VOL 35, NÚMERO 1, AÑO 2022

APRENDIENDO POTENCIAS Y RESOLVIENDO ECUACIONES UTILIZANDO PAPIROFLEXIA

LEARNING POWERS AND SOLVING EQUATIONS USING ORIGAMI

Eliú Leonardo Mejía Acevedo, José Aníbal Contreras Rodríguez
Universidad Pedagógica Nacional Francisco Morazán (Honduras)
emejia@upnfm.edu.hn, joseanibal128@gmail.com

Resumen
Este escrito describe el desarrollo del taller aprendizaje de potencias y resolución de ecuaciones a través de la papiroflexia llevado a cabo en la RELME 34, con el objetivo de mostrar el proceso de aprendizaje interactivo por el que a través del doblado de papel, se pueden deducir las propiedades de las potencias con exponentes enteros y encontrar raíces reales de ecuaciones de grado dos y por medio de ellas calcular raíces cuadradas de números reales a través de relaciones geométricas generadas en el plano cartesiano. Se utilizó el método deductivo por medio de actividades que tienen como punto central el uso del papel, como técnica manipulativa para aprender matemáticas.

Palabras clave: potencia, ecuaciones, papiroflexia.

Abstract
This paper describes the development of the workshop "Learning powers and solving equations through origami" carried out at RELME 34. It aims to show the interactive learning process by which, through paper folding, the properties of powers with integer exponents can be deduced, and real roots of equations of degree two can be found; and through them, square roots of real numbers can be calculated through geometric relations generated in the Cartesian plane. The deductive method was used through activities that have the use of paper as a central point, which is a manipulative technique to learn mathematics.

Key words: power, equations, origami.

Introducción

El aprendizaje de la matemática frecuentemente se ve limitado en la educación tradicional, por la monótona adquisición de conocimientos y aprendizajes abstractos sin llevarlos a la práctica. De acuerdo a la experiencia como docentes es común utilizar o visualizar varios grupos de objetos de igual cantidad para aprender que la multiplicación es una adición de iguales sumandos, esta práctica hace que el aprendizaje del concepto de multiplicación sea más eficaz y amigable al estudiante, ya que está aprendiendo a través de la visualización o manipulación de objetos que forman parte de su entorno cotidiano. Sin embargo, algunos conceptos como la potenciación no son enseñados de la misma manera y esto provoca que sea común ver como el concepto no es asimilado apropiadamente por los educandos y suelan confundir la potenciación con la multiplicación.

Con el propósito de atender la problemática anterior, autores como Jara (2018) proponen el uso de la papiroflexia en el aula de clase argumentando que esta es una técnica japonesa del doblado de papel que ofrece amplios usos para la enseñanza de la matemática, favoreciendo el aprendizaje en sus distintas ramas, especialmente en la geometría. Además, la papiroflexia desarrolla la capacidad imaginativa y creadora al relacionar la realidad con una pieza de papel. En este sentido, en este taller se propone la papiroflexia como un recurso didáctico para la enseñanza de la potenciación y la resolución de ecuaciones de segundo grado a través de la deducción de un método geométrico que permita encontrar las raíces de dicha ecuación auxiliándose de la geometría analítica.

Se utilizó el método deductivo por medio de actividades que tienen como punto central el uso del papel como técnica manipulativa para aprender matemáticas a través de la papiroflexia, puesto que Soler y Manrique (2014) afirman que este método permite la verificación y validación de hipótesis planteadas ; en este caso los participantes ejecutaron acciones sobre la pieza de papel y registraron los datos cuantitativos y cualitativos que se derivaron de esta actividad para el análisis y comprensión del concepto de potencia, los procesos asociados a la deducción de sus propiedades y encontrar raíces de ecuaciones de grado mayor que o igual a dos.

Marco Teórico

De acuerdo con De la Torre y Prada (2008), la papiroflexia da al profesor de matemáticas una herramienta pedagógica que le permite desarrollar diferentes contenidos no solo conceptuales, sino procedimentales. Monsalve, Posada y Jaramillo (2002), con respecto al doblado de papel, mencionan que:

> Como actividad lúdica, proporciona un potencial cognoscitivo que no se puede desperdiciar cuando se la considera un simple juego agradable para pasar el tiempo. Su utilidad didáctica radica en que permite a los estudiantes, desde los primeros años escolares, acercarse en forma intuitiva a muchos conceptos matemáticos implícitos en dicha actividad lúdica. (p. 11)

Surco y Delgadillo (2018), afirma que la papiroflexia dentro del aula de clase, ayuda a construir, asimilar y comprender conocimientos geométricos de manera innovadora y práctica. Además, Blanco y Otero (2009) establecen que puede ser de gran apoyo en la educación de las matemáticas debido a que “proporciona al profesor de matemáticas una herramienta pedagógica que le permite desarrollar diferentes contenidos, no sólo conceptuales sino de procedimiento” (p. 2). En ese sentido, en este taller se mostró cómo, a través del doblado de papel, se puede enseñar lúdicamente a los estudiantes de primaria y secundaria a deducir las propiedades de las potencias con exponentes enteros, así como las leyes para la multiplicación y división.
Al momento de utilizar el doblado de papel para fines pedagógicos es importante analizar geométricamente lo que se hace al doblar el papel, es por esto que también se tuvo como objetivo aplicar la papiroflexia para encontrar raíces reales de ecuaciones de grado dos y así calcular raíces cuadradas, a través de la construcción y análisis de conceptos geométricos.

Desarrollo del Taller

Inicialmente se mostró que realizar dobleces consecutivos sobre una hoja de papel representa una multiplicación, por ejemplo, doblar una hoja dos veces y luego seguirla doblando por tres veces representa la multiplicación 2 por 3 debido a que al desdoblar la hoja está queda dividida en seis partes, determinadas por las marcas que se realizaron al doblarla. Es importante tomar en cuenta que las partes en que queda divida la hoja no deben necesariamente tener a misma área, ya que para los fines del ejercicio lo que nos interesa es la cantidad.

Así mismo, se expuso que es posible realizar divisiones de números naturales utilizando una hoja de papel. Por ejemplo, para realizar la división 12 entre 3 es necesario tener una hoja dividida en 12 partes iguales para representar el dividendo, luego para representar el divisor se dobla en tres partes iguales, como un trifolio y se observa que se obtiene una pieza de papel la cual está dividida en cuatro partes esto quiere decir que la división 12 entre 3 es igual a 4. Este proceso básico para realizar una multiplicación y una división utilizando una hoja de papel es fundamental en el transcurso del taller donde se aborda el cálculo de potencias y la deducción de leyes para la multiplicación y división de potencias de números enteros.

Para describir el concepto de potencia se trabajó con una hoja de papel en la cual se realizaron dobleces consecutivos anotando datos en una tabla. Se empezó con una hoja de papel la cual se dobló en dos partes iguales (una vez) de acuerdo con el proceso que se trabajó inicialmente sobre cómo realizar multiplicaciones utilizando una hoja de papel; proceso correspondiente a la multiplicación 2 x 1 cuyo resultado es evidenciado al desdoblar la hoja de papel y observar que aparecen dos rectángulos. Luego se volvió a tomar la misma hoja de papel y se dobló en dos partes iguales, esta vez repitiendo el proceso dos veces, lo que corresponde a la multiplicación 2 x 2, observando al desdoblar la hoja cuatro rectángulos. Después se realizó este proceso de nuevo doblando la hoja de papel en dos partes iguales repitiendo el doblado tres veces emulando la multiplicación 2 x 2 x 2, al desdoblar la hoja se puede observar que se han obtenido 8 rectángulos. Se realiza sucesivamente este proceso doblando la hoja de papel en dos partes iguales repitiendo el doblado 4 y 5 veces anotando los datos involucrados en este ejercicio, así como se muestra en la tabla 1.

Tabla 1. *Doblado de una hoja de papel en dos partes iguales con datos de los dobleces*.

Doblado de una hoja de papel en dos partes iguales			
Repeticiones	Multiplicación	Cantidad de rectángulos	
1	2 x 1 = 2	2	
2	2 x 2	4	
3	2 x 2 x 2	8	
4	2 x 2 x 2 x 2	16	
5	2 x 2 x 2 x 2 x 2	32	

Fuente: Creación propia.

En el ejercicio anterior el factor de la multiplicación es 2 y la cantidad de repeticiones en el doblado es el número qué determina cuantas veces el factor 2 se multiplica por sí mismo, es por ello que para describir el concepto de potencia se realizaron las siguientes preguntas las cuales fueron contestadas con la información que se tiene hasta ahora en la tabla 1.

Pregunta 1: ¿qué factor aparece en la columna "Multiplicación" en la tabla 1 independientemente del número de repeticiones?
Pregunta 2: ¿qué define la cantidad de factores en la columna "Multiplicación"?
En respuesta a las preguntas 1 y a la pregunta 2, es claro que el factor que aparece en la columna de las multiplicaciones es el factor 2 y que las repeticiones en el doblado del papel definen cuantas veces aparece este factor.
Luego de contestar estas preguntas se muestra el siguiente concepto de potencia.
Una potencia a^n es una forma abreviada de representar una multiplicación de factores iguales. La base (a) de la potencia es el factor que se repite y el exponente (n) indica el número de veces que se repite.
Después de observar esta definición se contestaron las siguientes preguntas planteadas en el taller.
Pregunta 3: ¿considera que las multiplicaciones de la tabla 1 se pueden expresar como una potencia?
Pregunta 4: ¿qué número representa la base? La respuesta es dos.
Pregunta 5: ¿qué número determina el exponente?

Con respecto a la pregunta 3, se afirmó que las multiplicaciones de la tabla 1 se pueden representar como una potencia dado que se ha multiplicado un número por sí mismo y cumple la definición de potencia presentada previamente. Además, respondiendo a la pregunta 4 y a la pregunta 5 respectivamente, el número 2 representa la base y la cantidad de repeticiones en el doblado de la hoja de papel determina el exponente. Después de contestar las preguntas anteriores y relacionar las multiplicaciones donde se repite el mismo factor con el concepto de potencia, los participantes trabajaron en la tabla relacionada a este ejercicio y expresaron las multiplicaciones como una potencia de acuerdo a la definición presentada anteriormente.

Tabla 2. *Doblado de una hoja de papel en dos partes iguales con la escritura de potencias con exponente positivo.*

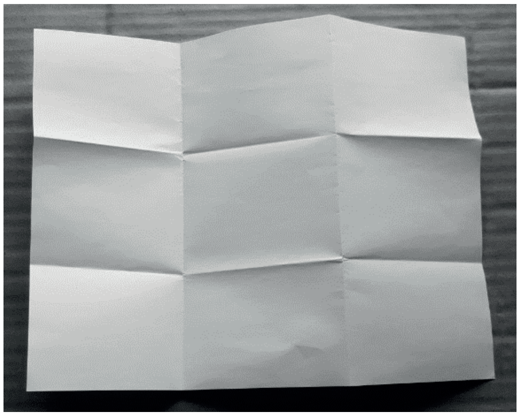
Doblado de una hoja de papel en dos partes iguales			
Repeticiones	Multiplicación	Cantidad de rectángulos	Potencia
n	$a \text{ x } a \text{ x } \ldots \text{ x } a$	m	$m = a^n$
1	2 x 1 = 2	2	$2 = 2^1$
2	2 x 2	4	$4 = 2^2$
3	2 x 2 x 2	8	$8 = 2^3$
4	2 x 2 x 2 x 2	16	$16 = 2^4$
5	2 x 2 x 2 x 2 x 2	32	$32 = 2^5$

Fuente: Creación propia.

La segunda actividad del taller consistió en un ejercicio similar a la actividad 1 donde se dobló una hoja de papel en tres partes iguales representando multiplicaciones dónde aparece el factor 3 repetidamente, las cuales se expresaron como una potencia de base 3.

Con esto se deduce que, si se busca calcular la potencia 2 elevado a la 3 en una hoja de papel, está se debe doblar en dos partes iguales repitiendo este proceso tres veces en la misma hoja. Si se pretende calcular la potencia 3 elevado a la 2 se debe doblar una hoja en 3 partes iguales repitiendo el proceso dos veces (imagen 1), por lo tanto, se concluye que para calcular cualquier potencia a elevado a un exponente n utilizando una hoja de papel es necesario doblarla en a partes iguales realizando n repeticiones.

Figura 1. *Potencia* 3^2.



Fuente: Creación propia.

Para calcular 2^0 se tiene en cuenta que el exponente 0 conlleva la instrucción de realizar cero dobleces, por lo tanto 2^0 es igual a 1 debido a que si no se realizan dobleces en la página tenemos solamente un rectángulo, la página misma, situación considerada por los participantes del taller como una manera práctica y de fácil comprensión para visualizar el cálculo de esta potencia. Seguidamente se abordó el cálculo de potencias con exponente entero negativo, para esto se analizaron los resultados de las potencias con exponente entero positivo en la tabla 2. En el doblado de papel, en cada repetición ejecutada, el exponente aumenta en una unidad y el resultado se duplica. Por otra parte, si se analiza la tabla de abajo hacia arriba, en la columna de *Potencia* se observa que, si el exponente disminuye en una unidad el resultado de la potencia disminuye a la mitad. Por ejemplo, 2^5 es igual a 32, mientras que 2^4 es igual a 16. En vista de que esto sucede con cada par de potencias consecutivas se deduce que $2^{-1} = \frac{1}{2}$ en vista de que $2^0 = 1$. Además, 2^{-2} es igual a la mitad del resultado de 2^{-1}, es decir $2^{-2} = \frac{1}{4}$.

Tabla 3. *Doblado de una hoja de papel en dos partes iguales incluyendo la escritura de potencias con exponente negativo.*

Doblado de una hoja de papel en dos partes iguales			
Repeticiones	Multiplicación	Cantidad de rectángulos	Potencia
n	$a \text{ x } a \text{ x } \dots \text{x } a$	m	$m = a^n$
-2		$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4} = 2^{-2}$
-1		$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2} = 2^{-1}$
0		1	$1 = 2^0$
1	2 x 1 = 2	2	$2 = 2^1$
2	2 x 2	4	$4 = 2^2$
3	2 x 2 x 2	8	$8 = 2^3$
4	2 x 2 x 2 x 2	16	$16 = 2^4$
5	2 x 2 x 2 x 2 x 2	32	$32 = 2^5$

Fuente: Creación propia.

Luego de observar cómo se pueden calcular multiplicaciones, divisiones y potencias utilizando una hoja de papel, se calcularon multiplicaciones y divisiones de potencias para deducir las leyes de la multiplicación y división de potencias.

Para esto se multiplicaron potencias utilizando una hoja de papel. La primera multiplicación es 2^2 por 2^3, la cual es una multiplicación con igual base y distinto exponente.

Para realizar está multiplicación se dobló una hoja en dos partes iguales dos veces seguidas para representar la primera potencia y después se continuó doblando en dos partes iguales 3 veces seguidas sobre la misma hoja para representar la segunda potencia. Al desdoblar la hoja aparecen 32 rectángulos como resultado de esta multiplicación, este número se puede expresar como la potencia 2^5, es decir qué es dos elevado a la 2^2 por 2^3 es igual a 2^5.

La segunda multiplicación de potencias con distinta base e igual exponente (2^2 por 3^2), una multiplicación. Esta multiplicación se realizó de manera similar a la primera, se dobla una hoja de papel en dos partes iguales dos veces para representar la primera potencia y luego se realizaron tres dobleces dos veces para representar la segunda potencia. Al desdoblar la hoja se observaron 36 rectángulos, este número se puede expresar como la potencia 6^2.

Las características y los productos de estás multiplicaciones se anotaron en la tabla 4 para su posterior análisis donde se dedujo que: para multiplicar potencias con igual base y distinto exponente se conserva la base y se suman los exponentes, mientras que para multiplicar potencias con distinta base e igual exponente se multiplican las bases y se conserva de exponente.

Tabla 4. *Multiplicación de potencias.*

Multiplicación	Características	Cantidad de rectángulos	Potencia
$2^2 \times 2^3$	Igual base y distinto exponente	32	2^5
$2^2 \times 3^2$	Distinta base e igual exponente	36	6^2

Fuente: Creación propia.

Para deducir las leyes de la división potencias se inició resolviendo la división 2^5 entre 2^2, la cual es una división con igual base y distinto exponente. Para resolver esta división a través del doblado de papel necesitamos una hoja de papel que represente la potencia 2^5, esto equivale a doblar la hoja de papel a la mitad cinco veces consecutivas. Al desdoblarla aparecen 32 rectángulos como resultado de la potencia y para dividir esta cantidad entre 2^2 es necesario doblar la hoja de papel a la mitad dos veces seguidas, después de realizar esto se observa que se obtienen 8 rectángulos los cuales se pueden expresar como la potencia 2^3. Asimismo se realiza la división de potencias 6^2 entre 3^2, la cual es una división de potencias con distinta base e igual exponente, obteniendo como resultado como resultado 2^2. Siguiendo el mismo proceso en el doblado de papel todos estos datos se anotan en la tabla 5 para su posterior análisis en el cual se deduce que para dividir potencias con igual base y distinto exponente se conserva la base y se restan los exponentes y que para dividir potencias con distinta base e igual exponente se dividen las bases y se conservan el exponente.

Tabla 5. *División de potencias.*

División	Características	Cantidad de rectángulos	Potencia
$2^5 \div 2^2$	Igual base y distinto exponente	8	2^3
$6^2 \div 3^2$	Distinta base e igual exponente	4	2^2

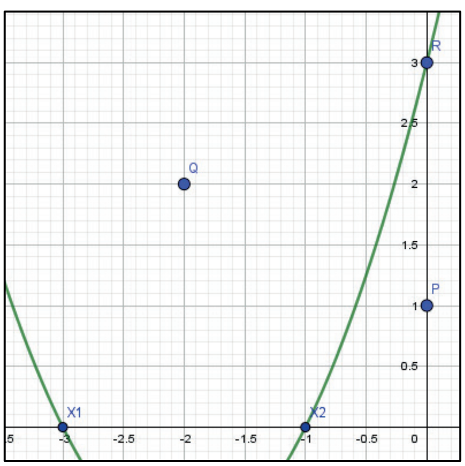
Fuente: Creación propia.

En la segunda sesión del taller se abordó el uso de la papiroflexia para resolver ecuaciones de segundo grado de la forma $\mathrm{ax}^2 + \mathrm{bx} + \mathrm{c}$, donde $\mathrm{a} = 1$, b y c pertenecen al conjunto de los números reales, en el caso de que a sea distinto de uno se debe dividir toda la ecuación entre este número para que sea igual a 1.

Dado que una función cuadrática de la forma $\mathrm{f(x)} = \mathrm{ax}^2 + \mathrm{bx} + \mathrm{c}$ describe una parábola donde los ceros de la función están determinados por el punto de intersección entre la parábola y el eje x, se propuso encontrar un método geométrico para calcular las raíces reales de una ecuación cuadrática sin necesidad de graficar la parábola,

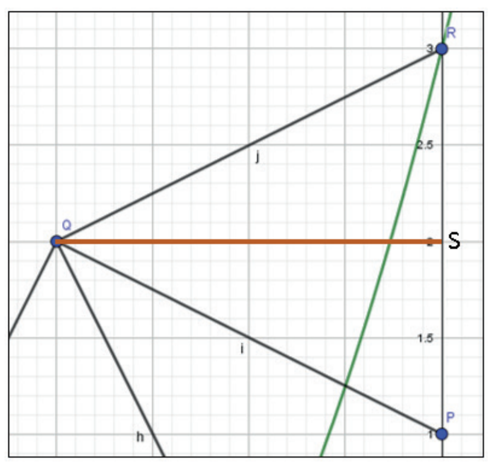
Para deducir este método se inicia buscando la coordenada del punto Q, el cual está dentro de la parábola y equidista de los ceros de la función, del punto $\mathrm{R}\ (0, \mathrm{c})$ y $\mathrm{P}\ (0, \mathrm{a})$, ilustrada en imagen 2. El punto Q y el foco de la parábola tienen la misma coordenada en x, por lo tanto, se parte de la "forma vértice" de la ecuación de la parábola, $\mathrm{y} = \mathrm{a}(\mathrm{x} - \mathrm{h})^2 + \mathrm{k}$ y se obtiene el coeficiente de la variable de grado uno es $-2\mathrm{ah}$, es decir $\mathrm{b} = -2\mathrm{ah}$. Luego, como h representa la coordenada en x del foco y del punto Q, se despeja para h y se obtiene $\mathrm{h} = \frac{-b}{2a}$.

Figura 2. *Función cuadrática.*



Fuente: Creación propia.

Figura 3. *Trazado del segmento $\overline{QS}$.*



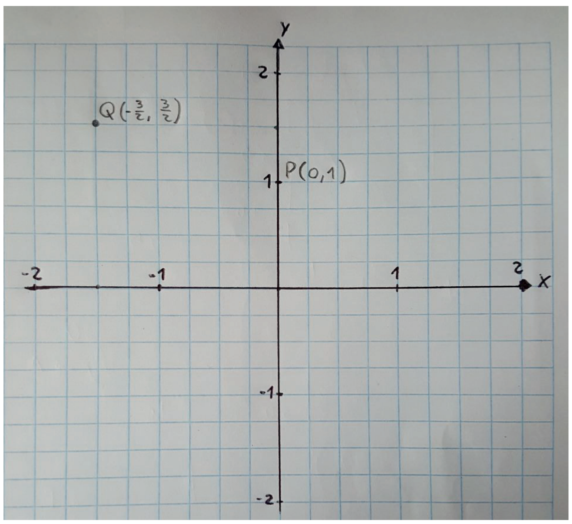
Fuente: Creación propia.

Para encontrar la coordenada en y del punto Q se demostró que $\overline{\mathrm{QS}} \perp \overline{\mathrm{RP}}$ (imagen 3), siendo S punto medio de $\overline{\mathrm{RP}}$. Teniendo en cuenta las coordenadas $\mathrm{R}\ (0, \mathrm{c})$ y $\mathrm{P}\ (0, \mathrm{a})$, por definición de punto medio la coordenada en y del punto S es igual $\frac{1}{2}(\mathrm{a} + \mathrm{c})$, que al mismo tiempo es coordenada en y de Q porque $\overline{\mathrm{QS}} \perp \overline{\mathrm{RP}}$.

Ahora que se conoce la coordenada del punto Q es posible encontrar las raíces de una ecuación de segundo grado, para esto se grafican los puntos P y Q en el plano cartesiano, luego se debe trazar una circunferencia con centro Q que pase por P y puesto que Q equidista de P y las raíces de la ecuación, los puntos de intersección entre dicha circunferencia con el eje y señalan las soluciones a la ecuación. Para lograr esto a través del doblado de papel se debe tener el punto Q de manera fija y a la vez identificar en que puntos del eje x se puede sobreponer el punto p. Con respecto a este método para encontrar las raíces de una ecuación de segundo grado, en el taller se desarrolló el siguiente ejercicio.

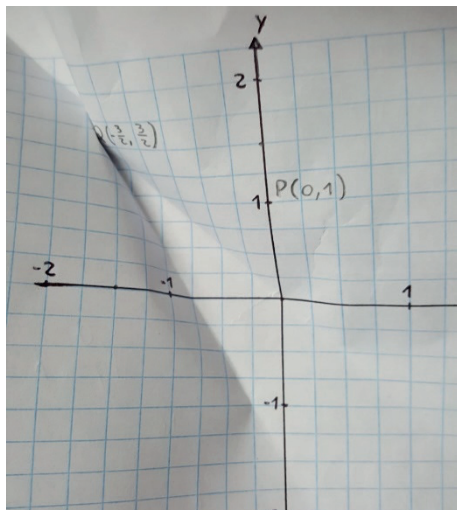
Ejercicio1 : Encontrar las raíces de la ecuación $x^2 + 3x + 2 = 0$.
Se observa que a = 1, b = 3 y c = 2. Además, se dedujo previamente que $P = (0, a)$ y $Q = \left(\frac{-b}{2a}, \frac{1}{2}(a + c)\right)$, por lo tanto $P = (0, 1)$y$Q = \left(-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right)$. Los participantes del taller representaron el plano cartesiano en papel cuadriculado y procedieron a graficar los puntos P y Q tal como se muestra en la imagen 4.

Figura 4. *Trazado de los puntos P y Q.*



Fuente: Creación propia.

Figura 5. *Fijación del punto Q.*

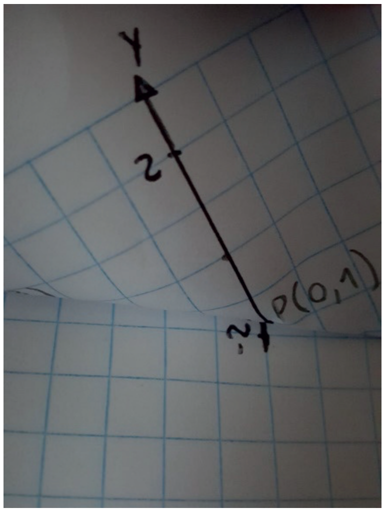


Fuente: Creación propia.

En la imagen 6 se observa que el punto Q se sostiene detrás de la página con el dedo pulgar e índice para mantenerlo en una posición fija mientras se busca ubicar el punto P en el eje x. Solo existen como máximo dos puntos en los que el punto P puede ser ubicado sin rasgar la hoja de papel, esto concuerda con el hecho de que una ecuación de segundo grado tiene un máximo de dos raíces reales diferentes.

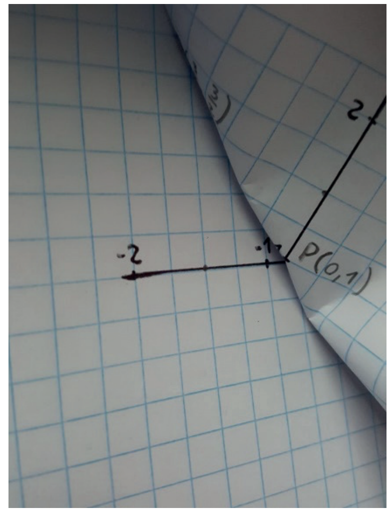
Tal como se muestra en las imágenes 6 y 7, los únicos puntos en el eje x donde se puede ubicar el punto P, cumpliendo las condiciones descritas previamente, es en $x = -2$ y $x = -1$. Estos puntos representan las soluciones que satisfacen la ecuación $x^2 + 3x + 2 = 0$.

Figura 6. *Identificación de la primera solución.*



Fuente: Creación propia.

Figura 7. *Identificación de la segunda solución.*



Fuente: Creación propia.

Este método para encontrar raíces de ecuaciones de segundo grado a través del doblado de papel también se utilizó para calcular raíces cuadradas de números reales, por ejemplo, para calcular la raíz cuadrada de 7, se plantea la ecuación de segundo grado $x^2 - 7 = 0$ donde se tiene que a $a = 1$, $b = 0$ y $c = -7$ para encontrar los puntos P y Q, ubicarlos en el plano cartesiano y realizar el doblado de papel correspondiente para encontrar los valores de x que satisfacen la ecuación.

Conclusiones

Las actividades de trabajo propuestas permitieron desarrollar de manera práctica conceptos y contenidos a través de la papiroflexia. El doblado de papel al utilizarse como una herramienta didáctica para la enseñanza de las potencias hace que su concepción sea menos abstracta y facilita su aprendizaje manipulando y visualizando patrones creados en el papel. Además, el proceso deducido y empleado para encontrar raíces reales de ecuaciones de segundo grado involucró la aplicación de conceptos geométricos y algebraicos combinados con el doblado de papel. En general, a través de la papiroflexia tal como lo manifiesta Martínez (2009), no solamente se está plegando papel, sino que además se realiza un proceso mental organizado que requiere explicitar conceptos matemáticos que van de lo simple a lo complejo y que, además, estimulan la imaginación. Por lo tanto, se convierte en una herramienta didáctica pertinente para desarrollar contenidos conceptuales y procedimentales.

Referencias bibliográficas

Blanco, C. y Otero, T. (2009). Geometría con papel (papiroflexia matemática). *La geometría y la historia de la matemática en la enseñanza secundaria*, 21.

De la Torre, H. y Prada, A. (2008). *El origami como recurso didáctico para la enseñanza de la geometría*. Recuperado de http://funes.uniandes.edu.co/992/

Jara, K. (2018). El taller de papiroflexia para desarrollar aprendizajes de fracciones en los estudiantes del quinto grado de primaria de la Institución Educativa Ceppat Rio Azul del distrito de Hermilio Valdizan, Leoncio Prado, Huánuco-2018.

Martínez, L. (2009). El razonamiento espacial y la expresión gráfica bidimensional como experiencia a través de la papiroflexia. *INVENTUM*, *4*(6), 80-86.

Monsalve, O., Posada, C., y Jaramillo, M. (2002). El placer de doblar el papel. Mostraciones y algunas aplicaciones matemáticas. *Revista Educación y Pedagogía*, *15*(35), 10-25.

Soler, M. y Manrique, V. (2014). El proceso de descubrimiento en la clase de matemáticas: los razonamientos abductivo, inductivo y deductivo. *Enseñanza de las ciencias: revista de investigación y experiencias didácticas*, *32*(2), 191-219.

Surco, I. y Delgadillo, J. (2018). *El origami como estrategia didáctica para el fortalecimiento del Proceso de Enseñanza y Aprendizaje de la geometría en estudiantes del nivel secundario. (Unidad Educativa de la Fuerza Aérea Boliviana, El Alto, 2018)* [Disertación Doctoral, Unidad Educativa de la Fuerza Aérea Boliviana]. https://repositorio.umsa.bo/handle/123456789/18788