VOL 35, NÚMERO 1, AÑO 2022

ANÁLISIS GEOMÉTRICO Y ANALÍTICO DE LA PARÁBOLA MEDIANTE EL USO DE MECANISMOS ARTICULADOS PARA EL TRAZADO DE CURVAS

ANALYTICAL AND GEOMETRIC ANALYSIS OF THE PARABOLA BY USING ARTICULATED MECHANISMS FOR DRAWING CURVES

Samuel Moreno Mazón, Manuel Alfredo Urrea Bernal
Universidad de Sonora (México)
samuelmoreno514@gmial.com, manuel.urrea@unison.mx

Resumen
Se presenta una propuesta de enseñanza a partir del uso de mecanismos articulados para el trazado de curvas, fundamentada en algunos elementos del marco teórico Espacios de Trabajo Matemático. Se promueve el análisis geométrico y analítico de la parábola, comenzando con el análisis de las condiciones geométricas necesarias para el trazado de la curva, y posteriormente, la construcción de una representación algebraica de la parábola a partir del análisis del mecanismo articulado, generando relaciones bidireccionales entre representaciones. Se presenta el diseño de una actividad, así como el análisis y conclusiones preliminares a partir del trabajo matemático generado por los estudiantes.

Palabras clave: geometría analítica, mecanismos articulados, parábola

Abstract
This paper presents a teaching proposal from the use of articulated mechanisms for drawing curves, based on some elements of the theoretical framework of Mathematical Work Spaces. The analytical and geometric analysis of the parabola is promoted, starting with the analysis of the geometric conditions necessary for drawing the curve; and later, the construction of an algebraic representation of the parabola from the analysis of the articulated mechanism, generating bidirectional relationships between representations. The design of an activity is presented, as well as the analysis and preliminary conclusions from the mathematical work generated by the students.

Key words: analytical geometry, articulated mechanisms, parabola

Descripción de la problemática

En el curso de geometría analítica en el bachillerato, específicamente en el tema de los lugares geométricos, se observa una tendencia de enseñanza que prioriza los desarrollos algebraicos sobre los geométricos. Al darle prioridad a los procesos algebraicos durante la enseñanza de los lugares geométricos, se promueve sobre todo la automatización de procedimientos y la memorización de ecuaciones algebraicas, dejando de lado las propiedades geométricas que dan origen al trazado del lugar geométrico (Villarreal, Carmona, y Arango, 2013). Debido al énfasis que se da a los tratamientos algebraicos, a los estudiantes se les dificulta interpretar geométricamente los resultados que obtienen por métodos algebraicos.

Otro factor que dificulta la interpretación geométrica de resultados algebraicos es la poca importancia que se ha dado a la representación gráfica en los cursos de geometría analítica. De acuerdo con Arellano y Oktaç (2009), las representaciones gráficas se usan sólo para ejemplificar algunas características, pero no se aprovecha la riqueza de las propiedades y conceptos geométricos involucrados en la construcción del trazo (Gómez y Carulla, 1999).

Al respecto, Duval (1998) pone de relieve la importancia de la articulación de diferentes representaciones de un mismo objeto matemático, señalando que, entre mayor sean las relaciones entre las representaciones, mayor será la comprensión que se tenga del objeto matemático con el que se trabaje. Debido a que comúnmente el trabajo con la parábola y demás lugares geométricos se centra en la representación algebraica, a los estudiantes se les dificulta identificar relaciones con la representación gráfica, así como trabajar a partir de ésta para obtener la algebraica (Gómez y Carulla, 1999).

Buscando atender parte de esta problemática, algunos autores han recurrido al uso de mecanismos articulados para el trazado de curvas (MATC). Un MATC es un sistema mecánico compuesto por barras rígidas unidas mediante articulaciones móviles que permiten transformar el movimiento, que al tener fija una o varias articulaciones y/o una o varias barras al plano, trazan un locus, es decir, un lugar geométrico que retoma las características geométricas del MATC (Manzano, 2017). Diferentes trabajos muestran que el uso de MATC es viable para la enseñanza de los lugares geométricos, ya que permite visualizar de manera directa las condiciones geométricas necesarias para el trazado de la cónica con la que se trabaje (Dennis y Confrey, 1997 Cortés y Sóto Rodríguez, 2012; Manzano, 2017). En este trabajo se retoma el uso de MATC para, primeramente, visualizar la parábola no como una curva estática, sino como el movimiento de un punto, en el plano, que cumple con la característica geométrica de estar ubicado a la misma distancia de un punto fijo y una recta fija; en segundo lugar, identificar las características geométricas del MATC que dan pie a la construcción o trazado de la parábola, aprovechando las ventajas que ofrece el software de geometría dinámica GeoGebra; finalmente, construir una representación algebraica de la parábola a partir de la representación gráfica que permita establecer relaciones bidireccionales entre ambas representaciones.

Un trabajo con esas características podría contribuir a que los estudiantes desarrollen una concepción más amplia, tanto de la parábola como de la noción de lugar geométrico. Esta estrategia no busca dejar de lado los desarrollos algebraicos, sino promover un panorama en el cual el trabajo geométrico se relacione y de sentido al trabajo algebraico, y viceversa. Con esta intención, a continuación, se presentan los objetivos para este trabajo:

Objetivo general:

Diseñar una secuencia de actividades didácticas que promuevan el análisis geométrico y analítico de la parábola mediante el uso de mecanismos articulados para el trazado de curvas

Objetivos específicos:

- Identificar dificultades reportadas en la enseñanza y aprendizaje de la parábola
- Identificar y seleccionar mecanismos articulados que tracen parábolas

- Ubicar contextos (matemáticos o extra-matemáticos) útiles para la exploración geométrica y analítica de la parábola mediante los MATC
- Valorar el diseño

Elementos Teóricos

Este trabajo se sustenta en algunos elementos del marco teórico Espacios de Trabajo Matemático (ETM), el cual busca analizar el trabajo que realiza un sujeto al tratar de resolver problemas matemáticos. Se le llama ETM a una estructura abstracta organizada para permitir y facilitar el trabajo de los individuos que resuelven problemas de un dominio específico de la matemática, como la geometría, el álgebra, entre otros (Kuzniak y Nechache, 2021). Al ser matemáticas escolares las que se ponen en juego, estos individuos son estudiantes aprendices, y el diseñador encargado del ETM será el profesor.

Dos elementos que son característicos en este marco teórico son un par de planos horizontales, los que Kuzniak y Richard (2014) denominan: plano epistemológico y plano cognitivo. Cada plano está compuesto por tres componentes, los cuales se relacionan entre sí para resolver problemas y explicar el trabajo matemático.

El plano epistemológico está definido por el dominio y el objeto matemático con el que se trabaja, y está conformado por los componentes: representamen, artefactos y referencial teórico. A su vez, el plano cognitivo está definido por los procesos cognitivos del sujeto que esté interactuando en la resolución de problemas. Este plano está conformado igualmente por tres componentes: visualización, construcción y prueba.

Durante el desarrollo del trabajo matemático los componentes de los planos horizontales se relacionan entre sí, dando lugar a tres génesis: génesis semiótica, en el cual la visualización del representamen le proporciona sentido y lo hace un objeto matemático operatorio; génesis instrumental, en el que los artefactos son utilizados como instrumentos para la construcción de representaciones; génesis discursiva, en la que el sujeto genera pruebas para argumentar y convencer a partir del referencial teórico (Kuzniak y Richard, 2014).

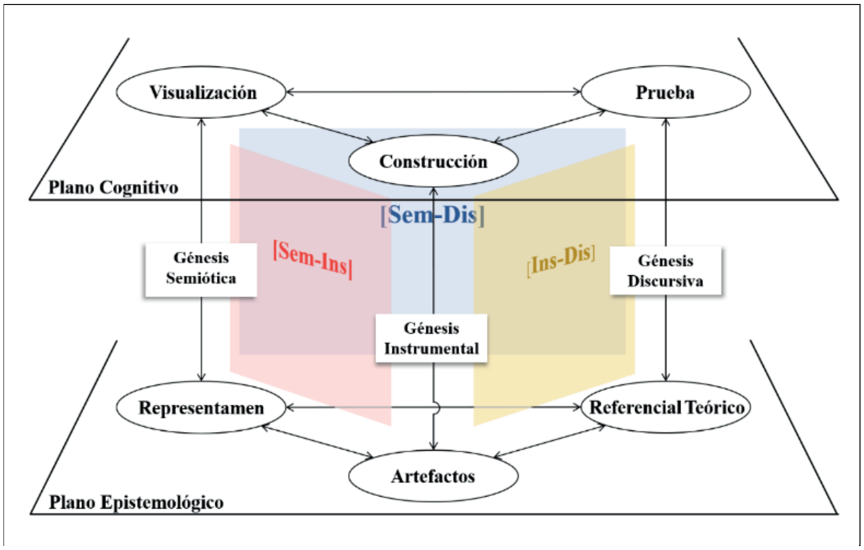
Los tres tipos de génesis señaladas anteriormente no son del todo independientes, sino que se relacionan durante las diferentes etapas del trabajo matemático para la resolución de una tarea, estableciendo tres planos verticales:

- El plano [Sem-Ins], conformado por la interacción entre la génesis semiótica y la génesis instrumental,
- El plano [Ins-Dis], conformado por la interacción entre la génesis instrumental y la génesis discursiva,
- El plano [Sem-Dis], conformado por la interacción entre la génesis semiótica y la génesis discursiva.

Dentro del marco del ETM, para que un estudiante desarrolle dominio del contenido u objeto matemático con el que se trabaja, es necesario que las actividades que se le propongan favorezcan la circulación entre los distintos elementos del diagrama (Figura 1) a lo largo de la secuencia, sean los componentes individuales de los planos horizontales, las génesis y/o los planos verticales (Kuzniak y Nechache 2015).

El diseño que se propone en este trabajo se desarrolla en dos dominios de la matemática: el de la geometría sintética (GS) y el de la geometría analítica (GA), los cuales se diferencian en el uso del plano cartesiano y de expresiones algebraicas para representar las relaciones geométricas (Klein, 1908). Esta distinción entre las geometrías es relevante, ya que los componentes del referencial teórico, los artefactos para la construcción y el tipo de representamen utilizados son distintos.

Figura 1. Diagrama de los planos horizontales y verticales del ETM



Fuente: retomado de Kuzniak y Richard, 2014 (p. 11)

Fases metodológicas

El desarrollo de este trabajo se ha organizado en 5 fases metodológicas, las cuales son:

Fase 1: Análisis preliminar, en el que se revisaron planes y programas de estudio, libros de texto y antecedentes relacionados al tema de estudio para fundamentar la problemática, la justificación y retomar ideas para el diseño de la propuesta.

Fase 2: Selección del MATC. Para realizar un análisis completo de la parábola se seleccionaron dos mecanismos: el nombrado “herramienta de la escuadra” (Figura 2a) para el análisis geométrico, y el “Parabológrafo de Van Schooten” (PVS, Figura 2b) para el tránsito de la GS a la GA y la construcción de la representación algebraica de la parábola. Por motivo de la pandemia del Covid-19 las actividades no se pudieron trabajar de manera presencial, por lo que los MATC se trabajaron virtualmente a través de applets de GeoGebra.

Figura 2a Herramienta de la escuadra, elaboración propia

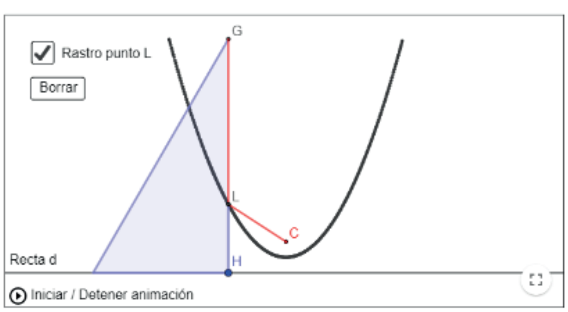
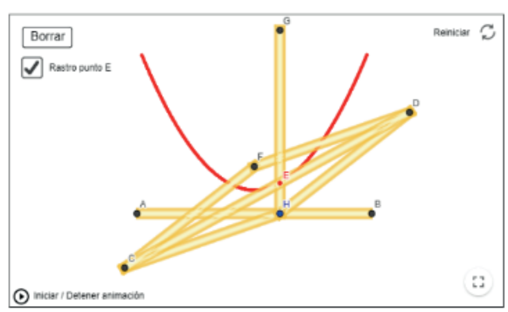


Figura 2b Parabológrafo de Van Schooten, elaboración propia



Fuente: Elaboración propia

Fase 3: Diseño de las actividades. Se diseñaron siete actividades distribuidas en dos secuencias didácticas, organizadas en inicio, desarrollo y cierre, donde la primera secuencia está dirigida al análisis geométrico de la parábola, y la segunda está dirigida al tránsito de la GS a la GA, concluyendo con la construcción de la representación algebraica de la parábola y el establecimiento de relaciones entre ambas representaciones. Paralelamente al diseño de las actividades se realizó un análisis a priori, con la finalidad de contrastarlo con un análisis a posteriori a partir de los resultados de la implementación.

Fase 4: Implementación de las actividades. Por motivo de la pandemia del Covid-19, las actividades se realizaron a través de la plataforma de videoconferencias Zoom, con un grupo de 15 estudiantes del tercer semestre de bachillerato, durante seis sesiones de dos horas cada una. Se recopilaron como evidencias las hojas de trabajo resueltas por los estudiantes y las videograbaciones de las sesiones de discusión en equipo y grupal, observando con mayor atención a dos de los cuatro equipos.

Fase 5: Valoración del diseño, a partir de la información que se obtuvo del contraste del análisis a priori y el a posteriori, además de la observación de las videograbaciones. Actualmente se está trabajando en generar las conclusiones pertinentes, y en producir la versión mejorada de las secuencias propuestas.

Descripción de la propuesta

A continuación, se presenta el diseño de la Actividad 2 de la segunda secuencia, en la que se comienza el tránsito de la GS a la GA con el parabológrafo de Van Schooten (PVS). Junto a la descripción de cada episodio de la actividad, se presenta el análisis a priori contrastado con el análisis a posteriori, con la finalidad de facilitar la comprensión de la actividad y de la estructura utilizada para el diseño y el análisis.

La Actividad 2 de la segunda secuencia tiene como antecedente la Actividad 1, en la que se presenta el PVS y se relaciona su funcionamiento con el concepto de mediatriz de un segmento. Ahora bien, la Actividad 2 tiene los objetivos de identificar las condiciones geométricas del PVS que le permiten trazar parábolas, y construir una representación algebraica de la parábola a partir del análisis geométrico del PVS.

Episodio 1. Se solicita la construcción del PVS en un applet en GeoGebra siguiendo una serie de instrucciones, con la finalidad de atender el primer objetivo, es decir, que el estudiante interactúe con los objetos y propiedades que están interviniendo en el PVS y en la construcción de la curva. Esta primera acción genera una circulación en el plano [Sem-Ins] (Figura 3a), donde GeoGebra se utiliza como artefacto para la construcción del representamen, en este caso, el PVS y la curva que se traza con él.

Figura 3a Circulación acción 1

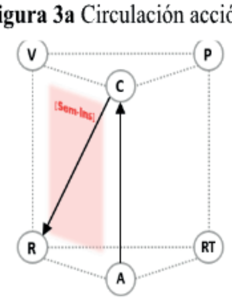


Figura 3b Circulación acción 2

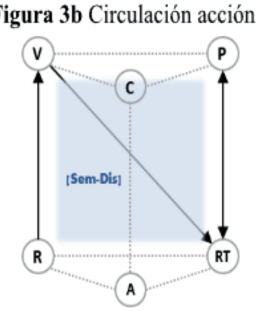
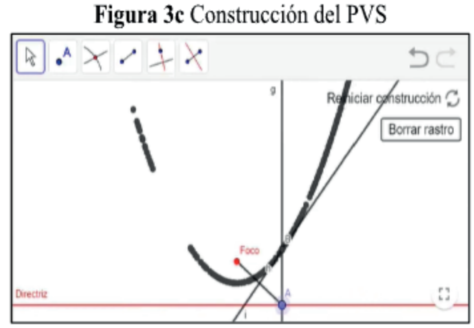


Figura 3c Construcción del PVS



Fuente: Elaboración propia

Posteriormente, se solicita argumentar si la curva que se traza con el PVS construido es una parábola, acción que genera una circulación en el plano [Sem-Dis] (Figura 3b), donde la visualización no icónica del representamen moviliza elementos del referencial teórico, tales como la definición de parábola y mediatriz, con los que se genera una prueba intelectual de que la curva corresponde a una parábola, lo que pasa a formar parte del referencial teórico del estudiante. Durante la implementación de este primer episodio se trabajó de manera grupal, por lo que se llegó a la conclusión esperada de manera grupal. Por lo tanto, en este episodio se desarrollaron las circulaciones esperadas.

Episodio 2. Esta tarea comienza señalando que se busca construir una representación algebraica de la parábola a través del mecanismo, por lo cual ahora se presenta un nuevo applet con el PVS en el que se identifican dos segmentos como x y y (Figura 4a). Se solicitan dos acciones: a) identificar en el PVS los segmentos entre puntos que, a pesar del movimiento se mantienen constantes o variables. Esto genera una circulación en el plano [Sem-Ins] (Figura 4b), donde a partir de la manipulación del PVS se traza la parábola y hace variar las longitudes de los segmentos entre puntos. La visualización icónica de los segmentos entre los puntos del PVS (representamen) permite identificar los segmentos que varían y los que permanecen constantes. El b) solicita identificar equivalencias entre los segmentos del PVS, lo que genera una circulación similar a la anterior (Figura 4c).

Figura 4a PVS con y identificados

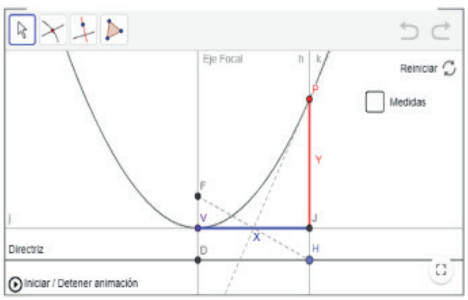


Figura 4b Circulación a)

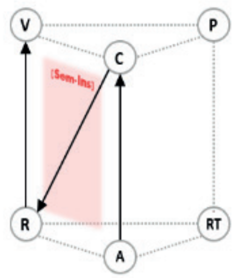
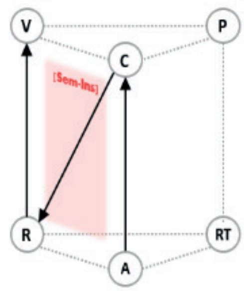


Figura 4c Circulación b)



Fuente: Elaboración propia

El análisis a posteriori del episodio muestra que los equipos siguieron un procedimiento similar al descrito a priori, a excepción del equipo 1, quienes generaron una circulación primero en el plano [Sem-Dis] (Figura 5a), visualizando de manera no icónica el representamen, lo que los llevó a la construcción de un punto L, correspondiente a la intersección de la recta h y de una recta g1, que es perpendicular al Eje Focal que pasa por el punto F, generando una circulación mayormente en el plano [Sem-Ins] (Figura 5b). En la Figura 5c se muestra la construcción realizada por el equipo.

Figura 5a Circulación acción 1

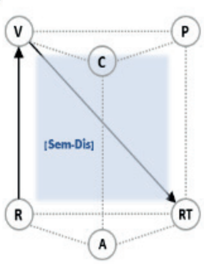


Figura 5b Circulación acción 2

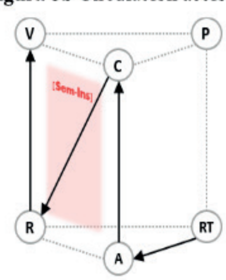
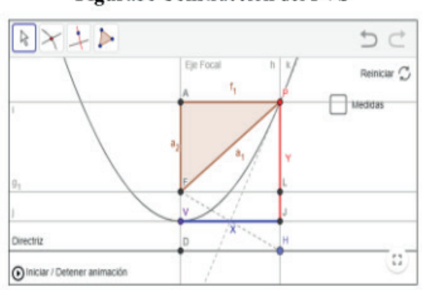


Figura5c Construcción del PVS



Fuente: Elaboración propia

Episodio 3. En el tercer episodio se solicitan tres acciones: a) la construcción guiada de un triángulo PFA en el applet, b) identificar qué tipo de triángulo es, y c) identificar equivalencias entre los segmentos del PVS y los lados del triángulo PFA. Para la acción a) se proporciona una serie de instrucciones para la construcción en GeoGebra, que consiste en trazar una recta perpendicular al Eje Focal que pase por el punto P, identificando como el punto A la intersección entre las rectas (Figura 6a). Esta acción genera una circulación en el plano [Sem-Ins] (Figura 6b), donde GeoGebra se utiliza como un artefacto para la construcción del representamen, en este caso el triángulo PFA.

Figura 6a Triángulo

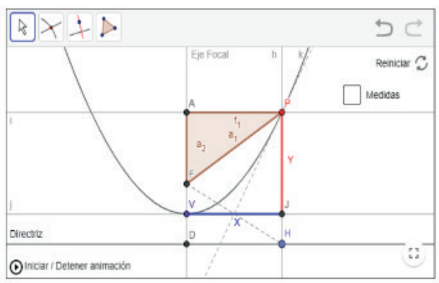


Figura 6b Circulación acción a)

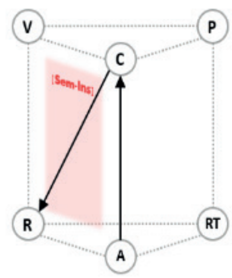
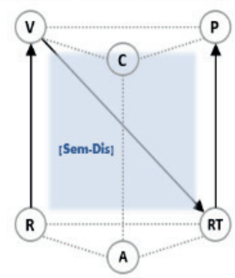


Figura 6c Circulación acción b)



Fuente: Elaboración propia

La acción b) implica la visualización no icónica del representamen (triángulo PFA), lo que moviliza del referencial teórico las características de los triángulos rectángulos y de las rectas perpendiculares, para generar una prueba intelectual de que, a pesar del movimiento del PVS, el triángulo PFA es un triángulo rectángulo, generando una circulación en el plano [Sem-Dis] (Figura 6c).

La acción c) requiere de la manipulación y la visualización icónica del PVS para identificar que, a pesar del movimiento, el lado AP del triángulo PFA es igual a x, es decir, el segmento VJ, generando una circulación en el plano [Sem-Ins] (Figura 7a). Por otra parte, la visualización no icónica del PVS permite movilizar elementos del referencial teórico, tal como la definición de parábola como lugar geométrico, con lo que se hace una prueba intelectual de que, a pesar del movimiento, el lado PF del triángulo PFA es igual al segmento PH, en otras palabras, AF=y+JH, generando una circulación en el plano [Sem-Dis] (Figura 7b).

Figura 7a Circulación 1 acción c)

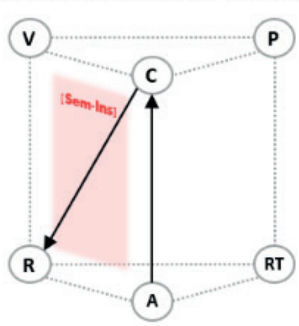
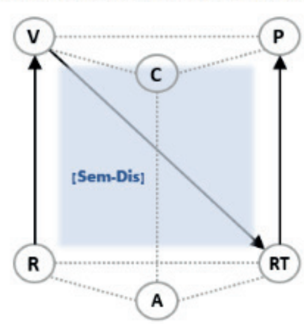


Figura 7b Circulación 2 acción c)



Fuente: Elaboración propia

El análisis a posteriori de la actividad muestra que los equipos desarrollaron circulaciones muy similares a las del análisis a priori de la actividad descrita anteriormente. Una diferencia significativa fue la del equipo 1 en la acción 3, donde se solicita identificar equivalencias entre los segmentos del PVS y los lados del triángulo PFA. El equipo hizo una visualización icónica del representamen (Figura 6a), respondiendo que los lados son variables, sin embargo, el equipo tuvo la oportunidad de refinar su respuesta durante la discusión grupal, generando circulaciones similares a las esperadas.

Episodio 4. En este episodio se solicita calcular y expresar la longitud del lado AF del triángulo PFA tomando como base sus otros lados PA y PF, que ahora están expresados como PA=x, y PF=y+JH. Este trabajo implica primeramente una circulación en el plano [Sem-Dis] (Figura 8a), donde la visualización no icónica del representamen (triángulo PFA y las expresiones algebraicas que representan las medidas de sus lados) permite movilizar el Teorema de Pitágoras del referencial teórico, lo que se utiliza como artefacto simbólico en la construcción de un representamen simbólico, o algebraico, de las relaciones entre los lados del triángulo PFA, circulando en los planos [Ins-Dis] y [Sem-Ins] (Figura 8b). Siguiendo ese proceso se concluye que AF=√(〖(y+JH)〗^2-x^2) (Figura 8c).

Figura 8a Circulación acción| 1

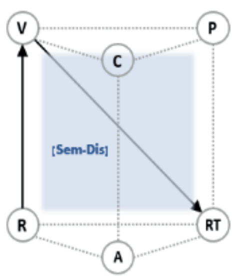


Figura 8b Circulación acción 2

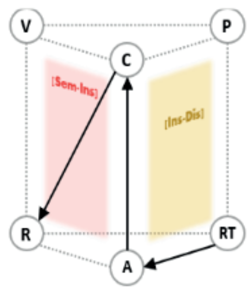


Figura 8c Desarrollo algebraico

$$(y+JH)^2 = x^2 + AF^2$$

$$(y+JH)^2 - x^2 = AF^2$$

$$\sqrt{(y+JH)^2 - x^2} = AF$$

Fuente: Elaboración propia

El análisis a posteriori del episodio 4 muestra que el equipo 1 realizó una circulación similar a la descrita a priori, pero primeramente movilizaron del referencial teórico las razones trigonométricas, buscando obtener el valor del lado AF, sin embargo, desistieron de esa estrategia, intentando con el teorema de Pitágoras. El equipo 2 movilizó el teorema de Pitágoras desde un inicio, pero se les dificultó organizar la información de los lados del triángulo PFA de manera simbólica. Antes de que los equipos terminaran la actividad el tiempo se terminó, por lo que se retomó en una discusión grupal, donde comentaron sus avances hasta el momento, logrando desarrollar los resultados y las circulaciones descritas en el análisis a priori de la actividad.

Figura 9a Circulación acción 1

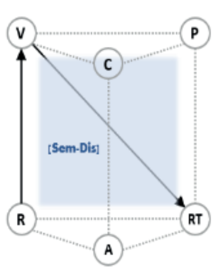


Figura 9b Circulación acción 2

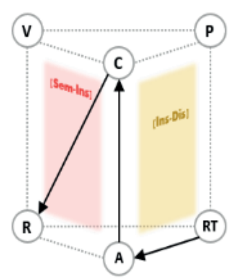


Figura 9c Construcción del PVS

$$y = \sqrt{(y+c)^2 - x^2} + c$$

$$y - c = \sqrt{(y+c)^2 - x^2}$$

$$(y-c)^2 = (y+c)^2 - x^2$$

$$y^2 - 2yc + C^2 = y^2 + 2yc + c^2 - x^2$$

$$x^2 = 4yc$$

Fuente: Elaboración propia

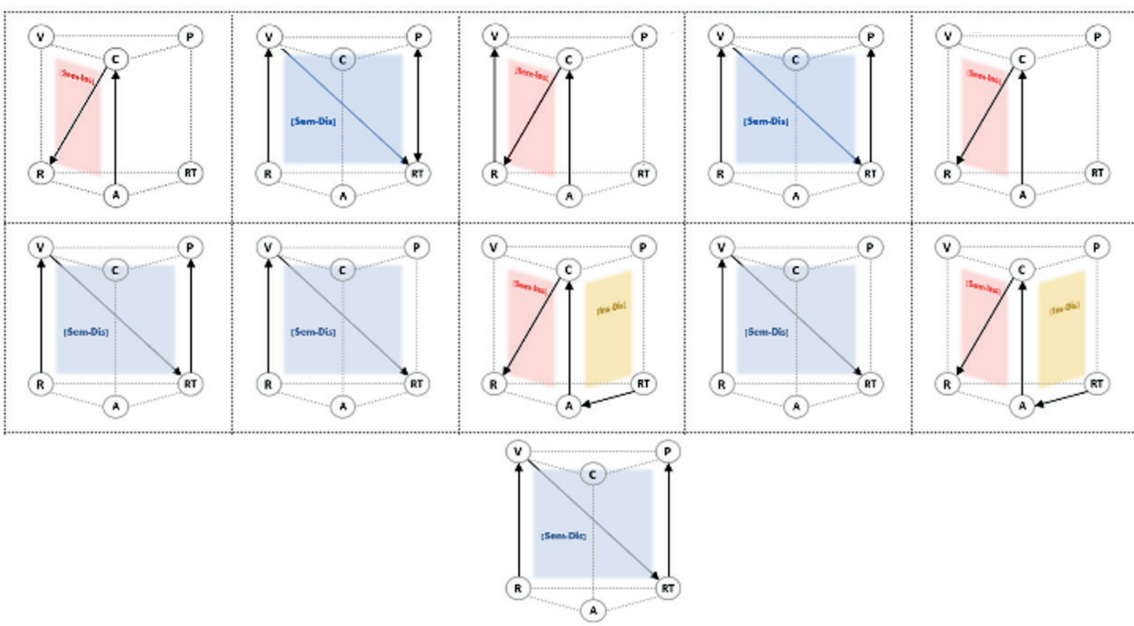
Episodio 5. En este episodio se solicitan dos acciones: a) expresar el segmento y como la suma de dos distancias, en este caso y=√(〖(y+c)〗^2-x^2)+c, (donde c representa la longitud de los segmentos constantes JH, FV, VD), y b) despejar x^2 de la expresión resultante. La acción a) genera una circulación en el plano [Sem-Dis] (Figura 9a), donde la visualización no icónica del representamen simbólico (ecuación a despejar) moviliza elementos del referencial teórico, tales como el despeje de una ecuación y el desarrollo de binomios al cuadrado, lo que se utiliza como artefacto simbólico para la construcción de un representamen simbólico que representa las relaciones entre los lados del triángulo PFA, generando una circulación en los planos [Ins-Dis] y [Sem-Ins] (Figura 9b). Siguiendo este proceso se concluye que (Figura 9c), que corresponde con la ecuación canónica de la parábola con vértice en el origen y con apertura hacia arriba.

El análisis a posteriori de este episodio muestra que a los estudiantes se les dificultó realizar el desarrollo algebraico, ya que se les dejó un tiempo para desarrollar la ecuación individualmente y sólo tres lo completaron correctamente, mismos que participaron durante la discusión grupal y despeje de la ecuación. A pesar de que los desarrollos algebraicos individuales de los estudiantes no resultaran correctos en su totalidad, en la discusión grupal se generaron las circulaciones descritas en el análisis a priori.

Conclusiones preliminares

La actividad que se describe en este reporte corresponde a una de las dos actividades de desarrollo de la segunda secuencia, donde se tiene el objetivo de construir una representación algebraica de la parábola a partir del análisis del PVS, la cual se retoma para trabajarla en el plano cartesiano durante la Actividad 3.

Figura 10. Circulaciones generadas durante la resolución de la actividad 2



Fuente: Elaboración propia

En la actividad 2 los estudiantes cumplieron con el propósito de construir una representación algebraica de la parábola con ayuda del profesor y, como se muestra en la Figura 10, el trabajo con el PVS estuvo en el centro de la actividad. En las primeras tres circulaciones se observa que la construcción de la parábola con el PVS es el centro del trabajo, y en los siguientes se observa que la visualización de los elementos del PVS es lo que da pie al trabajo algebraico que desemboca en la construcción de la representación algebraica de la parábola.

La Actividad 2, y en general las dos secuencias tienen algunos puntos fuertes, tales como:

involucra al estudiante en el proceso de construcción del mecanismo articulado, promueve un método de análisis de los lugares geométricos dinámico y diferente al que típicamente se promueve en libros de texto,
la visualización no icónica del mecanismo articulado está en el centro de los episodios de resolución,
transita de un entorno geométrico a un algebraico de manera paulatina, relacionándolos entre sí, y
permite construir una representación algebraica de la parábola a partir del análisis geométrico del mecanismo articulado.

Actualmente se está trabajando en las adecuaciones a las secuencias de actividades didácticas para presentar el diseño final, y así cumplir con el objetivo general del proyecto.

Referencias bibliográficas

Arellano, F., & Oktaç, A. (2009). Algunas dificultades que presentan los estudiantes al asociar ecuaciones lineales con su representación gráfica. Acta Latinoamericana de Matemática Educativa (págs. 357-365). México DF: Comite Latinoamericano de Matemática Educativa.

Cortés, J. y Soto, H. (2012). Uso de artefactos concretos en actividades de geometría analítica: una experiencia con la elipse. REDIMAT - Journal of Research i Mathematics Education, 1(2), 159-193.

Dennis, D. y Confrey (1997). René Descartes curve-drawing devices: experiments in the relations between mechanical motion ald symbolic language. Mathematics Magazine 70, 3, 163–174.

Duval, R,. (1998). Registros de representación semiótica y funcionamiento cognitivo del pensamiento. Didáctica, Investigaciones en Matemática Educativa.

Gómez, P., & Carulla, C. (1999). La Enseñanza de la Función Cuadrática en las Matemáticas Escolares del Distrito Capital. Una Empresa Docente

Kuzniak, A., & Nechache, A. (2021). On forms of geometric work: a study with pre-service teachers based on the theory of Mathematical Working Spaces. Educational Studies in Mathematics, 106, 1-19. doi:https://doi.org/10.1007/s10649-020-10011-2

Kuzniak, A., & Richard, P. (2014). Espacios de trabajo matemático. Puntos de vista y perspectivas. Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 17, 5-15.

Manzano, J. (2017). Mecanismos articulados para trazar curvas como recurso educativo digital para la Didáctica de las Matemáticas en Secundaria y Bachillerato. Tesis de doctorado no publicada, Universidad Autónoma de Madrid. Madrid, España.

Villareal, J. E., Carmona, J. A., & Arango, C. M. (2013). La enseñanza aprendizaje de la geometría analítica: Una propuesta de desarrollo del pensamiento a partir del modelo de van hiele y la metodología de aula taller. Congreso Iberoamericano De Educación Matemática. (p.1664–1671). Montevideo: Universidad de Antioquia