VOL 35, NÚMERO 1, AÑO 2022

REPRESENTACIONES SEMIÓTICAS DE LA FUNCIÓN COMO HERRAMIENTA EN EL APRENDIZAJE DEL CONCEPTO

SEMIOTIC REPRESENTATIONS OF FUNCTION AS A TOOL FOR LEARNING THE CONCEPT

Laura Ximena Casas Rodríguez, Yuri Carolina Niño Castillo
Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia – UPTC (Colombia)
laura.casas@uptc.edu.co , yuricarolina.nino@uptc.edu.co

Resumen
Este artículo muestra resultados parciales de una investigación cuyo propósito fue caracterizar el aprendizaje de los estudiantes a través de la modelación matemática desde las representaciones semióticas de la función, teniendo en cuenta la comprensión y aplicación del concepto en diferentes situaciones. De esta manera, se propusieron una serie de actividades que favorecieran el proceso cognitivo en el tránsito de un registro de representación a otro. Las actividades se desarrollaron con un grupo de estudiantes de la Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia, y en esta ocasión los resultados corresponden a uno de los aspectos analizados, que vincula la modelación matemática y las representaciones semióticas. La investigación tuvo un enfoque cualitativo, y la información se recopiló a través de observación y apuntes de los estudiantes. Se reconoció que las actividades permitieron identificar relaciones de dependencia entre variables y entre los registros de representación de la función, vinculando el concepto con fenómenos de variación.

Palabras clave: aprendizaje, función, representaciones semióticas, modelación matemática

Abstract
This article shows the preliminary outcomes of a research that was aimed at characterizing students' learning through mathematical modeling from the function's semiotic representations, taking into account the concept understanding and application in different situations. So, a series of activities that favored the cognitive processes in the change from one representation registry to another were proposed. The activities were carried out with a group of students from the Technological and Pedagogical University of Colombia. In this case, the results correspond to one of the aspects analyzed, which links the mathematical modeling and the semiotic representations. This was a qualitative-focused research, and the information analyzed was collected through observation and from the student's notes. It was recognized that the activities allowed students to identify relationships of dependency between variables and between the function representation registers, linking the concept to the variation phenomena.

Keywords: learning, function, semiotic representations, mathematical modeling

Introducción

Durante mucho tiempo se ha generado cierta apatía frente a las matemáticas, que en ocasiones puede llegar a repercutir en el aprendizaje de las mismas; esta actitud tal vez puede atribuirse a un posicionamiento inicial que opacó las capacidades de cada estudiante en el área, provocado en muchos casos, "por la inadecuada introducción por parte de sus maestros" (Guzmán, 1992, p.14), o quizá porque los métodos enseñanza de la matemática se han inspirado en las ideas de las matemáticas formales; de esta manera, las estrategias didácticas se basan en la memoria y el manejo de algoritmos, lo cual no le permite al estudiante percibir los vínculos que tiene cada procedimiento con las aplicaciones que puede encontrar a su alrededor, ya que se ésta privando de experimentar sus aprendizajes en escenarios diferentes a los que se proporcionan en clase (Cantoral, 2001; Aravena, Caamaño & Giménez, 2008).

Es posible que esta dinámica de clase desvanezca el interés del estudiante propiciando un aprendizaje superficial basado en la memorización y reproducción (Salinas & Alanís, 2009), repercutiendo en el desarrollo de actividades relacionadas con las aplicaciones de la matemática; es decir, generando dificultades en la traducción de problemas verbales al lenguaje matemático (Cantoral, 1993; López y Sosa, 2008; Trigueros, 2009), además se debe tener en cuenta que "las dificultades en la enseñanza y en el aprendizaje de las matemáticas persisten, con porcentajes altos de reprobación de los alumnos y bajos rendimientos en la aplicación de la matemática en contexto" (Ministerio de Educación Nacional- MEN, 2017, citado en Jiménez, 2019, p.122). Así, a través de esta investigación se propone que el trabajo con las matemáticas sea más aplicado que algorítmico, buscando caracterizar el aprendizaje de los estudiantes a través de la modelación matemática desde las representaciones semióticas de la función.

Ahora, la matemática posee diversidad de aplicaciones, así como ramas y conceptos, por lo que el interés por concentrarse específicamente en determinado concepto puede deberse a diferentes razones. Desde el punto de vista de Font (2011), no todos tienen la misma importancia para lograr comprender la disciplina que de ellos se encarga, pero la función es un concepto que toma protagonismo en la matemática por "su naturaleza unificante y modelizadora" (p. 146), además considera que comprender el concepto de función es muy importante, debido a los diferentes ámbitos en los que se puede encontrar, por ejemplo, los medios de comunicación ofrecen tablas y gráficos que dejan ver el cambio de una variable a consecuencia del cambio de otra, lo que se evidencia también en ciertas situaciones de la naturaleza. Es así, como su importancia también se atribuye a las diversas aplicaciones prácticas que tiene (Azcárate & Deulofeu, 1996).

Esta diversidad de situaciones en las que el concepto puede ser útil se han reconocido desde la antigüedad, al respecto, algunos autores muestran que el concepto ha tenido un proceso evolutivo influenciado por las necesidades y avances de la humanidad, por lo que con el paso del tiempo se vio representado de varias maneras (véase, por ejemplo, Font, 2011; Hitt, 2002; Riscanevo, Cristancho & Fonseca, 2011); es decir, incluso antes de que se formalizara el concepto, ya se usaban diferentes representaciones de la función.

Elementos teóricos

De acuerdo con el interés principal de la investigación, el cual relaciona las representaciones semióticas de la función y las aplicaciones de la matemática, enfocadas en la modelación, se describen algunos aspectos sobre dichos temas.

Inicialmente, a nivel histórico las primeras representaciones de la función que coexistieron fueron las tablas y el lenguaje verbal, y esto sucedió a través de los babilonios; por su parte los griegos usaron también el lenguaje verbal, pero a este se sumaron las figuras geométricas como recurso para representar la función. Durante la edad media se dieron los primeros acercamientos a la representación gráfica, tomando como punto de partida los trabajos realizados por Nicolás Oresme, que se complementaron con los de Galileo Galilei, quien buscó establecer relaciones entre magnitudes, lo cual fue trascendental para desarrollar la noción de función (Sastre, Rey & Boubée, 2008). En cuanto a la representación algebraica, esta surgió gracias a la aparición del álgebra simbólica durante la edad moderna, y a partir de esta época, grandes pensadores como Descartes, Fermat, Newton, Leibnitz, Bernoulli, Euler, Lagrange, Dirichlet, entre otros, hicieron aportes importantes en la formalización del concepto de función (Azcárate & Deulofeu, 1996; Font, 2011; Ugalde, 2014).

Así, se pone en evidencia que el concepto de función se ha entendido de diversas maneras, en las cuales se recurre a propiedades y representaciones distintas (Font, 2011), por lo que es posible que en ocasiones se considere que una representación es más adecuada que las otras (Ugalde, 2014), ya que cada una está diseñada para destacar ciertas características de la función.

Por ejemplo, verbalmente se puede describir determinada situación que relaciona diferentes datos; una tabla de valores proporciona una visión cuantitativa de la situación, pero no permite extraer características globales de la función; simbólicamente se pueden usar variables para denotar las diferentes cantidades que intervienen en la situación planteada; y gráficamente se pueden poner de relieve las características de dependencia entre las variables; sin embargo, la expresión gráfica y la simbólica o algebraica, se consideran las más complejas de interpretar, ya que proporcionan una visión general y completa de la función, además que brindan información más amplia que permite caracterizar modelos (Azcárate y Deulofeu, 1996). La función en sí misma también puede interpretarse de diversas formas, para Azcárate y Deulofeu (1996) las diferentes maneras de verla pueden clasificarse según el aspecto que se considere más relevante, por ejemplo, puede ser por la correspondencia entre valores de variables, o entre elementos de dos conjuntos, o la dependencia entre variables.

A pesar de que ninguna interpretación se considera errónea, puede que las interpretaciones más intuitivas carezcan de rigor, o que las más rigurosas se alejen de las situaciones concretas, por lo que podría resultar más práctico que el estudiante pueda determinar un concepto que sea lo suficientemente útil y operativo, el cual surge de acuerdo a la manera en la que interpreta o generaliza una serie de situaciones en las que se tiene una relación entre magnitudes (Font, 2011), Sobre esto, las situaciones deben tener un aspecto en común: la existencia de magnitudes variables y dependientes entre sí, aspecto que a su vez se puede expresar mediante diferentes representaciones (Azcárate & Deulofeu, 1996); de esta manera se propone que dichas situaciones que le permitan al estudiante acercarse al concepto de función de una manera más práctica, y a su vez transitar entre sus diferentes representaciones, se aborden a través de la modelación matemática.

En cuanto a la modelación matemática, Villa y Ruiz (2009) se refieren al proceso a través del cual se obtiene y evalúa un modelo matemático que representa determinado fenómeno, como “ciclo de modelación”, y Janvier (1996, citado en Posada & Villa, 2006, p.1) especifica que dicho proceso comprende dos etapas: la formulación del modelo y la validación del mismo. Para formularlo se identifican las relaciones entre las variables que intervienen en la situación, y al obtenerlo éste debe validarse con los datos iniciales.

De esta manera, el interés en trabajar con actividades que pongan de relieve la relación entre magnitudes, se basa en que si la función se ve solo como una regla de correspondencia deja de verse como un modelo matemático (Posada & Villa, 2006). Además “las funciones surgen siempre que una cantidad depende de otra” (Stewart, 2012, p. 10), y precisamente las relaciones existentes entre las variables que intervienen en determinada situación, se identifican en la primera etapa del ciclo de modelación, para lo cual los estudiantes pueden apoyarse en diversas representaciones.

Es así como toma importancia el papel de las representaciones semióticas en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, ya que permiten el acceso a los objetos matemáticos y pueden contribuir a lograr un aprendizaje con mayor significado para los estudiantes. Esto se fundamenta en que la actividad matemática se realiza necesariamente en un contexto de representación (Duval & Sáenz, 2016).

Así mismo, en el campo del aprendizaje de las matemáticas se involucra el análisis de las actividades cognitivas, y las representaciones semióticas son un sistema particular de signos que son necesarios para la conceptualización de los procesos cognitivos. Estas actividades cognitivas requieren el uso de los sistemas de representación diferentes al registro lenguaje natural, ya sean los esquemas, las figuras geométricas, los gráficos cartesianos o las tablas, considerando que estos sistemas de representación son diferentes entre sí y cada uno plantea preguntas específicas sobre el aprendizaje (Duval, 1999).

En el desarrollo de la actividad cognitiva del estudiante, se emplean distintos registros de representación aparte del lenguaje natural y los símbolos; las transformaciones del registro semiótico de representación que se realizan son el *tratamiento* y la *conversión*. Así pues, se hace referencia al tratamiento como "la transformación de una representación –inicial- en otra representación terminal, respecto a una cuestión, un problema o una necesidad" (Duval, 1999, p.42); es decir, al hablar de tratamiento, la transformación produce otra representación dentro del mismo registro. Por otro lado, la conversión es "la transformación de la representación de un objeto, de una situación o de una información dada de un registro, es una representación del mismo objeto o de la misma información en otro registro" (Duval, 1999, p.44); en otras palabras, la conversión es el cambio de registro sin cambiar el objeto.

En relación con lo anterior, los registros se pueden movilizar en los procesos matemáticos empleando el tratamiento y la conversión para tal fin. Respecto al proceso de conversión, puede ocurrir que en ocasiones no se evidencie de manera inmediata, ni con facilidad, esto corresponde a las características que deben permanecer al realizar el cambio de registro, explicarse desde la congruencia o incongruencia entre los registros; así que Duval & Sáenz (2016) describen las condiciones que cumple la congruencia, afirmando que:

> …en algunos casos, es como si hubiera una correspondencia uno a uno y la representación fuente fuera transparente para la representación de llegada. En estos casos, la conversión no parece ser más que una simple codificación, pero en otros casos no sucede así. En otras palabras, puede o no haber congruencia entre una representación fuente y su representación convertida dentro de un registro de llegada (p.84).

Así pues, la congruencia de los registros de representación según Duval (2004, citado en Ospina, 2012) se presenta cuando

> …al segmentar cada una de las representaciones en sus unidades significantes para ponerlas en correspondencia, se cumplen tres criterios: correspondencia semántica entre las unidades significantes propias de cada registro, univocidad semántica terminal y conservación del orden de organización de las unidades significantes en las representaciones (p.24).

De este modo, los registros de representación son entendidos como signos o símbolos con los cuales se puede describir un objeto matemático; de hecho, Duval (2013) hace referencia a que los objetos matemáticos "no son accesibles perceptiva o instrumentalmente. Lo son, a través de los sistemas semióticos de representación" (p.7). Del mismo modo, se hace referencia a la definición de las representaciones descritas como un conjunto y caracteres propios de un registro específico, partiendo de un estado inicial que se transforma en una nueva representación, la cual se debe encontrar en el mismo registro (Duval, 1999).

A continuación, se presenta la descripción de las tres clases de registro que se tuvieron en cuenta para la experiencia. Según Duval (1995, citado en Guzmán, 1998) las representaciones semióticas

> …son aquellas en las cuales la producción y la movilización de un registro de representación se puede originar mediante elaboraciones discursivas incluidas el lenguaje natural y el lenguaje formal o no discursivas que están relacionadas con las figuras, gráficos y esquemas (p.7).

Registro semiótico del lenguaje natural r^1

En este registro se utilizan los signos del lenguaje, la sintaxis y la gramática propia del español, Duval (1999) afirma que "la expansión natural se caracteriza por el empleo de la lengua. Moviliza simultáneamente la red semántica de una lengua natural y los conocimientos pragmáticos propios al medio social cultural de los locutores" (p.113). De esta manera permite dar explicaciones y definiciones sobre la lectura de algún problema matemático y cada representación se enunciará como R_m^1, siendo m cada una de las que sea posible.

Registro semiótico del lenguaje gráfico o geométrico r^2

En este registro se utiliza el plano cartesiano, las figuras geométricas para representar y lograr una visualización de lo enunciado en el lenguaje natural y expresado en lenguaje algebraico. Duval (1999) lo describe como la expansión que "se basa en el principio de recuperación plurívoca de lo que aparece como una misma unidad lexical, sea bajo el modo fonético-acústico o gráfico-visual" (p.111). Se utilizan los elementos de la geometría como cuadrados, rectángulos y polígonos en general, así como características y propiedades de estos, cada una de estas representaciones se designará con R_m^2, con m para cada representación del registro.

Registro semiótico del lenguaje algebraico r^3

Este registro utiliza los signos y las reglas propias de la matemática, concretamente del álgebra (reducción de términos semejantes, productos notables). Duval (1999) considera que la "expansión formal se caracteriza por la aplicación de reglas de sustitución que se basan exclusivamente en símbolos que representan variables o proposiciones independientemente de su significación" (p.112). Lo anterior, se puede evidenciar cuando los estudiantes escriben las expresiones algebraicas que representan cada problema enunciado, al lograr estas representaciones se simbolizarán como R_m^3, para cada m que sea posible.

Aspectos metodológicos

La investigación se establece desde un enfoque cualitativo, el cual busca comprender los fenómenos basándose en la perspectiva y experiencia de los participantes; es decir, se concentra en examinar los puntos de vista, interpretaciones y significados que los involucrados le otorgan al fenómeno (Hernández, Fernández y Baptista, 2014), así que acorde a esto, la información que permitiera caracterizar el aprendizaje de los estudiantes, se recopiló a través de grabaciones de audio, la observación y los pliegos en los que los estudiantes tomaron sus apuntes.

El grupo de trabajo estaba conformado por 30 estudiantes de la Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia, quienes se organizaron en grupos de 4 y 5 estudiantes, de los cuales se seleccionaron dos grupos para recopilar la información correspondiente. Se desarrollaron tres actividades, teniendo en cuenta los tres tipos de referencias de los que se puede valer el docente para abordar una actividad en clase, como son: las puramente matemáticas; las que se relacionan con una situación semi real, la cual plantea una realidad construida, vista como una situación que tiene aportes de la realidad, pero también contempla aspectos que sería poco probable que se dieran en ésta; y las que son situaciones de la vida real (Skovmose, 2000).

En cada una de las actividades se analizaron los mismos aspectos de acuerdo a los objetivos específicos de la investigación; en este caso se expone el análisis relacionado con el reconocimiento del papel de la modelación matemática en el tránsito entre representaciones semióticas de la función, en el desarrollo de una de las actividades, la que se relacionaba con la primera referencia de acuerdo a Skovmose (2000); razón por la cual solo se tuvieron en cuenta los elementos teóricos correspondientes.

Resultados

La actividad que se presenta a continuación fue la primera que se propuso, la cual surgió luego de realizar algunos ajustes a ejercicios propuestos en libros de Cálculo como de Leithold (1998) y el de Stewart (2012), la actividad fue la siguiente:

Representar un rectángulo con perímetro de 24 centímetros y calcular su área. Responder las siguientes preguntas:

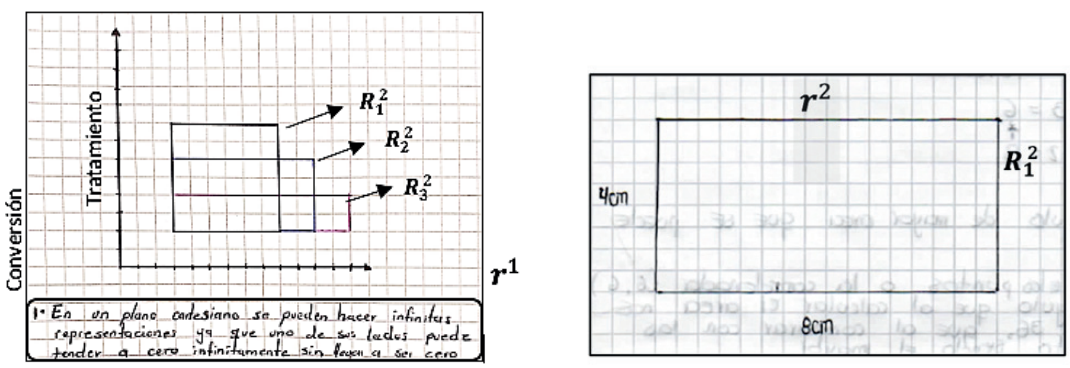
- ✔ *¿Cuántos rectángulos con perímetro de 24 centímetros pueden construirse?*
- ✔ *¿Existe relación entre las dimensiones de los rectángulos y su respectiva área? ¿De qué manera(s) se podría representar dicha relación?*
- ✔ *¿Cuál es el rectángulo de mayor área que se puede representar?*
- ✔ *¿Será posible determinar una manera que permita hallar el área de cualquiera de los rectángulos conociendo la medida de uno de sus lados? ¿Si, no, por qué?*

Como se mencionó, la actividad no fue tomada de ningún libro específicamente, sino que las docentes la diseñaron con el fin de lograr el objetivo señalado anteriormente, referente al tránsito entre representaciones semióticas.

En relación con el primer cuestionamiento, se evidencia que el grupo 1 da a conocer diferentes representaciones empleando el plano cartesiano, hace relación al lenguaje natural desde el punto de vista a considerar infinitas soluciones pues se trabaja con los números reales, por otro lado, el grupo 2, solo muestra una representación gráfica, sin evidenciar, ni hacer alusión a diferentes representaciones ni registro semióticos en su construcción.

En las representaciones de estos dos grupos se resalta la congruencia entre el registro de salida (lenguaje natural r^1) y el registro de llegada (registro gráfico r^2), además en el grupo 1, se ven los procesos cognitivos de tratamiento al realizar diversos rectángulos que cumplen la condición además de especificar con palabras lo que están realizando y conversión respecto al tránsito de los registros semióticos (Figura 1).

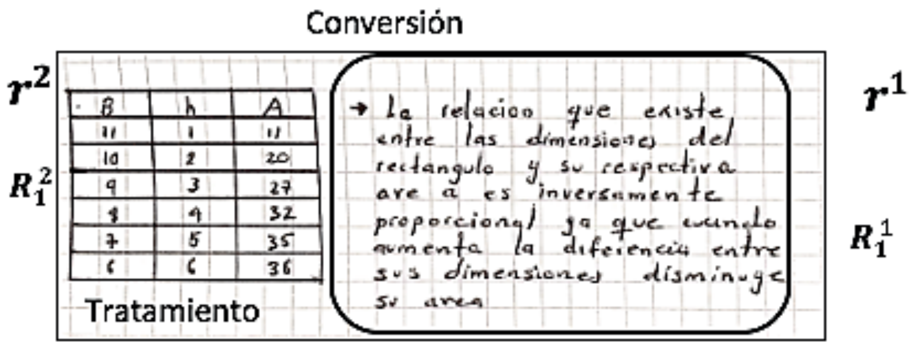
Figura 1 y 2. conversión respecto al tránsito de los registros semióticos



Fuente: Elaboración propia

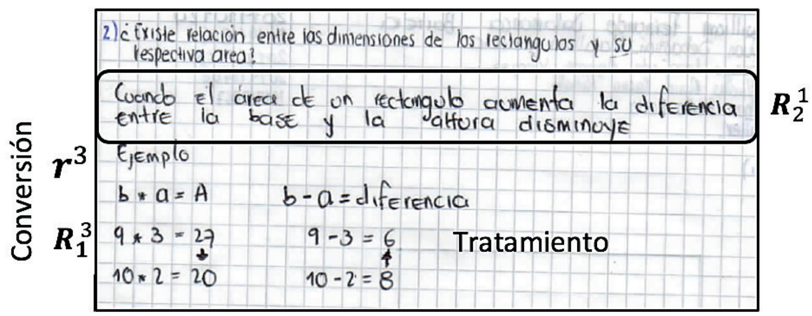
Ahora bien, al realizar la segunda pregunta en la que los estudiantes deben establecer una relación (si existe) entre las dimensiones del rectángulo y su área, se encontró que ellos realizan los procesos cognitivos de formación, tratamiento y conversión. El primero al considerar la representación mental (interna), el segundo al realizar los registro gráfico r^2 (Figura 3) y algebraico r^3 (Figura 4) respectivamente y describir cada situación respectivamente y el tercero al realizar los cálculos internos dentro de cada representación con el objetivo de dar una generalidad respecto registro de partida, en las representaciones y los registros semióticos se evidencia congruencia pues se mantienen las unidades significantes y la univocidad semántica es acorde con los registros ya mencionados.

Figura 3. Registro gráfico r^2



Fuente: Elaboración propia

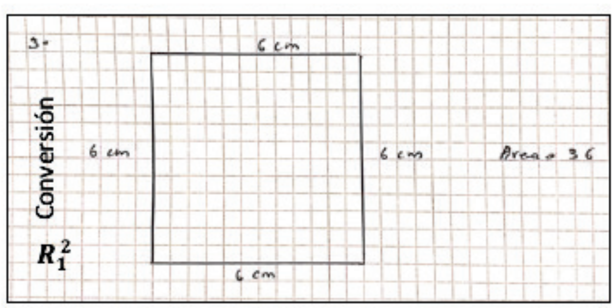
Figura 4. Registro algebraíco r^3



Fuente: Elaboración propia

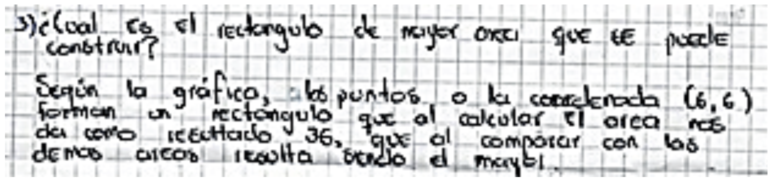
Respecto a la tercera pregunta, uno de los grupos usó la representación de un cuadrado para indicar las dimensiones del rectángulo de 24cm de perímetro de mayor área, sin embargo, éste puede vincularse con el registro semiótico gráfico r^2, ya que inicialmente los estudiantes se apoyaron en el plano cartesiano para revisar diferentes posibilidades para los valores que podrían tener las dimensiones del rectángulo (Figura 5). El otro grupo de estudiantes por su parte eligió el lenguaje natural r^1 para mencionar el mismo hecho, pero sustentaron la respuesta con la gráfica que se había usado para dar respuesta a la segunda pregunta, ya que de manera específica indican que ésta fue su guía para encontrar las dimensiones del rectángulo de 24cm con mayor área (Figura 6). En este caso no se evidencia un proceso de tratamiento en ninguno de los grupos para dar la respuesta definitiva.

Figura 5. Representación gráfica; rectángulo de mayor área, grupo 1



Fuente: Elaboración propia

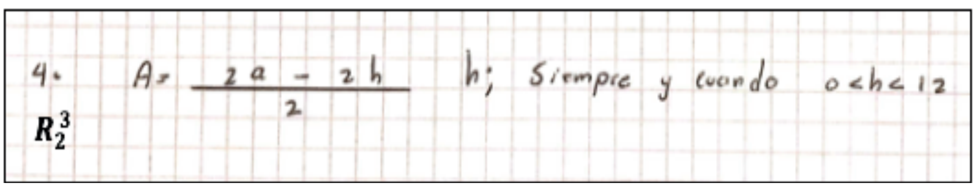
Figura 6. Luengiaje natural, grupo 2


3) ¿Cual es el rectangulo de mayor area que se puede construir?
Según la gráfica, los puntos o la coordenada (6,6) forman un rectangulo que al calcular el area nos da como resultado 36, que al comparar con las demas areas resulta siendo el mayor.

Fuente: Elaboración propia

En cuanto a la cuarta pregunta, para llegar a la expresión algebraica que permita hallar el área de cualquier rectángulo con 24cm de perímetro, en uno de los grupos se evidencia el tratamiento que se realiza al interior del registro algebraico r^3, sin embargo, en la expresión definitiva que se muestra se requiere tanto del valor de la base como la altura para reemplazar en ésta (Figura 8), contrario a la del otro grupo, en la cual solo se requiere una dimensión para determinar al área del rectángulo (Figura 7); no obstante, al observar la expresión obtenida por el grupo 2 (Figura 8), se puede llegar a expresar como una función de una sola variable, sea la base o la altura, lo cual permite obtener una expresión similar a la del grupo 1, sabiendo que el valor de “P” equivale a 24cm.

Figura 7. Respuesta del grupo 2

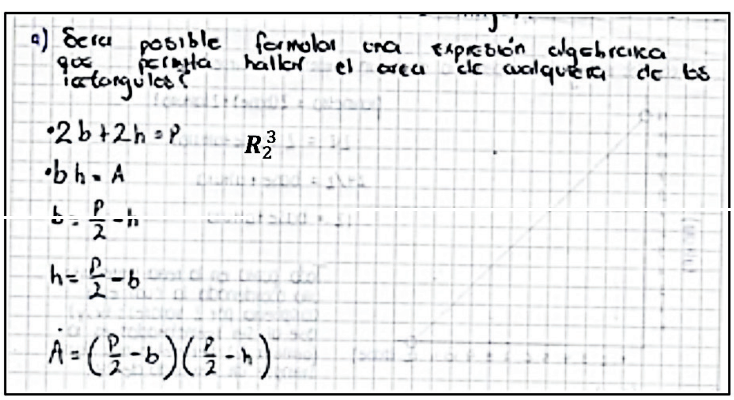

4. $A = \frac{2a - 2h}{2} h$; Siempre y cuando $0 < h < 12$

R_2^3

Fuente: Elaboración propia

Figura 8. Respuesta del grupo 1

Tratamiento


a) Sera posible formular una expresión algebraica que permita hallar el area de cualquiera de los rectangulos?

$\bullet\, 2b + 2h = P$ R_2^3

$\bullet\, bh = A$

$b = \frac{P}{2} - h$

$h = \frac{P}{2} - b$

$A = \left(\frac{P}{2} - b\right)\left(\frac{P}{2} - h\right)$

Fuente: Elaboración propia

Respecto al ciclo de modelación, la primera etapa se da al identificar la relación que existe entre las dimensiones de los rectángulos, mencionando que entre más pequeña sea la diferencia entre éstas, mayor será el área de cada rectángulo; así mismo, luego de usar por ejemplo, la representación tabular, se llegó a la representación algebraica del modelo matemático que puede usarse para hallar el área de cualquiera de los rectángulos de 24cm de perímetro, conociendo solo una de sus dimensiones (Figura 7 y 8), incluso se delimitan los valores que puede tomar la variable independiente, que en este caso corresponderá al valor de la dimensión conocida (Figura 7).

En relación con la segunda etapa del ciclo de modelación, solo el grupo 1 retomó los datos de la tabla que representa la relación entre las dimensiones de los rectángulos y su respectiva área, reemplazando algunos valores para la altura y obteniendo el valor correcto para el área a través de la expresión algebraica que habían propuesto.

Consideraciones finales

Es importante resaltar que el proceso de investigación genera un ambiente abierto de conocimiento para las partes involucradas (docentes-estudiantes), además, es una fuente enriquecedora de saberes, pues en la práctica docente es necesario entrelazar la investigación como una línea de formación propia que facilite instrumentos y genere nuevas concepciones, así mismo que se oriente en fundamentos teóricos y metodológicos que sean necesarios para su desarrollo (Gutiérrez, Almaraz & Bocanegra, 2019).

Respecto al desarrollo de la actividad, se observa que al abordar cada pregunta planteada se dio la conversión entre registros semióticos de representación, así como el tratamiento al interior de algunos de ellos, pero todo el tiempo se evidenció la relación entre los registros; es decir, los estudiantes reconocieron que todos hacían referencia a la misma situación, proceso que resulta fundamental para comprender un objeto matemático, en consecuencia para enseñarlo y aprenderlo, ya que si no se relacionan todas sus representaciones se puede llegar a considerar que cada una se refiere a un objeto matemático distinto (Duval, 2006).

Así mismo, como se mencionó anteriormente, durante el desarrollo de la actividad se dio el ciclo de modelación matemática, y este a su vez favoreció el tránsito entre representaciones semióticas, lo cual se considera de gran utilidad, ya que darle prioridad a una representación sin transitar a las otras no es favorable para el aprendizaje de un concepto, debido a que no es suficiente contar con varias representaciones si no se desarrolla la habilidad de pasar de una a otra cuando sea necesario (Acosta, 2005).

Por otro lado, podría decirse que la modelación contribuye en la identificación y comprensión de cantidades dependientes e independientes, facilita establecer relaciones de variación entre las cantidades que intervienen en cada situación, fortaleciendo las habilidades para reconocer e interpretar una función, en este caso recurriendo a las diferentes representaciones semióticas; así, de acuerdo a Posada y Villa (2006) el reconocimiento del concepto en diferentes ámbitos relacionados con fenómenos de variación, puede darle un sentido más dinámico y aplicado.

Finalmente, el uso de las representaciones de la función se dio desde la antigüedad, aspecto que se emula de cierta forma al abordar las actividades de modelación matemática de funciones, y el acercarse a algunos rasgos del proceso histórico que ha tenido un concepto para llegar a la formalización, puede contribuir a una mejor comprensión del mismo (González, 2004); además, para que los estudiantes tengan acceso a dichos conceptos, deben construirlos en contextos empíricos para luego refinarlos y establecerlos de manera formal (Tall & Vinner, 2002, citados por, Aya, Echeverry & Samper, 2016).

Referencias

Acosta, J.A. (2005). Tránsito entre representaciones en Matemáticas ¿Pensamiento global o local? *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa, 18,* (pp. 5-10). Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Aravena, M., Caamaño, C. & Giménez, J. (2008). Modelos matemáticos a través de proyectos. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 11* (1), 49-92.

Aya, O., Echeverry, A. & Samper, C. (2016). ¿Es el cuadrado un rectángulo? *Sophia, 12* (1), 139-158.

Azcárate, C. & Deulofeu, J. (1996). *Funciones y gráficas.* Madrid: Síntesis.

Cantoral, R. (1993). Hacia una didáctica del Cálculo basada en la cognición. *Publicaciones Centroamericanas, 7*, 391-410.

Cantoral, R. (2001). Enseñanza de la Matemática en el nivel superior. *Revista electrónica sinéctica 19*, 3-27.
Duval, R. (1999). *Semiósis y pensamiento humano. Registros semióticos y prendizaje intelectual.* (Trad. M. V. Restrepo) Santiago de Cali, Artes Gráficas Univalle.
Duval, R. (2006). Un tema crucial en la educación matemática: la habilidad para cambiar el registro de representación. *La gaceta de la Real Sociedad Matemática Española, 9* (1), 143-168.
Duval, R. (2013). Prólogo. En B. D´Amore, M. I. Fandiño y M. Lori, *La semiótica en la didácica de la matemática* (pp.7-9). Magisterio.
Duval, R. & Saénz, A. (2016). *Comprensión y aprendizaje en matemáticas : perspectivas semióticas seleccionadas.* Bogotá: Universidad Distrital Francisco José de Caldas.
Font, V. (2011). Funciones. En J. Goñi, J. Barragués, M. Callejo, J. Fernández, S. Fernández, V. Font y G. Torregrosa, *Matemáticas, Complementos de formación disciplinar* (pp. 145-185). Graó.
Gonzalez, P. M. (2004). La historia de la matemática como recurso didáctico e instrumento para enriquecer culturalmente su enseñanza. *Suma, 45*, 17-28.
Gutiérrez, D., Almaraz, O. & Bocanegra, N. (2019). Concepciones del docente en sus formas de percibir el ejercicio de la investigación desde su práctica. *Revista de investigación, desarrollo e innovación*, *10* (1), 149-161. doi: 10.19053/20278306.v10.n1.2019.10019
Guzmán , I. (1998). Registros de representación, el aprendizaje de nociones relativas a funcions: voces de estudiantes. *Revista oficial del Comité Latinoamericano de Matemática Educativa A.C, 1* (1), 5-21.
Guzmán, M. (1992). Tendencias innovadoras en Educación Matemática. *Simposio Iberoamericano sobre Educación Matemática*, (pp. 9-34).
Hernández, R., Fernández, C. & Baptista, P. (2014). *Metodología de la investigación.* Mc Graw Hill.
Hitt, F. (2002). *Funciones en Contexto.* Pearson Educación.
Jiménez, A. (2019). La dinámica de la clase de matemáticas mediada por la comunicación. *Revista de Investigacion, desarrollo e innovacion, 10* (1), 121-134. doi: 10.19053/20278306.v10.n1.2019.10016
Leithold, L. (1998). Funciones como modelos matemáticos. En L. Leithold, *El cálculo* (pp. 20-28). Oxford University Press.
López, J. & Sosa, L. (2008). Dificultades conceptuales y procedimentales en el aprendizaje de funciones en estudiantes de bachillerato. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, (pp. 308-318). Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.
Ospina , D. (2012). *Las representaciones semióticas en el aprendizaje de la función lineal.* Tesis de Maestría no publicada, Universidad Autónoma de Manizales , Manizales, Colombia.
Posada, F. & Villa, J. (2006). El razonamiento algebraico y la modelación matemática. *Didáctica de las matemáticas, 2* (2), 127-163.
Riscanevo, L. E., Cristancho, K. J. & Fonseca, C. P. (2011). La influencias del contrato didáctico en el aprendizaje del concepto de función. *Praxis & saber, 2* (3), 119-137
Salinas, P. & Alanís, J. (2009). Hacia un nuevo paradigma de la enseñanza del Cálculo. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 12* (3), 355-382
Sastre, P., Rey, G. & Boubée, C. (2008). El concepto de función a través de la historia. *Revista Iberoamericana de Educación Matemática* (16), 141-155.
Skovmose, O. (2000). Escenarios de investigación. *EMA, 6* (1), 3-26.
Spivak, M. (1996). Funciones. En M. Spivak, *Cálculo infinitesimal* (pp. 49-70). Reverté S.A
Stewart, J. (2012). Funciones y modelos. En J. Stewart, *Cálculo de una variable* (pp. 9-75). Cengage Learning.
Trigueros, M. (2009). El uso de la modelación en la enseñanza de las matemáticas. *Innovación Educativa, 9* (46), 75-87.
Ugalde, W. (2014). Funciones, desarrollo histórico del concepto y actividades de enseñanza aprendizaje. *Matemática, educación e internet, 14* (1), 1-48.
Villa, J. A. & Ruiz, H. M. (2009). Modelación en Educación Matemática: una mirada desde los lineamientos curriculares colombianos. *Revista virtual Universidad Católica* (27), 1-21.