CONSTRUCCIÓN MECÁNICA DE LA HIPÉRBOLA DESARROLLADA POR DESCARTES

MECHANICAL CONSTRUCTION OF THE HYPERBOLA DEVELOPED BY DESCARTES

Luis Miguel Paz-Corrales, Joseth David Molina, Kelvin Alonso García
Universidad Pedagógica Nacional Francisco Morazán (Honduras)
lmpaz@upnfm.edu.hn, josethdmolina@gmail.com, kelvinalonsogarciagiron@gmail.com

Resumen
Se reporta la reflexión sobre el diseño de un taller, el cual se encuentra dirigido a profesores de matemática de nivel secundario y superior, cuyo objetivo es analizar el proceso de construcción de una curva –desarrollado por Descartes– y su posible representación mediante ecuaciones algebraicas para su clasificación. Se asume como hipótesis de partida que el pensamiento variacional está inmerso en la construcción del conocimiento matemático y que, para desarrollarlo, se requiere diseñar una variedad de tareas como la que se describe en este taller. El diseño original del taller permite que los participantes elaboren y utilicen un instrumento mecánico (hiperbológrafo) para trabajar la construcción de la curva, y además se adapta este artefacto articulado utilizando software de geometría dinámica, para así comprender su funcionamiento. Finalmente, se comenta una experiencia previa de implementación de este taller y se discuten algunas implicaciones sobre la enseñanza.

Palabras clave: construcción de curvas, ecuaciones algebraicas, hiperbológrafo, pensamiento variacional

Abstract
This paper reports the reflection on the design of a workshop focused on secondary and higher education mathematics teachers. It is aimed at analyzing the process of construction of a curve –developed by Descartes– and its possible representation by means of algebraic equations for its classification. It is assumed as a starting hypothesis that variational thinking is immersed in the construction of mathematical knowledge, and to develop such knowledge, the design of a variety of tasks, as the ones described in this workshop, is required. The workshop original design allows participants to elaborate and use a mechanical instrument (hyper-bolograph) to work on the construction of a curve. Besides, this articulated artifact is adapted by using dynamic geometry software, in order to understand its functioning. Finally, a previous implementing experience of this workshop is discussed, as well as some implications on teaching.

Key words: algebraic equations, construction of curves, hyper-bolograph, variational thinking

Introducción

La noción que se tiene en la actualidad sobre la geometría analítica dista mucho de la que se tenía en el siglo XVII pues, en aquel entonces, las curvas originaban una ecuación, mientras que hoy en día, se puede obtener una curva a partir del análisis de sus propiedades algebraicas (Cortés y Soto, 2012). En el trabajo de Dyck (1892/1994) se muestran antecedentes de la utilización de artefactos articulados para el trazado de curvas, los cuales datan de la Grecia Antigua, y su evolución a lo largo de los siglos venideros. En este sentido, se ha destacado la importancia de introducir los contextos históricos para desarrollar la experiencia científica en el aula (véase Barbin et al., 2018; Mariotti et al., 1997), especialmente, en lo concerniente al trabajo con la geometría.

A partir de lo antes planteado, se diseña este taller dirigido a profesores de matemática que se desempeñen en los niveles de educación secundaria y superior (con estudiantes desde los 15 años de edad en adelante), cuya importancia radica en que los participantes analicen el proceso de construcción de una curva –desarrollado por Descartes– y su posible representación mediante ecuaciones algebraicas.

La estructura de este escrito es la siguiente: después de esta introducción, se presenta el fundamento teórico sobre el que se cimenta esta propuesta; luego, se describe la estructura del taller y se explicita el uso del instrumento mecánico hiperbológrafo; finalmente, se comenta una experiencia previa de implementación de esta propuesta con profesores de matemáticas de Honduras, además de reflexionar sobre sus implicancias en la enseñanza.

Fundamento teórico

La Matemática como disciplina científica, al ser tan antigua como el Hombre mismo, ha despertado no sólo el interés de matemáticos sino también de matemáticos educativos. Para estos últimos, el interés se centra en cuestionamientos como, por ejemplo, ¿por qué cae la manzana?, aludiendo a la comprensión de cómo Isaac Newton planteó las tres leyes que llevan su nombre o la formulación de la ley de gravitación universal; o también, ¿por qué Descartes siguió llamando Geometría a un quehacer que dista mucho del que los geómetras griegos, como Apolonio o Euclides, llevaban a cabo en su tiempo?

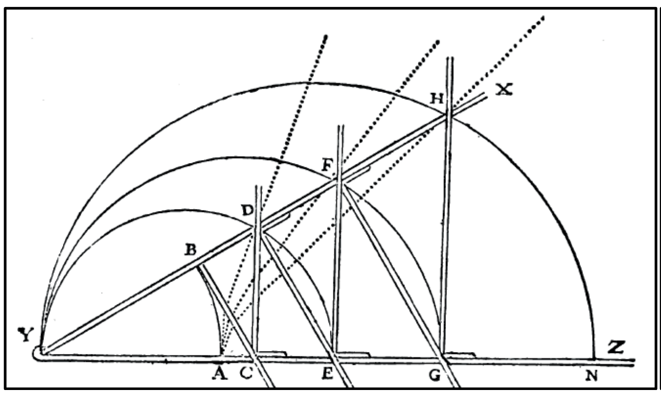
Para este taller se adopta como referente la Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa (TSME; Cantoral, 2013), ello justificado en que este enfoque teórico permite un acercamiento a la comprensión histórico-epistemológica de fenómenos propios de la disciplina, como los cuestionamientos antes planteados. En la TSME se asume como punto de partida la problematización del saber, el cual requiere del análisis, tanto de obras originales sobre un conocimiento matemático en particular, como de libros de texto, para así comparar los usos de dicho conocimiento (Cantoral, Montiel y Reyes-Gasperini, 2015). Esta teoría, además, postula que el discurso Matemático Escolar (dME) es la noción en que radica la esencia de la problemática de la enseñanza-aprendizaje de la matemática, entendido como el conjunto de discursos estructurados que se producen por convencionalismos sociales y culturales, los cuales surgen ante la necesidad de comunicar y difundir de manera masiva los saberes matemáticos (Cantoral, Farfán, Lezama y Martínez-Sierra, 2006).

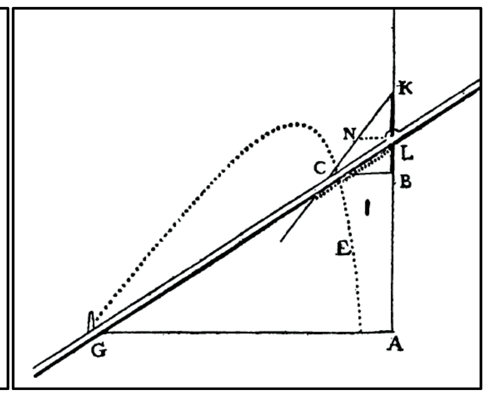
Estudios que han adoptado este enfoque (véase Galo-Alvarenga, 2019; Paz-Corrales, 2019; Pérez-García, 2019, entre otros), han centrado su atención en los fenómenos específicos relacionados, por un lado, con la construcción del conocimiento matemático y, por otro, con su difusión. Es por ello que han confrontado un libro de texto con una obra matemática original, tomando en cuenta su contexto de producción.

Este taller se cimenta sobre el estudio de Paz-Corrales (2019), en el cual se analizó la obra matemática La Geometría de Descartes (1637/1954) y se sobrepuso con una expresión del dME en el texto Geometría Analítica de Lehmann (1942/2005). El primero, que corresponde a uno de los tres tratados que conforman el Discurso del Método, es considerado como una de las obras culminantes del saber humano, además de la iniciadora de la matemática moderna (González-Urbaneja, 2007); el segundo, por su parte, es un libro muy utilizado en el sistema educativo mexicano, desde el siglo pasado hasta la actualidad (Serna-Martínez, 2015).

De acuerdo con este estudio, el interés de Descartes en su obra se centra principalmente en responder a la pregunta ¿cuál es el lugar geométrico que satisface una condición específica? Al dar respuesta a esta interrogante, no sólo permitió a su autor resolver de manera general el problema de Pappus, considerado como piedra angular del método cartesiano, sino que también expandir la geometría más allá de los límites tridimensionales a los que estuvo restringida por más de 20 siglos. De este modo, expresiones como x^2 o x^3 ya no representan áreas o volúmenes, sino que simplemente son longitudes de segmentos, por lo que, para el estudio y clasificación de nuevas curvas (hasta entonces, desconocidas por los geómetras griegos), el matemático francés utilizó artefactos mecánicos capaces de trazarlas, en particular, el mesolabio y el hiperbológrafo, presentados en la Figura 1. La generación de curvas se produce a partir de las trayectorias de estos mecanismos articulados, por medio de continuos movimientos mecánicos, en un método conocido como generación orgánica de curvas (Manzano, 2016).

Figura 1. Mesolabio (izquierda) e hiperbológrafo (derecha) de Descartes





Fuente: Extraído desde Descartes (1637/1954, pp. 46, 53)

Descartes no sólo leyó la obra de matemáticos como Euclides o Apolonio, sino también de Pappus, con lo que pudo darse cuenta que sus colegas consideraron tres tipos de problemas tomando como base la construcción utilizada en su solución, a saber, planas (construcciones con regla y compás), sólidas (secciones cónicas y medias proporcionales). Hasta ahora se han mencionado dos tipos de problemas, pero ¿qué tiene de particular el tercero? Resulta que los problemas que requerían de algún ingenio mecánico simplemente fueron excluidos de la geometría de ese entonces. Lo anterior sirvió de punto de partida para Descartes, quien se propuso crear una geometría que incluyera todas esas curvas o lugares geométricos generados a través de artefactos mecánicos, es decir, instrumentos elaborados con barras articuladas mediante pivotes. Ello significó otro de sus grandes hallazgos, pues permitió a la matemática moderna definir una infinidad de curvas hasta el siglo XVII no conocidas, a las que clasificó, pero no demostró como algebraicas.

El interés principal de Descartes no estaba en las propiedades estáticas de estos artefactos, sino que en aquéllas que se derivan de sus movimientos y dinámica (Paz-Corrales, 2019). Este escrito se centra en el segundo artefacto mecánico descrito por este matemático en La Geometría, a saber, el hiperbológrafo. Si bien este instrumento fue ideado originalmente para generar hipérbolas, como lo sugiere su nombre, su papel como compás le permite crear otro tipo de curvas. La pregunta con la que Descartes utilizó este artefacto tiene una intención predictiva: ¿de qué género es la curva? Una regla (que gira circularmente) y una pieza triangular (que se desliza verticalmente en una recta fija), al intersecarse, producen la curva. El funcionamiento de este artefacto se explica en el siguiente apartado, de acuerdo con el contexto de este taller.

Descripción del taller y diseños didácticos

El taller que se reporta en este escrito corresponde a la adaptación de una experiencia previamente implementada, la cual se describe en el apartado siguiente y que, por razones de trabajo virtual, se ha reestructurado de la forma en que se presenta en la Tabla 1.

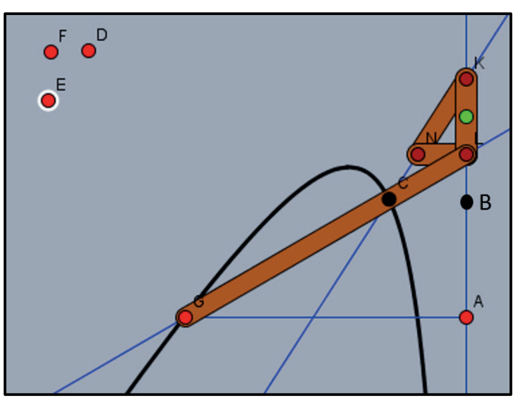
Tabla 1. Descripción de las actividades del taller por sesiones

Sesión	Actividades	Tiempo
Primera	– Presentación del taller, de sus objetivos y dinámica de trabajo.	10 minutos
	– Presentación de un video sobre la construcción del hiperbológrafo con material concreto.	10 minutos
	– Construcción de curvas con un applet (software de geometría dinámica *Cinderella*) y su análisis.	70 minutos
Segunda	– Se continúa la construcción y análisis de curvas.	40 minutos
	– Reflexión sobre la actividad y su aplicabilidad en el aula; preguntas de los participantes.	40 minutos
	– Cierre del taller.	10 minutos

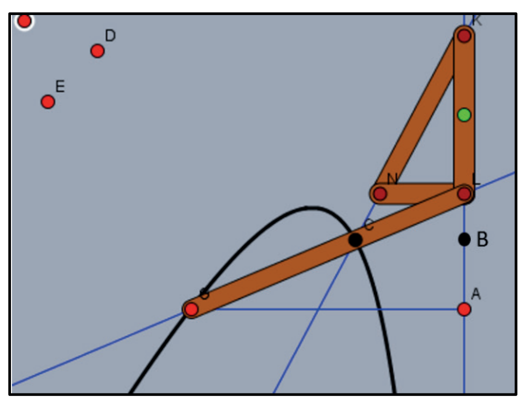
Fuente: Elaboración propia

En su diseño original, la segunda actividad del taller consistía en la construcción del hiperbológrafo por parte de los participantes, utilizando material concreto y siendo guiados por los autores. No obstante, dadas las condiciones de formato online del taller, es que se ha reemplazado esa actividad por un video en que los autores construyen y explican el funcionamiento de dicho artefacto. Además, para observar la variación del problema que se muestra en la Figura 1 (derecha), es que como tercera actividad del taller se ha realizado la construcción del artefacto con el software de geometría dinámica Cinderella, en un procedimiento en que se observan cuatro estados, tal como se representan en la Figura 2.

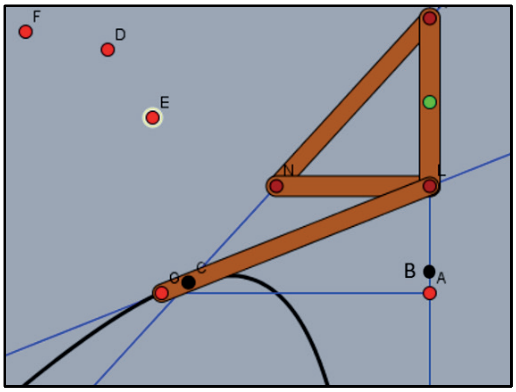
Figura 1. Estados de construcción del hiperbológrafo con el software gráfico Cinderella



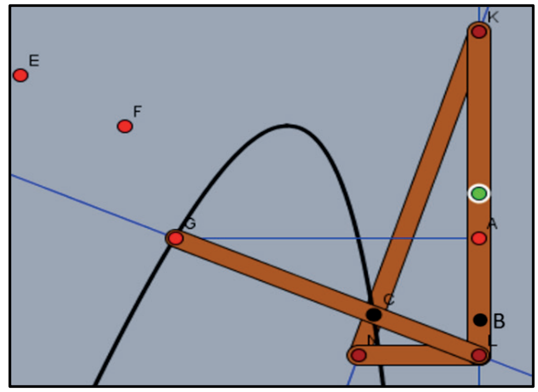
Estado 1



Estado 2



Estado 3



Estado 4

Fuente: Elaborado por los autores

El funcionamiento del applet del hiperbológrafo está determinado de la siguiente forma:

Sea la curva GC (Figura 2, todos los estados) descrita por la intersección de la regla GL con la figura rectilínea CNKL, cuyo lado KN es generado indefinidamente en dirección a C, y que, siendo movida en el mismo plano de manera que su diámetro KL siempre coincida con alguna parte de la línea AB (producida en ambas direcciones), proporciona a la regla GL un movimiento giratorio alrededor de G (la regla está unida a la figura CNKL en L). En esta construcción, Descartes utilizó las primeras letras del alfabeto para referirse a las cantidades (constantes) conocidas, y las últimas para las desconocidas (variables o cantidades indeterminadas), de modo que

$$GA = a, \quad KL = b, \quad NL = c, \quad AB = x, \quad BC = y,$$

respectivamente.

Al moverse la pieza CNKL (Figura 2), se observan cuatro estados de sus diferentes puntos durante el movimiento en el artefacto. Además de las relaciones de semejanza, que se encuentran invariantes en la construcción, al describir expresiones que representan las relaciones entre los segmentos (los triángulos KLN y KBC son semejantes; Figura 2, estados 1 y 4); a simple vista, se observa al punto A que también permanece fijo en los cuatro estados (de manera similar, sucede en el llamado punto origen en el plano cartesiano que se enseña en la escuela). Lo anterior permite notar cómo el resto de los puntos se mueven y, a medida que se cortan la pieza triangular y la regla GL, van generando la curva GC (Figura 2, estados 2 y 3). Ahora bien, ya se ha dicho que no sólo hipérbolas podrían ser trazadas con este instrumento, tal es el caso, si el instrumento que sirve para trazarlas, en lugar de la línea recta CNK, se utiliza esta hipérbola obtenida (véase la curva en la Figura 1), o alguna otra línea curva de primer género, para limitar la pieza CNKL, la intersección de esta línea borde y de la regla GL describirá, en vez de la hipérbola GC, otra línea curva que será de segundo género. Por ejemplo,

> si CNK es un círculo, donde L sea su centro, se describirá la primera concoide de los antiguos. Pero si fuese una de segundo género la que limita la pieza CNKL, se obtendría una de tercer género, o si fuese una de tercero, resultaría una de cuarto, y así al infinito. (Descartes, 1637/1954, p. 54, traducción de los autores)

Para el desarrollo de este taller, se toma en cuenta la pluralidad de contextos educativos de los participantes, por lo cual son los expositores quienes introducen los elementos constitutivos, tanto en la construcción del hiperbológrafo como en la utilización del applet de Cinderella. De este modo, se espera que los participantes, basados en el procedimiento antes descrito, desarrollen la construcción de las curvas con el applet.

La segunda sesión del taller continúa con la dinámica de la primera, aunque se deja a los participantes que desarrollen las construcciones que consideren pertinentes, para luego dar paso a una etapa de reflexión sobre las implicaciones de desarrollar este tipo de actividades en el aula, según los contextos educativos de los participantes.

Experiencias de implementación

A partir de la propuesta de Paz-Corrales (2019) que se mencionó en el apartado Fundamento teórico, es que se diseñó un taller implementado en el Séptimo Congreso de Matemática Educativa (COME VII) del año 2018, celebrado en Tegucigalpa (Honduras). Este evento, que reúne a profesores de matemáticas de todos los niveles educativos (desde prebásica hasta superior), surgió como un espacio de capacitación docente en torno a diversas temáticas de la disciplina. En dicha oportunidad, se intervino con un grupo de 30 profesores de los niveles de educación media y superior, quienes trabajan con estudiantes de 15 años en adelante.

Al comienzo del taller, los profesores recibieron las indicaciones generales y el material a utilizar para el desarrollo del mismo (véase Figura 3, izquierda). Inicialmente, se presentó un recorrido histórico a los participantes sobre la obra matemática de Descartes, con el fin de reflexionar sobre el quehacer geométrico-analítico mostrado, y servir de motivación para la audiencia. Dentro de las intervenciones de los profesores, hubo un comentario que imperó en relación a lo que se enseña en el sistema educativo: No enseñamos geometría analítica de esta forma. Por ejemplo, Descartes llegaba a la ecuación de otra forma, al usar la semejanza de triángulos, y tampoco usaba –de forma explícita– las coordenadas (x,y) de un punto.

Posteriormente, con el material concreto y organizados en equipos de cinco integrantes, procedieron a construir el hiperbológrafo, guiándose por una imagen mostrada en la presentación (véase Figura 1, derecha). Las reglas articuladas y los tornillos fueron emulados por rectángulos de cartoncillo y ataches, respectivamente. Durante este proceso, se observó a los profesores muy entusiasmados (véase Figura 3, derecha), dado que esta situación los llevó a aprender matemática, haciendo matemática. Sobre el pliego de papel que se entregó a cada grupo, comenzaron a trazar la curva o lugar geométrico generado por este artefacto, lo cual les resultó sencillo, pues éste era un símil a un compás, con la diferencia que, en lugar de las circunferencias, trazaba hipérbolas. Se pidió a los participantes del taller que observaran las curvas obtenidas con este procedimiento, e inmediatamente se percataron que todas eran hipérbolas, con pequeñas diferencias en su trazo, determinadas por la longitud que decidieron dar al segmento NL (véase Figura 2, estados 3 o 4).

A continuación, se indujo a los participantes al funcionamiento del artefacto, a través de cuestionamientos del tipo ¿cómo funciona?, ¿por qué funciona de esta manera? Para responderlas, se partió de los datos que Descartes estableció sobre esta construcción, asignando valores a la longitud de los segmentos conocidos y desconocidos. Fue casi inmediato que los profesores notaron la relación de semejanza entre al menos dos de los triángulos en el hiperbológrafo. La mayoría de equipos llegó a la ecuación de la hipérbola, salvo por dos equipos que requirieron del apoyo de uno de los instructores del taller. Finalmente, los profesores mencionaron con mucho agrado que realizarían esta actividad con sus estudiantes porque, además de considerar que el material para la elaboración del artefacto es accesible, produciría en los jóvenes aprendizajes más significativos sobre el tema de las secciones cónicas.

Figura 3. Taller implementado en el COME VII

Fuente: Archivo del autor

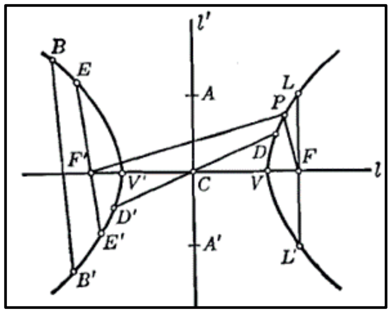
Consideraciones finales

La Geometría significó un hito en la evolución del pensamiento matemático. En primer lugar, porque Descartes liberó a la geometría (sintética) de la denominada, por algunos historiadores de la matemática, cárcel tridimensional (González-Urbaneja, 2007); segundo, por el análisis (álgebra) que añadió a esta geometría. Sobre este último punto, si bien se ha asumido que este análisis tuvo sus orígenes en el trabajo realizado por Viète y Fermat, no existe evidencia que vincule a Descartes con el tipo de sintaxis utilizada por ellos (Rabouin, 2010). El uso de letras para representar longitudes de segmentos conocidos y desconocidos, fue uno de los grandes aciertos de Descartes que, además de económico, simplificó los procesos al momento de resolver un problema y que, por supuesto, no esconde los artificios matemáticos llevados a cabo en su resolución que tanto criticó a los griegos. De este modo, “el álgebra simbólica, constituye una verdadera ruptura epistemológica en la forma de concebir los objetos matemáticos” (Paz-Corrales, 2019, p. 52).

En ese sentido, a estas alturas sería incorrecto afirmar que el matemático francés usó la notación moderna, pues más bien, la notación que imperó y que sigue vigente, es la cartesiana, salvo por el uso del signo igual y de llaves que se observa en las ecuaciones planteadas en la obra matemática. La escuela hoy día, para la enseñanza de la geometría analítica, parte de la ecuación y luego se construye una tablita de valores de puntos discretos que se grafican en el plano, hasta que finalmente se bosqueja una curva suave y ligera. Pero, ¿qué hay del quehacer geométrico expuesto por Descartes en La Geometría? Y es que, sin sumergirse tanto en su lectura, no hay en esta obra gráfica alguna de una ecuación. El tratamiento que se dio a las curvas es atípico desde el punto de vista didáctico, puesto que éstas eran construidas por acciones geométricas, en su mayoría, generadas a través de mecanismos articulados. Una vez trazadas las curvas, se disponía a introducir un sistema de coordenadas, con el único afán de describir su proceso de construcción y, de esta manera, obtener su expresión analítica. Así queda suficientemente claro que, en su proceso constitutivo, las ecuaciones no creaban las curvas, sino que éstas generaban ecuaciones. (Lenoir, 1979). En resumen, en la obra matemática que Descartes publicó de manera anónima en 1637, no se habla de construcciones estáticas de las curvas, mucho menos de demostraciones axiomáticas, sino que de todo tipo de movimientos mecánicos (trayectorias producidas por movimientos continuos) y su representación mediante ecuaciones de los lugares geométricos (otro análisis en profundidad sobre la representación de curvas, se encuentra en Bos, 1981).

Por su parte, en la enseñanza de las secciones cónicas en la escuela, y en particular de la hipérbola (véase Figura 4), se les define como "el lugar geométrico de un punto que se mueve en un plano de tal manera que el valor absoluto de la diferencia de sus distancias a dos puntos fijos del plano llamados focos, es siempre igual a una cantidad constante" (Lehmann, 1942/2005, p. 191). Y esta definición coincide con la forma en que Paz-Corrales y Cantoral (2019) definen a la variación en geometría analítica, con un punto móvil en el sujeto a ciertas propiedades.

Figura 4. Gráfica de la hipérbola



Fuente: Extraido desde Lehmann (1942/2005, p. 191)

Su transposición didáctica también influyó que en los textos escolares sólo se enseñaran hipérbolas horizontales y verticales, y aunque la definición resalta las propiedades mencionadas, su abordaje en los libros de texto favorece más un escenario algebraico que gráfico, que de acuerdo con Lehmann (1942/2005), es el segundo problema fundamental de la geometría analítica (trabajo que caracterizó el quehacer de Fermat).

A través de la actividad propuesta en este taller, se pretenden al menos dos alcances: por una parte, demostrar lo valioso que puede resultar la enseñanza de la matemática utilizando procedimientos del pasado, para comprender sus orígenes, y así desvelar de todo lo que se le ha despojado como paso previo a su llegada a la escuela; por otra, hacer esta construcción de los artefactos mecánicos, lo que permite entender su funcionamiento por los propiedades invariantes que éstos conservan (véase, Bartolini Bussi, 2005).

Sobre lo anterior, y tal como se esbozó al comienzo de este escrito, existen diversos estudios en que se valoran la inclusión de los contextos históricos en la enseñanza de la matemática, con autores destacados como María Bartolini Bussi y colaboradores (Bartolini Bussi y Mariotti, 1999; Bartolini Bussi y Pergola, 1994, 1996), entre otros. Los trabajos de esta autora han tenido como centro de atención la entrada de la historia de la matemática en el aula, a través de la utilización de instrumentos y otros artefactos (Bartolini Bussi, 2000) para contribuir, sobre todo, al aprendizaje de la geometría. Bartolini (1993) desarrolló un trabajo con estudiantes de 11º grado, en que se introducen el razonamiento geométrico y la perspectiva histórica para enmarcar el trabajo con las denominadas máquinas matemáticas. Siguiendo esta línea de investigación, Bartolini Bussi (1998) plantea como tesis que, a través de la exploración, con tareas idóneas y bajo la guía del profesor, el establecimiento de vínculos y la utilización de instrumentos de dibujo, "los estudiantes de secundaria y universitarios pueden revivir la elaboración de teorías en un caso paradigmático de la fenomenología histórica de la geometría" (p. 735).

Agradecimientos

Este documento contó con la colaboración desinteresada del Dr.(c) Carlos Ledezma.

Referencias Bibliográficas

Barbin, É., Guichard, J.-P., Moyon, M. Guyot, P., Morice-Singh, C., Métin, F. ... Hamon, G. (2018). *Let History into the Mathematics Classroom*. Cham, Suiza: Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-57150-8

Bartolini Bussi, M. G. (1993). Geometrical proofs and mathematical machines – An exploratory study. En I. Hirabayashi, N. Nohda, K. Shigematsu y F.-L. Lin (Eds.), *Proceedings of the 17th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 2, pp. 97-104). Tsukuba, Japón: PME.

Bartolini Bussi, M. G. (1998). Drawing instruments: Theories and practices from history to didactics. *Documenta Mathematica – Extra Volume ICM 1998, 3*, 735-746.

Bartolini Bussi, M. G. (2000). Ancient instruments in the modern classroom. En J. Fauvel y J. van Maanen (Eds.), *History in Mathematics Education: The ICMI Study* (pp. 343-350). Dordrecht, Países Bajos: Springer. https://doi.org/10.1007/0-306-47220-1_10

Bartolini Bussi, M. G. (2005). The meaning of conics: Historical and didactical dimensions. En J. Kilpatrick, C. Hoyles y O. Skovsmose (Eds.), *Meaning in Mathematics Education* (pp. 39-60). Nueva York, NY: Springer. https://doi.org/10.1007/0-387-24040-3_4

Bartolini Bussi, M. G. y Mariotti, M. A. (1999). Instruments for perspective drawing: Historic, epistemological and didactic issues. En G. Goldschmidt, W. Porter y M. Ozkar (Eds.), *Proceedings of the 4th International Design Thinking Research Symposium on Design Representation* (Vol. 3, pp. 175-185). Cambridge, MA: Massachusetts Institute of Technology & Technion – Israel Institute of Technology.

Bartolini Bussi, M. G. y Pergola, M. (1994). Mathematical machines in the classroom: The history of conic sections. En N Malara y L. Rico (Eds.), *Proceedings of the First Italian-Spanish Research Symposium in Mathematics Education* (pp. 233-240). Moderna, Italia: Dipartimento di Matematica, Università di Modena.

Bartolini Bussi, M. G. y Pergola, M. (1996). History in the mathematics classroom: Linkagesand kinematic geometry. En H. N. Jahnke, N. Knoche y M. Otte (Eds.), *Geschichte der Mathematik in der Lehre* (pp. 39-67). Gotinga, Alemania: Vandenhoeck & Ruprecht.

Bos, H. J. M. (1981). On the representation of curves in Descartes' Géométrie. *Archive for History of Exact Sciences, 24*(4), 295-338. https://doi.org/10.1007/bf00357312

Cantoral, R. (2013). *Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa. Estudios sobre construcción social del conocimiento*. Barcelona, España: Gedisa.

Cantoral, R., Farfán, R. M., Lezama, J. y Martínez-Sierra, G. (2006). Socioepistemología y representación: algunos ejemplos. *RELIME: Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 9*(Número especial), 83-102.

Cantoral, R., Montiel, G. y Reyes-Gasperini, D. (2015). Análisis del discurso matemático escolar en los libros de texto, una mirada desde la Teoría Socioepistemológica. *Avances de Investigación en Educación Matemática, 8*, 9-28.

Cortés, J. C. y Soto, H. A. (2012). Uso de artefactos concretos en actividades de geometría analítica: una experiencia con la elipse. *REDIMAT: Journal of Research in Mathematics Education, 1*(2), 159-193. https://doi.org/10.4471/redimat.2012.09

Descartes, R. (1954). *The Geometry of René Descartes* (D. E. Smith y M. L. Latham, Trads.). Nueva York, NY: Dover Publications. (Trabajo original publicado en 1637)

Dyck, W. (1994), *Katalog mathematischer und mathematisch-physikalischer Modelle, Apparate und Instrumente*. Hildesheim, Alemania: Georg Olms Verlag. (Trabajo original publicado en 1892)

Galo-Alvarenga, S. (2019). *El estudio del cambio en Geometría Euclidiana* (Tesis de maestría no publicada). Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional, Ciudad de México.

González-Urbaneja, P. (2007). Raíces históricas y trascendencia de la geometría analítica. *SIGMA – Revista de Matemáticas, 30*, 205-236.

Lehmann, C. H. (2005). *Geometría Analítica* (R. G. Díaz, Trad.). Ciudad de México: Limusa. (Trabajo original publicado en 1942)

Lenoir, T. (1979). Descartes and the geometrization of thought. The methodological background of Descartes' géométrie. *Historia Mathematica, 6*(4), 355-379. https://doi.org/10.1016/0315-0860(79)90023-5

Manzano, F. (2016). Conicógrafos del siglo XVII para la educación matemática del siglo XXI. *TRIM: Revista de Investigación Multidisciplinar, 10*, 47-60.

Mariotti, M. A., Bartolini Bussi, M. G., Boero, P., Ferri, F. y Garutti, R. (1997). Approaching geometry theorems in contexts: From history and epistemology to cognition. En E. Pehkonen (Ed.), *Proceedings of the 21st Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 1, pp. 180-195). Lahti, Finlandia: PME.

Paz-Corrales, L. M. (2019). *Ideas variacionales en La Geometría de Descartes y en el texto Geometría Analítica de Lehmann* (Tesis de maestría no publicada). Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional, Ciudad de México.

Paz-Corrales, L. M. y Cantoral, R. (2019). Estudio socioepistemológico sobre la confrontación entre La Geometría de Descartes y la Geometría Analítica. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa, 32*(2), 394-403.

Pérez-García, R. (2019). *Estudio sobre el papel de la confrontación en el tratamiento de la física clásica de Newton al discurso Matemático Escolar* (Tesis de maestría no publicada). Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional, Ciudad de México.

Rabouin, D. (2010). What Descartes knew of mathematics in 1628. *Historia Mathematica, 37*(10), 428-459. https://doi.org/10.1016/j.hm.2010.04.002

Serna-Martínez, L. A. (2015). *Estudio socioepistemológico de la tangente como objeto escolar* (Tesis doctoral no publicada). Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada del Instituto Politécnico Nacional, Legaria, México.