el trabajo aritmético a través de experiencias cotidianas como base para el pensamiento algebraico (Stephens et al. (2017)). Una de las formas de este pensamiento es el pensamiento funcional, el cual se centra en la variación entre dos cantidades cambiantes (Smith, 2008), siendo la función el objeto matemático principal. Cabe señalar, que el propósito no es enseñar el concepto de función desde los primeros años de escolaridad tal como es presentado en la educación secundaria. Más bien, se trata de utilizar el potencial de este objeto matemático y de los conceptos matemáticos asociados, de forma que los estudiantes desarrollen habilidades que les permitan pensar algebraicamente, desde los primeros ciclos escolares.

Blanton y Kaput (2004) lideran una investigación que se enfoca en cómo los estudiantes de preescolar a quinto grado de educación primaria evidencian pensamiento algebraico, a través de la generalización de patrones en la resolución de una tarea que involucra la relación funcional entre perros, ojos y colas. Los autores exponen que los niños de prescolar (de 5 a 6 años) hallaron el número de ojos y colas hasta 10 perros, mediante el conteo de objetos visibles, asignando un punto para cada ojo y una marca larga para cada cola. Además, mencionan que los alumnos mostraron pensamiento covariacional porque, atendieron tanto el número de perros como el de ojos simultáneamente de la siguiente forma “cada vez que agregamos un perro más obtenemos dos ojos más”. Estos autores concluyen que, aunque las matemáticas de la educación primaria incluyen nociones de patrones, no se presta atención al pensamiento funcional, especialmente en los primeros grados de escolaridad. Ellos señalan que, la búsqueda de patrones en los datos de una sola variable tiene menos capacidad predictiva y es menos poderosa matemáticamente que el pensamiento funcional. Por lo que es necesario que el plan de estudios atienda cómo dos magnitudes varían simultáneamente.

Por otra parte, Castro et al. (2017) presentan un estudio centrado en el pensamiento funcional de un grupo de 12 estudiantes de educación preescolar (5-6 años) de un colegio privado de Granada, España. Plantearon tres tareas: 1) perros y collares, 2) perros y platos de comida y 3) perros, platos de comida y uno de agua. Los investigadores presentaron el contexto de la situación empleando imágenes de perros, collares y platos en colores que se pegaron en la pizarra, y formularon preguntas relativas a casos particulares (5, 7, 10 perros) y a medida que los estudiantes entendieron lo que se les preguntaba, cuestionaron por un número mayor de perros (5, 200 y 1000 perros), llegando a preguntar por la generalización en términos de variables (m, x y z). Se desarrollaron tres sesiones de forma colectiva y fueron grabadas con videocámara. Con respecto a la tarea 2, ellos señalan que se evidencia pensamiento covariacional y de correspondencia. El primero, se refleja cuando los estudiantes suman dos cada vez que se aumenta un perro (porque dos más dos son cuatro, más otro dos son seis, más otro dos son ocho) y el pensamiento de correspondencia cuando tienen en cuenta dos veces el mismo número de perros (100 perros, necesitan 200 platos).

Siguiendo a estos autores, nos interesamos en la búsqueda de evidencias de pensamiento funcional en niños de preescolar atendidos por el Consejo Nacional de Fomento Educativo (CONAFE). El CONAFE es un organismo público descentralizado que se creó el 11 de septiembre de 1971, con el fin de garantizar el acceso a la educación básica de niñas y niños mexicanos de comunidades de alta y muy alta marginación, en las cuales no es posible contar con un servicio educativo regular de la Secretaría de Educación Pública (SEP). Este organismo es encargado de generar nuevos modelos pedagógicos enfocados en abatir el rezago educativo, uno de ellos es el Aprendizaje Basado en la Colaboración y el Diálogo (ABCD), que consiste en brindar atención personalizada a niñas, niños y adolescentes de las comunidades que atiende, buscando desarrollar en cada participante la capacidad de aprender mediante el diálogo y la colaboración. El CONAFE cuenta con tres modalidades de atención: comunitario (estudiantes que hablan español), indígena (estudiantes que hablan una lengua indígena) y migrante (estudiantes que se trasladan de un lugar a otro).

En esta investigación abordamos la pregunta, ¿qué evidencias hay de pensamiento funcional en estudiantes de educación preescolar cuando trabajan con tareas que involucran la variación directamente proporcional y la lineal?

Para ello, planteamos el siguiente objetivo: identificar evidencias de pensamiento de recurrencia, correspondencia, variacional o covariacional en estudiantes de educación preescolar cuando trabajan con tareas en las que subyacen la variación directamente proporcional y la lineal.

Marco teórico

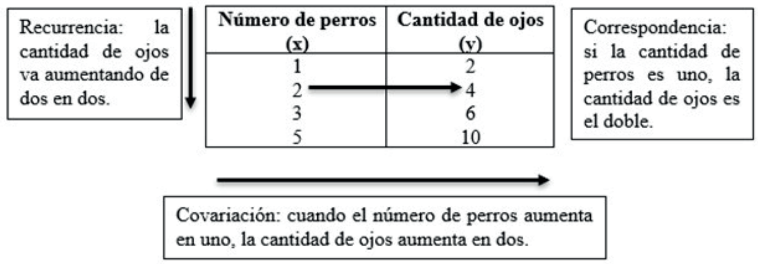
De acuerdo con la literatura, el pensamiento funcional es abordado de diversas maneras, guardando ciertas similitudes que remiten a la relación entre dos cantidades que varían y la generalización de las relaciones. Sin embargo, también presentan matices distintos que dependen de los objetivos que las investigaciones quieren alcanzar. Así, Warren y Cooper (2005) lo define como: a) las ideas de cambio (cualitativo y cuantitativo), b) las relaciones que hay entre ellas y c) la solución de problemas utilizando estas relaciones. Así mismo, estos autores añaden que, a través del pensamiento funcional se pueden establecer relaciones de dependencia entre valores de dos conjuntos en una situación cercana y cotidiana para el estudiante, lo que permite descubrir otras parejas de valores en la situación y la generalización de la relación existente entre pares de datos. Además, para Rico (2007), el pensamiento funcional es una herramienta para la resolución de problemas, que puede resultar útil para pensar en las relaciones entre las cantidades que varían y debe considerarse como una meta disciplinar y fundamental en la enseñanza de las matemáticas.

También, para Smith (2008), el pensamiento funcional se entiende como una actividad cognitiva que “se enfoca en la relación entre dos cantidades que varían, particularmente las formas de pensamiento que conducen desde las relaciones específicas (incidencias individuales) a generalizaciones de esas relaciones entre instancias” (p.145). Pinto y Cañadas (2017) establecen que el pensamiento funcional tiene como base, la relación entre cantidades involucradas, la variación conjunta y el concepto de función, siendo un contenido matemático fundamental. Por otra parte, mencionan que es uno de los enfoques del álgebra adoptado en la Educación Primaria, cuyo objetivo es que los estudiantes se centren y desarrollen habilidades en cuanto al razonamiento sobre las relaciones entre cantidades que varían, la identificación de patrones que subyacen de las relaciones y sus representaciones y la realización de procesos de generalización con el fin de justificarlos.

De acuerdo con algunas posturas respecto al pensamiento funcional y en relación a los objetivos del presente trabajo, seguimos el planteamiento de Smith (2008) quien, además presenta características más amplias sobre el pensamiento funcional, que se describen a continuación. Smith (2008), distingue tres tipos de pensamiento en los procesos de generalización: 1) recurrencia, 2) correspondencia y 3) covariación. Blanton y Kaput (2011) los define de la siguiente manera: el pensamiento de recurrencia, implica encontrar la variación dentro de una secuencia de valores. El de correspondencia, se basa en la identificación de una correlación entre variables. Y el pensamiento covariacional, consiste en analizar cómo dos cantidades varían simultáneamente y mantienen ese cambio como una parte explícita y dinámica de la descripción de una función.

En la figura 1 se presenta la tarea de “perros y ojos” para ilustrar, a manera de ejemplo, los tres tipos de pensamiento funcional.

Figura 1. *Relación funcional entre número de perros y cantidad de ojos.*



Tomada de Pinto, E. (2016). Relaciones funcionales, sistemas de representación y generalización en estudiantes de tercero de primaria (Trabajo de fin de máster). Universidad de Granada, España.

Método

Los informantes son estudiantes de la comunidad Santa Cruz La Ixtla, ubicada en una zona rural del Estado de Puebla, México. Son niños de preescolar que se encuentran en una microlocalidad, conformada por una población campesina mestiza e indígena. Esta comunidad presenta una deficiencia o carencia en los servicios públicos básicos como el sistema de agua potable, alumbrado público y no cuentan con acceso a internet. Las familias que habitan en este contexto subsisten gracias a la producción agrícola para el autoconsumo y a la cría de animales en pequeña escala.

Teniendo en cuenta las características de la población objeto de estudio, esta investigación es de tipo cualitativo, con carácter exploratorio y descriptivo (Hernández, Fernández y Baptista, 2014). Es de corte cualitativo porque, al entrar en la comunidad Santa Cruz La Ixtla, se puede estudiar el pensamiento funcional desde el contexto de los participantes, dar una explicación detallada de los comportamientos y manifestaciones que ocurren dentro del mismo y describir las acciones y producciones de los estudiantes. Es exploratorio porque pretendemos identificar evidencias de pensamiento funcional de recurrencia, correspondencia y covariación, considerando que hay pocas evidencias en la literatura que aseveran que los niños de preescolar evocan estos tipos de pensamiento. Es descriptivo dado que, nuestros informantes tienen dificultades para leer, escribir y hacer operaciones a lápiz y papel. Por estos motivos, las respuestas a las preguntas planteadas en las seis tareas se obtienen de forma oral y se describen para identificar evidencias del pensamiento funcional.

La comunidad Santa Cruz La Ixtla cuenta con 19 niños de preescolar comunitario (con edades entre 3 y 6 años). 9 son de primero, 6 de segundo y 5 de tercero. La muestra se conformó por los cinco niños de tercero, porque saben contar del 1 al 50 de forma correcta. Algunos de ellos operan mentalmente de dos en dos y no tienen dificultad para relacionar las dos variables involucradas en cada tarea, esto se evidenció en un ensayo previo presentado a los estudiantes de los tres grados.

La recolección de datos se realizó mediante entrevistas clínicas semiestructuradas basadas en una secuencia de seis tareas que involucran la variación directamente proporcional y la lineal, las cuales fueron diseñadas previamente. Las entrevistas individuales se realizaron de manera presencial en tres sesiones, de 10 a 25 minutos cada una y fueron grabadas en audio. Se contó con material manipulable: 6 imágenes de perros y de platos, una hoja en blanco para adherir las imágenes y un marcador. Al inicio de cada entrevista, se recortó y pegó en la hoja en blanco una imagen de un perro y se explicó en qué consistía la tarea. Enseguida se pegó la segunda figura, se empezó a realizar preguntas y solo se utilizaron otras imágenes si la solución no era correcta.

En la tabla 1 se presenta el número de tarea, el tipo de variación que involucra cada tarea y ejemplos de preguntas que se realizaron a los estudiantes en las entrevistas clínicas.

Tabla 1 *Tareas y ejemplos de preguntas.*

Tipo de variación	Secuencia de tareas	Ejemplos de preguntas
$y = x$	**Tarea 1. Perros y colas**: La relación entre el número de perros y el número de colas. Modificado de Castro et al. (2017).	En un perro hay una cola, ¿cuántas colas hay en dos perros?, En tres perros, ¿cuántas colas habría? Y en nueve perros, ¿cuántas colas habría?
$y = x$	**Tarea 2. Perros y platos de comida**: La relación entre el número de perros y el número de platos de comida. Tomada de Castro et al. (2017).	Para un perro se necesita un plato de comida ¿cuántos platos se necesita para dos perros?, Para tres perros, ¿cuántos platos serían necesarios? Y para cuatro perros, ¿cuántos platos se necesitarían?
$y = 2x$	**Tarea 3. Perros y ojos**: La relación entre el número de perros y el número de ojos. Tomada de Blanton y Kaput (2004).	En un perro hay dos ojos, ¿cuántos ojos hay en dos perros?, ¿Cuántos ojos habría en tres perros? En cuatro perros, ¿cuántos ojos habría?
$y = 2x$	**Tarea 4. Perros, platos de comida y agua**: La relación entre el número de perros y el número de platos de comida y agua. Modificado de Castro et al. (2017).	Para un perro se necesita dos platos. Uno de comida y uno de agua. ¿cuántos platos se necesita para dos perros? ¿Cuántos platos son necesarios para tres perros? ¿Cuántos platos necesitarías para cuatro perros?
$y = 2x$ y $y = x$	**Tarea 5. Perros, ojos y colas**: La relación entre el número de perros y el número de ojos y colas. Tomada de Blanton y Kaput (2004).	Si en un perro hay dos ojos y una cola, ¿cuántos ojos y cuántas colas hay en dos perros?, ¿Cuántos ojos habría en tres perros y cuántas colas? Y en cuatro perros, ¿cuántos ojos y colas habría?
$y = x + 1$	**Tarea 6. Perros, platos de comida y uno de agua**: La relación entre el número de perros y el número de platos de comida y un plato de agua. A cada perro le corresponde un plato de comida y todos beben agua de un solo plato. Tomada de Castro et al. (2017).	Para un perro se necesita dos platos, uno de comida y uno de agua. Para dos perros se necesita tres platos, dos de comida y uno de agua, porque todos toman de un solo plato. Para tres perros, ¿cuántos platos serían necesarios? ¿Cuántos platos son necesarios para cuatro perros?

Elaboración basada en Castro et al. (2017)

De acuerdo con Castro et al. (2017) los niños parecen tener más dificultades con tareas que involucran la variación de tipo $y = x + b$ y $y = mx$, que las del tipo $y = x$, por tanto, se considera que esta última sería un punto de partida más apropiado para el desarrollo del pensamiento funcional. Por lo anterior, la secuencia de tareas inicia con las que involucran la variación de tipo $y = x$ (tareas 1 y 2), para luego pasar a la variación del tipo $y = mx$ (tareas 3 y 4) y finalizar con una breve mirada a la variación del tipo $y = x + b$ (tarea 6).

La tarea 1 se modificó de Castro et al. (2017). Ellos propusieron la tarea perros y collares. Fue necesario hacer la modificación a perros y colas, porque se consideró que esto permitiría a los estudiantes comprender la secuencia de tareas e ir articulando las respuestas de las primeras preguntas con las posteriores.

La tarea 3 (perros y ojos) y la tarea 5 (perros, ojos y colas) se tomaron de Blanton y Kaput (2004). Pero, se cambió el número de perros en las preguntas, ellos preguntaron por la cantidad de ojos que había en un perro, dos perros, tres perros y 100 perros. En el presente trabajo, se preguntó por tres, cuatro, cinco, seis, ocho y diez perros.

La tarea 4 se modificó de Castro et al. (2017). Ellos trabajaron con perros y dos platos de comida para cada uno. En el presente trabajo se presentó un plato de comida y uno de agua.

Finalmente, la tarea 6 se tomó de Castro et al. (2017). Cabe mencionar que ellos preguntaron solo hasta doce perros. Mencionan que los estudiantes decían no entender lo que se les estaba preguntando. A diferencia de nuestra investigación, las respuestas de los estudiantes permitieron preguntar por un número mayor de perros, inclusive se realizaron preguntas que involucraron variables.

Análisis de las entrevistas

En este trabajo se muestra las respuestas orales presentadas por los 5 estudiantes en las entrevistas de cada una de las seis tareas. Para ejemplificar y diferenciar la actividad matemática puesta en juego por cada alumno, se los etiquetó con la letra E seguido de un número del 1 al 5. La letra I se destina a la investigadora.

Las respuestas estudiantiles se agruparon en dos categorías. La categoría ***A1*** involucra el uso de figuras. En las seis tareas, los estudiantes llegan a la respuesta a través del conteo de uno en uno (uno, dos, tres, etc.). La categoría ***A2***, se refiere a las soluciones elaboradas sin usar figuras. Aquí se distinguen ocho subcategorías dependiendo de la manera de operar de los alumnos (vea la tabla 2).

Tabla 2 *Tareas, categoría A2 y subcategorías.*

Número de tareas	Subcategorías	Descripción	Estudiantes
***Tarea 1* (perros y colas) y *Tarea 2* (perros y platos de comida)**	*A2.1:* conteo de uno en uno.		E1, E2
	A2.2: sin contar de uno en uno en casos particulares	Halla la solución rápidamente para cualquier número de perros (diez, doce, quince, etc.)	E3, E4, E5
	A2.3: uso de variables.	Acepta las variables (*m, x, z*) como representes de números de perros.	E3, E4, E5
***Tarea 3* (perros y ojos)**	*A2.4*: operan haciendo grupos de dos.	Realiza grupos de dos para hallar la solución (dos, dos, dos, dos, ocho ojos).	E4, E5
	A2.5: suma el patrón al valor anterior.	Identifica que el patrón de la variable ojos es dos y lo agrega al valor previo (son diez y acá son doce).	E4, E5
***Tarea 4* (perros, platos de comida y agua)**	*A2.6:* separa la variable platos de comida y agua.	En lugar de hallar el número total de platos, da el número de platos de comida por un lado y el plato de agua por otro (cuatro platos de comida y cuatro platos de agua).	E3, E4 y E5
***Tarea 5* (perros, ojos y colas)**	*A2.7:* suman dos veces el mismo número	Reconoce que puede hallar el resultado sumando dos veces el mismo número (diez más diez son veinte).	E5
***Tarea 6* (perros, platos de comida y uno de agua)**	*A2.8:* agrega el plato con agua.	Identifica que para cualquier número de perros siempre va a haber un plato con agua.	E2, E3, E4 y E5

Nota: Quenorán, Ruiz y Nieto (2022)

A continuación, se muestra de forma detallada un ejemplo de cada una de estas ocho subcategorías. Se presentan las soluciones estudiantiles y el análisis correspondiente.

Análisis de las respuestas estudiantiles en las entrevistas de las tareas 1 y 2

A continuación, se presentan ejemplos representativos de las categorías de las respuestas orales de estudiantes de tercero de preescolar, correspondientes a las seis tareas que involucran pensamiento funcional.

Las respuestas de los alumnos E1 y E2, a la tarea 1, se ubican en la subcategoría A1.1. A la pregunta, ¿cuántas colas habría en cuatro perros?, al parecer, E1 no comprendió la pregunta, porque, después de una pausa contó de uno en uno hasta el número diecisiete. Esta dificultad fue superada con ayuda de figuras de perros. Seguidamente, se transcribe la conversación del investigador con la estudiante E1.

I: En cuatro perros, ¿cuántas colas habría?
E1: Una, dos, tres, cuatro, cinco, seis, siete, ocho, nueve, diez, once, doce, trece, catorce, quince, dieciséis, diecisiete.
I: Vamos a ver cuántas colas hay en cuatro perros (se pega una cuarta imagen).
E1: Una, dos, tres, cuatro (cuenta las colas de los perros con su dedo índice).
Ahora, en relación a la tarea 2, las respuestas de E1 y E2 se ubican en la subcategoría A2.1. Esta es la interlocución entre I y E1.
I: Y para seis perros ¿Cuántos platos necesitaríamos?
E1: Uno, dos, tres, cuatro, cinco, seis.
I: Seis qué
E1: Seis platos.
I: ¿Para siete?
E1: Uno, dos, res, cuatro, cinco, seis, siete platos

Lo anterior, indica que E1 reconoció el patrón como un proceso de conteo (uno, dos, tres, cuatro) y no como una relación general (por ejemplo, “es uno más cada vez”) (Blanton, et al. (2015)). Esta forma de operar no permite establecer la relación entre un conjunto de valores de una misma variable (colas), o la relación entre las dos variables (perros y colas). Por tanto, se puede decir que E1 y E2 no dan cuenta de emplear pensamiento funcional en las entrevistas de estas tareas.

Por otra parte, de acuerdo con las soluciones proporcionadas por los estudiantes E3, E4 y E5 se puede observar que sus respuestas se ubican en la subcategoría A2.2 y muestran evidencias de pensamiento de correspondencia. Pues, identifican la regla que les permite hallar el número de colas en la entrevista de la tarea 1 y el número de platos en la entrevista de la tarea 2, dado un número de perros. El siguiente fragmento es el diálogo entre I y E3 con respecto a la tarea 1.

I: En quinientos perros, ¿cuántas colas habría?
E3: Quinientas colas.
I: ¿Cómo sabes que son quinientas colas?
E3: Porque son quinientos perros.
I: Qué tal un millón, ¿cuántas colas habría?
E3: Un millón de colas.
I: Por qué un millón de colas.
E3: Porque es un millón de perros.

Cabe resaltar, que E3, E4 y E5 transitaron de situaciones particulares a la generalización considerando las variables m, x, y, z). Ellos no tuvieron dificultad en aceptar las letras como representantes de cantidades (Castro et al.

(2017)). De esta manera, las soluciones de estos tres estudiantes se sitúan en la subcategoría A2.3, dando evidencia de pensamiento de correspondencia. A continuación, se muestra lo antes mencionado.

I: Si tenemos m perros, ¿cuántas colas habría?
E3: ¿ m colas?
I: ¿Por qué m colas?
E3: Porque son $m$perros.
I: ¿Cuántas colas habría en x perros?
E3: x colas.

Al comparar las respuestas entre los niños del CONAFE y los niños entrevistados por Castro et al. (2017), quienes aplicaron la tarea perros y collares (tarea de tipo $y = x$), se evidenció que, en ambos casos, algunos niños (como E3, E4 y E5, niños del CONAFE) muestran evidencias de razonamiento algebraico porque no tuvieron dificultades en pasar de situaciones particulares a la generalización de variables.

Análisis de las respuestas estudiantiles en la entrevista de la tarea 3

Ahora nos enfocamos en las categorías A2.4 y A2.5, donde se ubican las producciones orales de los alumnos E4 y E5. Ellos hallaron el número de ojos, considerando hasta diez perros, se dieron cuenta que, un perro tiene dos ojos y para un número mayor de perros agregaron dos ojos por cada perro que consideraban, identificando, de esta manera, pensamiento de recurrencia.

En el fragmento dado abajo, se observa que la solución del alumno E5 se ubica en la subcategoría A2.4. Él identifica que el patrón de la variable número de ojos (en un perro) es dos. Así, al preguntarle por cuántos ojos habría en cuatro perros, él responde: "ocho". ¿Cómo lo hizo? E5 menciona que "son dos ojos, otros dos, otros dos y otros dos, son ocho". Esto indica que hizo grupos de dos y sumó de dos en dos. Aquí el diálogo sostenido con este estudiante.

I: Y en cuatro perros, ¿cuántos ojos habría?
E5: Ocho ojos.
I: ¿Cómo sabes que son ocho?
E5: Porque son dos ojos, otros dos, otros dos y otros dos son ocho.
Otra forma de contar empleada por E5 se ubica en la subcategoría A2.5. Después de preguntar por el número de ojos en diez perros, la investigadora hizo la siguiente pregunta: ¿qué tal si hubiese un perrito más?, ¿cuántos ojos más habría?, E5 respondió: "once" y luego dice "doce ojos". En su respuesta se evidencia que hizo grupos de dos llegando a diez y finalmente le agregó dos para un total de doce ojos, tal como se observa a continuación.
I: […] Aaah son diez, ¿qué tal si hubiese un perrito más?, ¿cuántos ojos más habría?
E5: Once.
I: ¿Once?
E5: Y doce ojos.
I: ¿Cómo sabes que son doce?
E5: Porque son dos, dos, dos, dos, dos, entonces son diez y acá son doce (señalando la hoja con el dedo índice como si mirara las figuras de los perros).

De esta forma se concluye, que tanto los informantes del estudio de Blanton y Kaput (2004), como dos niños del CONAFE (E4 y E5) identificaron el patrón en la variable ojos (tarea 3) y operaron a partir de ello. Este aspecto es importante, porque los estudiantes identificaron la variación en la variable ojos. Aunque, no establecieron la relación en términos de generalización, tal como: "siempre que agregamos un perro más, obtenemos dos ojos más", que fue la respuesta colectiva proporcionada por los niños en el estudio de Blanton y Kaput (2004).

Análisis de las respuestas estudiantiles en la entrevista de la tarea 4

En las respuestas proporcionadas por E3, E4 y E5 se identificó la subcategoría A2.6 y evidencias de pensamiento de correspondencia. Si bien, ellos no hallaron el total de número de platos para un determinado número de perros, sí identificaron que el número de platos de comida o el número de platos de agua es el mismo que el número de perros, lo que les permitió hallar la solución correcta al preguntar tanto por un número pequeño de perros (cuatro perros) como por un número grande (quinientos perros). Incluso, preguntas que involucran variables. Aquí, el diálogo entre la I y E5.

I: […] Y para 500 perros, ¿cuántos platos se necesitaría?
E5: Son 500 perros, 500 platos de comida y 500 platos de agua.
I: ¿en un millón de perros cuántos platos necesitaríamos?
E5: Un millón de platos de comida y un millón de platos de agua.
I: ¿Cómo sabes que son un millón de platos de comida y de agua?
E5: Porque son un millón de perros.

Cabe mencionar que, en el tipo de soluciones proporcionadas por los estudiantes en la entrevista de esta tarea, no se evidencia relación alguna con aquellas respuestas obtenidas en la investigación de Castro et al. (2017). Quizá porque, en Castro y colaboradores presentaron la tarea, perros y platos de comida, donde a cada perro le corresponde dos platos de comida y en este caso a cada perro necesita un plato de comida y uno de agua.

Análisis de las respuestas estudiantiles en la entrevista de la tarea 5

Un aspecto importante en las respuestas de los estudiantes frente a la entrevista de la tarea "perros, ojos y colas", particularmente, las producciones de E5 se relacionan con la subcategoría A2.7. A la pregunta: ¿cuántos ojos y cuántas colas hay en diez perros? El estudiante menciona que "diez colas" y "veinte ojos" y más adelante expone que "los perros tienen dos ojos y son diez, entonces son veinte ojos". Esto significa que, el estudiante suma dos veces el mismo número Castro et al. (2017). El diálogo entre I y E5, permite evidenciar el paso del empleo del *pensamiento de recurrencia* al de correspondencia.

I: […] ¿Y en 10 perros?
E5: Diez colas.
I: ¿Y cuántos ojos habría?
E5: Veinte ojos.
I: ¿Cómo sabes que son veinte ojos?
E5: Porque en diez perros son veinte ojos.
I: Pero, por qué veinte ojos.
E5: Porque los perros tienen dos ojos y son diez entonces son veinte ojos.

Al comparar las soluciones estudiantiles de esta tarea, particularmente, la expuesta por E5, "los perros tienen dos ojos y son diez entonces son veinte ojos" se relaciona con la respuesta proporcionada por los niños objeto de estudio en Castro, et al. (2017), en la tarea perros y platos de comida (dos platos de comida por cada perro). Estos autores preguntaron por ¿cuántos platos se necesita para cinco perros? Ellos señalan que un estudiante respondió que se necesitan diez platos, porque sumó cinco más cinco.

Análisis de las respuestas estudiantiles en la entrevista de la tarea 6

En este último apartado, E2, E3, E4 y E5 evidencian pensamiento de *correspondencia*. E2 halló el número de platos hasta seis perros, E3 hasta veinte, mientras que E4 y E5 reconocieron el patrón de tomar el mismo número de platos que de perros, y tuvieron en cuenta que cualquier cantidad de perros iban a beber agua del mismo plato. En el siguiente fragmento se evidencia que E2, a la pregunta ¿cuántos platos se necesita para cuatro perros?, E2 dice: “cuatro platos de comida” y a la pregunta ¿y cuántos de agua?, menciona que “uno”. Igualmente, al preguntar para seis perros, responde “seis de comida y uno de agua”, que se ubica en la subcategoría A2.8.

I: Si tuviéramos cuatro perros, ¿cuántos platos necesitaríamos?
E2: Cuatro platos de comida.
I: ¿Y cuántos de agua?
E2: Uno.
I: ¿Y si tuviéramos seis perros?
E2: Seis platos de comida y un plato de agua.

Castro et al. (2017) mencionan que en esta tarea obtuvieron poca información debido a que, muy pocos estudiantes habían identificado el patrón de tomar el mismo número de platos que de perros y agregarle el plato con agua. A diferencia de ellos, en esta investigación, hallaron la solución tanto en casos particulares como en casos que involucraron variables.

Conclusiones

Este trabajo aporta evidencias acerca de pensamiento de recurrencia y de correspondencia en cinco niños de tercero de preescolar, alumnos del subsistema educativo CONAFE, México. Los testimonios fueron recabados mediante las respuestas orales de seis tareas del tipo $y = x$ (tarea 1 y 2), $y = 2x$ (tarea 3 y 4), $y = x$ y $y = 2x$ (tarea 5) y $y = x + 1$ (tarea 6).

A diferencia de las investigaciones de Blanton y Kaput (2004) y Castro et al. (2017), el presente estudio da cuenta del pensamiento funcional de cada uno de los cinco alumnos que entrevistamos. Estos autores reportaron evidencias de pensamiento de correspondencia y covariacional en escolares de este mismo nivel educativo. Nosotros no observamos este último tipo de pensamiento en nuestros informantes.

Los participantes en el presente trabajo dan evidencias de pensamiento de recurrencia en la tarea 3, perros y ojos (de tipo $y = 2x$). Fue la tarea más difícil, porque el pensamiento operacional de nuestros informantes es aún aditivo, lo que les impide reconocer que es el doble o que pueden hallar el resultado multiplicando por dos (Castro et al. (2017)). El pensamiento de correspondencia se evidencia, en la tarea 1 (perros y colas), tarea 2 (perros y platos de comida), tarea 4 (perros, platos de comida y agua), tarea 5 (perros, ojos y colas y tarea 6 (perros, platos de comida y uno de agua). Los estudiantes identificaron la relación entre las variables involucradas, estableciendo una regla que les permitiera hallar el resultado a partir de un valor dado. En vista de lo anteriormente dicho, podemos afirmar que la secuencia de tareas presentadas es factible y se puede llevar al aula de clases para fomentar el pensamiento funcional en alumnos de preescolar.

La principal limitación del presente trabajo es la escasa bibliografía acerca del pensamiento funcional en niños de preescolar. Hasta donde sabemos, no existen reportes de producción escritas elaboradas por niños de este nivel educativo, por lo que es recomendable aplicarlas a estudiantes de los primeros grados de educación primaria y solicitar que las respuestas sean escritas, como forma de complementar el presente estudio. Si bien, entrevistamos presencialmente a nuestros informantes, ellos estuvieron en confinamiento parcial debido a la pandemia por el COVID 19. Esta variable no fue considerada en nuestro estudio, aunque la tutoría por pares, maestro-alumno, es relevante en el modelo ABCD del CONAFE. Tampoco consideramos la variable género ni la cultura propia de la comunidad de los escolares participantes. Dado que México es un país pluricultural, estas dos últimas variables pueden cambiar significativamente de una comunidad a otra.

Referencias bibliográficas

Blanton, M., & Kaput, J. (2004). Elementary grades students' capacity for functional thinking. In M. Johnsen, & A. Berit (Eds.), Proceedings of the 28th international group of the psychology of mathematics education (pp. 135–142). Bergen, Norway: Bergen University College

Blanton, M., & Kaput, J. J (2011). Functional thinking as a route into algebra in the elementary grades. In J. Cai, & E. Knuth (Eds.), Early algebraization: A global dialogue from multiple perspectives (pp. 5–23). Heidelberg, Germany: Springer.

Castro, E., Cañadas, M., & Molina, M. (2017). Pensamiento funcional mostrado por estudiantes de Educación Infantil. Educación Matemática En La Infancia, 6(2), 1–13.

Hernández, R, Fernández, C y Baptista, P (2014). Metodología de la Investigación 6°edición. México, DF: McGraw-Hill / Interamericana Editores, S.A. DE C.V. Recuperado de http://uca.ac.cr/wp-content/uploads/2017/10/Investigacion.pdf

Pinto, E. (2016). Relaciones funcionales, sistemas de representación y generalización en estudiantes de tercero de primaria (Trabajo de fin de máster). Universidad de Granada, España

Pinto, E. y Cañadas, M.C. (2017). Estructuras y generalización de estudiantes de tercero y quinto de primaria: un estudio comparativo. En J.M. Muñoz-Escolano, A. Arnal-Bailera, P. Beltrán-Pellicer, M.L. Callejo y J. Carrillo (Eds.), Investigación en Educación Matemática XXI (pp. 407-416). Zaragoza: SEIEM.

Rico, L. (2007). La competencia matemática en PISA. PNA. Revista de Investigación en Didáctica de la Matemática, 1(2), 47-66

Smith, E. (2008). Representational thinking as a framework for introducing functions in the elementary curriculum. En J. Kaput, W. Carraher y M. Blanton (Eds.), Algebra in the early grades (pp. 133-160). Nueva York, NY: Lawrence Erlbaum Associates

Stephens, A. C., Fonger, N., Strachota, S., Isler, I., Blanton, M., Knuth, E., & Murphy Gardiner, A. (2017). A Learning Progression for Elementary Students' Functional Thinking. Mathematical Thinking and Learning, 19(3), 143–166. Doi: 10.1080/10986065.2017.1328636

Warren, E., & Cooper, T. (2008). Generalising the pattern rule for visual growth patterns: Actions that support 8 year olds' thinking. *Educational Studies in Mathematics*, *67*(2), 171–185. Doi: 10.1007/s10649-007-9092-2