EL CONCEPTO DE GRUPO BASADO EN LOS MODOS DE PENSAMIENTO: EL CASO DEL GRUPO DE ORDEN 2

THE CONCEPT OF THE GROUP BASED ON THE MODES OF THOUGHT: THE CASE OF THE ORDER GROUP 2

Samuel Campos, Marcela Parraguez
Pontificia Universidad Católica de Valparaíso (Chile).
samuel.campos.c@mail.pucv.cl, marcela.parraguez@pucv.cl

Resumen:
La investigación presenta un estudio sobre las distintas maneras de comprender el concepto de grupo desde una variación de la Teoría Modos de Pensamiento, perspectiva que caracteriza las formas de ver y entender los conceptos del Álgebra Lineal, y que ahora se instala en el Álgebra Abstracta. Se presenta un análisis de las respuestas de un profesor de Matemática en su formación inicial frente a situaciones que involucraban la estructura de grupo de orden 2. Cada una de estas situaciones fue diseñada desde un modo de pensamiento particular para los grupos: modo Sintético-Geométrico (SG), modo Analítico-Aritmético (AA) y modo Analítico-Combinatorio (AC). A su vez, cada uno de estos modos fue desarrollado a partir de un estudio histórico-epistemológico del concepto de grupo y dan sustento a la variedad teórica de los modos de pensar. Las respuestas del participante permiten relacionar las distintas estrategias con determinados modos de pensar el concepto de grupo de orden 2.

Palabras clave: modos de pensamiento, grupo, comprensión

Abstract:
The research presents a study of the different ways of understanding the concept of group from a variation of the Modes of Thought Theory, a perspective that characterizes the ways of seeing and understanding the concepts of linear algebra, and that is now installed in Abstract Algebra. An analysis is presented of the responses by a mathematics teacher in his initial training to situations involving the group structure of order 2. Each of these situations was designed from a particular mode of thinking for the groups: Synthetic-Geometric (SG), Analytic-Arithmetic (AA), Analytic-Combinatorial (AC). In turn, each of these modes was developed from a historical-epistemological study of the group concept and support the theoretical variety of modes of thinking. The participant's responses allow us to relate the different strategies to specific ways of thinking about the group concept of order 2.

Key words: modes of thought, group, comprehension

Introducción

El presente trabajo reporta el análisis de los primeros datos de una investigación de corte cognitivo sobre la comprensión que tiene un estudiante de Pedagogía en Matemática durante su formación inicial, sobre el objeto matemático Grupo. Para analizar la comprensión de este objeto matemático se consideró como marco de referencia una variación de los Modos de Pensamiento propuesto por Sierpinska (2000), tal variación responde al cambio de objeto matemático estudiado –del Álgebra Lineal al Álgebra Abstracta–. Bajo esta perspectiva teórica, los estudiantes evidencian una adecuada comprensión de un concepto cuando son capaces de seleccionar y/o articular diferentes modos de pensarlo en función de las características propias de ver y entender dicho concepto en una actividad. La caracterización de tales modos de pensar los Grupos se sustentó a partir del estudio de la historia de este concepto y su epistemología. Tal caracterización será la base de esta variación teórica de los Modos de Pensamiento. Las respuestas del profesor en formación frente al instrumento de toma de datos permiten al investigador evaluar la pertinencia del modelo teórico y, a su vez, caracterizar las estrategias puestas en juego por el participante e identificar los elementos que permiten reconocer una estructura común en las distintas situaciones matemáticas presentadas (la estructura de grupo de orden 2).

Antecedentes

En Chile, la totalidad de las universidades reconocidas por el Estado que imparten la carrera de Pedagogía en Matemática tiene en su malla curricular una asignatura relacionada con el estudio de las estructuras algebraicas (datos recogidos del proceso de admisión 2020). En todos estos casos, la asignatura aborda las estructuras de grupo y de anillo, incluso algunos programas llegan a cuerpos y extensiones de cuerpos. Por otro lado, los Estándares Orientadores para carreras de Pedagogía en Educación Media (Ministerio de Educación de Chile [MINEDUC], 2012) declaran explícitamente "los conocimientos mínimos e imprescindibles que cada profesor o profesora debe saber en el ámbito de su disciplina y de la enseñanza de la misma" (p. 3). En particular, en cuanto a los estándares sobre matemática, el documento define cinco grandes áreas: Sistemas Numéricos y Álgebra, Cálculo, Estructuras Algebraicas, Geometría y Datos y Azar.

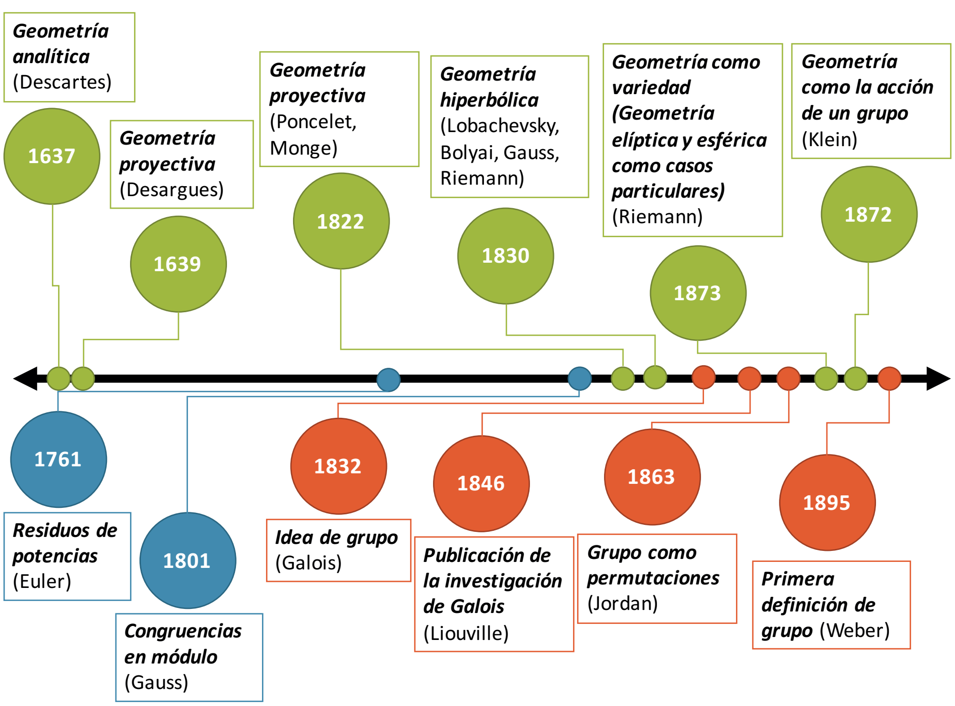
El indicador concerniente al área de Estructuras Algebraicas sostiene que el profesor "es capaz de conducir el aprendizaje de la divisibilidad de números enteros y de polinomios y demuestra competencia disciplinaria en su generalización a la estructura de anillo" (MINEDUC, 2012, p. 20).

A partir de estos hechos se puede evidenciar un claro interés (al menos a nivel nacional) en que los profesores de Matemática manejen estos conceptos básicos de Estructuras Algebraicas. Esto último coincide con lo reportado por algunas investigaciones en otros contextos educacionales. Por ejemplo, la investigación de Dubinsky, Dautermann, Leron y Zazkis (1994) sostiene que, dado que un porcentaje significativo de la audiencia de estudiantes de Álgebra Abstracta consiste en futuros profesores de Matemáticas, es particularmente importante que la profesión de Educación Matemática desarrolle estrategias pedagógicas efectivas para mejorar la actitud de los profesores de Matemáticas de secundaria hacia la abstracción matemática (p. 268).

Por otro lado, otras investigaciones dan cuenta de que el conocimiento de matemáticas avanzadas (aquellas que van más allá de lo curricular) pueden impactar positivamente la instrucción de los profesores. En este sentido, Wasserman (2016) señala que, específicamente, ese conocimiento de las matemáticas avanzadas puede transformar las propias percepciones de los profesores sobre las matemáticas escolares en el sentido de que se ve bajo una nueva luz, que el significado o la comprensión de las ideas cambia, o que el contenido en sí mismo se reorganiza, reordena o reestructura en la mente del profesor, indicativo de lo que Piaget (1952) llamó "acomodación", no solo asimilación (p. 30).

Como podemos apreciar, desde la investigación también se sugiere conectar estas nociones de matemáticas avanzadas con los conceptos matemáticos que aborda el currículo en la escuela. A pesar de lo anterior, varias investigaciones dan cuenta de la dificultad que tienen los estudiantes en adquirir estos conceptos del Álgebra Abstracta (Dubinsky *et al.*, 1994; Edwards y Brenton, 1999; Hazzan, 1999; Sepúlveda, 2016). Nuestra hipótesis es que la manera en que se presenta el estudio de los grupos en la formación inicial docente, desde un enfoque formalista, privado del proceso de abstracción que lo constituyó, suscita dificultades en la comprensión del concepto de grupo en los estudiantes. Para esto, nos planteamos como objetivo general de la investigación generar una secuencia de actividades que promuevan la conexión entre las distintas maneras de comprender el concepto de grupo. En particular, este trabajo, como un reporte de esta investigación, tiene por objetivo analizar las respuestas de un profesor de Matemáticas en formación inicial respecto a diversas situaciones matemáticas que abordaban la estructura de grupo de orden 2 de manera implícita. Tales respuestas las contrastaremos con el modelo teórico de los modos de pensar el concepto de grupo: modo Sintético-Geométrico (SG), modo Analítico-Aritmético (AA) y modo Analítico-Combinatorio (AC). Este contraste entre las respuestas a las situaciones diseñadas y el modelo teórico nos permitirá evaluar la pertinencia de la variedad del modelo y la operacionalización al analizar y clasificar las estrategias de este participante de la investigación en uno u otro modo de pensar. Es preciso mencionar que la caracterización de los tres modos de pensar el concepto de grupo se fundamenta en un estudio previo sobre la historia y epistemología del concepto de grupo, como se muestra sucintamente en la Figura 1, donde el color verde corresponde al desarrollo de las diversas geometrías que concluye con su formalización usando acciones de grupos, el color azul a los aportes de Euler y Gauss a la aritmética modular donde están implícitas varias propiedades de grupos finitos, y el color rojo al desarrollo del concepto de grupo como la composición de permutaciones de un conjunto finito.

Figura 1. Estudio histórico y epistemológico del concepto de grupo.

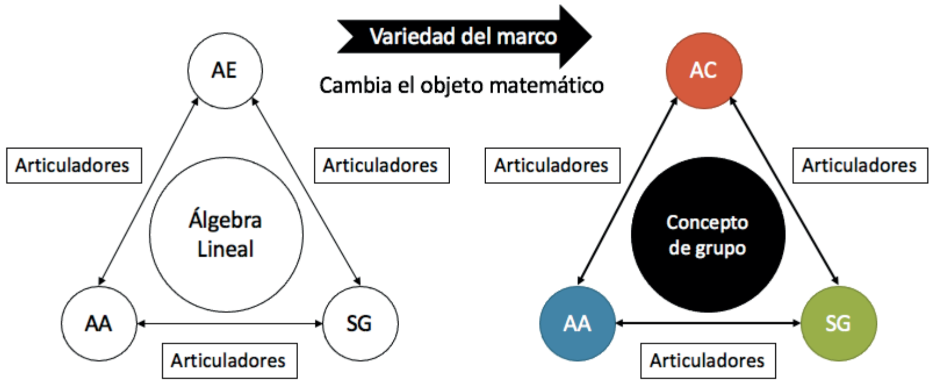


Fuente: Elaboración propia

Marco teórico

La investigación se sustenta en una variedad de la perspectiva teórica de los Modos de Pensamiento de Sierpinska (2000). Estos Modos de Pensamiento son un marco de referencia de la Didáctica de la Matemática que nos provee de elementos para investigar aspectos relacionados con los procesos de aprendizaje del Álgebra Lineal. El marco sostiene que los tópicos del Álgebra Lineal se desarrollaron bajo la coexistencia de tres modos de pensar: el modo Sintético-Geométrico (SG), el Analítico-Aritmético (AA) y el Analítico-Estructural (AE). En nuestro caso, la investigación propone una variación de este marco teórico, cambiando el objeto matemático de estudio del Álgebra Lineal, a la Estructura Algebraica de Grupo (Figura 2).

Figura 2. Variedad de los Modos de Pensamiento al concepto de grupo.



Fuente: Elaboración propia

Para construir esta variedad teórica, la investigación se basó en el análisis de la Figura 1, el que es el fundamento sobre el cual se elaboraron los tres modos de pensar los grupos.

Cada uno de los modos de pensar el concepto de grupo se elaboró basado en las raíces históricas que dieron forma dicho concepto.

> El proceso de la Formación de la noción abstracta de estructura de grupo, tuvo como raíces históricas: la teoría de ecuaciones algebraicas, la teoría de números y la geometría, a partir de las cuales surgió la noción de estructura matemática como resultado de la toma de conciencia de profundos fenómenos de isomorfismos. (Ortega, 2011, p. 268)

De estas tres raíces, la más visibilizada en los textos de estudio es la de la teoría de ecuaciones algebraicas, invisibilizando las otras dos raíces. Wussing (2007) sostiene que la existencia de dos raíces adicionales de la teoría de grupos abstractos se ha oscurecido principalmente por el hecho de que los modos de pensamiento de la teoría de grupos en la teoría de números y la geometría permanecieron implícitos hasta el final del tercio medio del siglo diecinueve; no utilizaron el término "grupo" y, al principio, prácticamente no tenían ningún vínculo con el desarrollo contemporáneo de la teoría de los grupos de permutación. Así, el historiador se ve obligado a buscar en grandes áreas del desarrollo de las matemáticas patrones de razonamiento, métodos y conceptos equivalentes a los métodos y conceptos modernos de teoría de grupos, y rastrear la evolución de dicho pensamiento teórico grupal implícito hasta la etapa de la teoría explícita de grupos (p. 17).

De este modo, a partir del desarrollo histórico epistemológico del concepto de grupo y del análisis de estas tres raíces, fue posible caracterizar tres modos de pensar el concepto, los cuales se describen a continuación:

> **Modo Sintético-Geométrico (SG):** Se basa en las transformaciones isométricas en el plano cartesiano, esto es, las estrategias que usen las rotaciones o simetrías de polígonos en el plano cartesiano o sus propiedades las entenderemos bajo la categoría de modo SG.

Modo Analítico-Aritmético (AA): Se basa en las congruencias modulares en $\mathbb{Z}$, esto es, las estrategias que usen congruencias, residuos bajo el módulo de un entero o propiedades de los múltiplos de algunos enteros las entenderemos bajo la categoría de modo AA.
Modo Analítico-Combinatorio (AC): Se basa en el conjunto de permutaciones de un conjunto finito y sus composiciones, esto es, las estrategias que usen elementos de estas permutaciones, sus composiciones o propiedades de estas composiciones (como el orden de un elemento) las entenderemos bajo la categoría de modo AC.

Metodología

La investigación se basa en una metodología cualitativa, particularmente bajo una perspectiva epistemológica hermenéutica-interpretativa. El objetivo es indagar cómo se comprende el concepto de grupo. Para esto, usaremos como estrategia metodológica el estudio de casos de tipo instrumental (Stake, 1999), pues consideramos que es un método pertinente para estudiar a fondo las diferentes comprensiones de la estructura algebraica de grupo que tienen cada uno de los sujetos de estudio, atendiendo la singularidad y complejidad de cada una de estas comprensiones.

Los sujetos de estudio fueron un grupo de 5 estudiantes de Pedagogía en Matemática durante su formación inicial, con la característica que ninguno de ellos había cursado previamente una asignatura sobre estructuras algebraicas. La participación en la investigación fue completamente voluntaria. En particular, en este reporte nos centraremos en las respuestas de uno de estos participantes sobre las preguntas que abordaban la estructura de grupo de orden 2, porque esas respuestas son representativas de lo que se realizó.

A partir de la caracterización de los modos de pensar los grupos, se elaboraron distintas situaciones que abordaban la misma estructura algebraica, pero desde diferentes modos de pensar. En total el instrumento se compuso de 7 situaciones, entre ellas algunas referidas al grupo de orden 2, otras al grupo de orden 3 y otras referidas al grupo de orden 6.

Las situaciones que analizaremos son las que involucran la estructura de grupo de orden 2. Estas son las siguientes:

Situación 1: Identificar todos los movimientos que dejan invariante la figura de una letra T.
Situación 2: Analizar los restos de la división por 2 de la suma de dos enteros. En otras palabras, si $x, y \in \mathbb{Z}$, analizar los restos de la división $(x + y) \div 2$ para los ditintos valores de x e y.
Situación 3: Analizar las permutaciones y las composiciones de estas, en un conjunto con 2 elementos.
Situación 8: Analizar los restos de la división por 2 de la suma de dos enteros. En otras palabras, si $x, y \in \mathbb{Z}$, analizar los restos de la división $(x \cdot y) \div 2$ para los distintos valores de x e y.
Situación 7: Establecer similitudes o diferencias entre las situaciones previamente estudiadas.

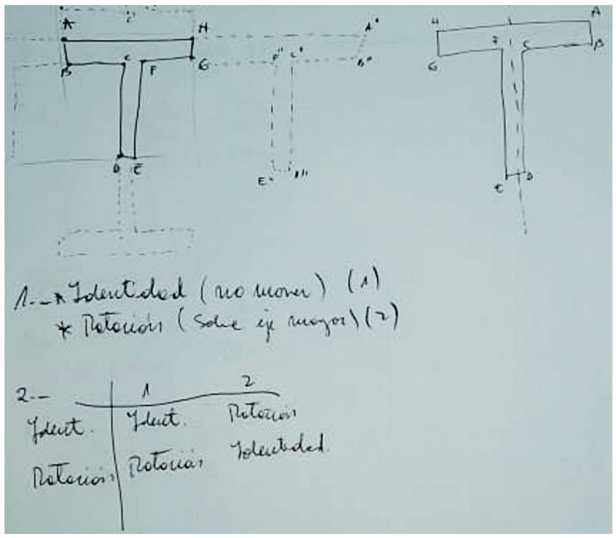
Como se puede apreciar, la numeración no es consecutiva. Esto se debe a que el instrumento, al tener siete situaciones, fue aplicado en dos sesiones. Además, posteriormente a estas sesiones llevamos a cabo una entrevista semiestructurada con el propósito de profundizar en las respuestas de los participantes. En esta entrevista propusimos dos situaciones adicionales, una de ellas es la situación 8 descrita anteriormente.

Es preciso mencionar que en cada una de las situaciones 1, 2 y 3 se le solicitaba al participante sintetizar sus hallazgos en una tabla de doble entrada, donde resumiera la forma en que estaban operando los elementos de cada situación presentada. Luego, en la situación 7 los participantes debían identificar elementos clave en las respuestas de las situaciones previamente estudiadas que les permitieran identificar o reconocer una estructura común en las distintas situaciones.

Análisis de resultados

Los resultados que se presentan pertenecen a uno de los participantes de la investigación, al que llamaremos René. Él desarrolló correctamente las tres situaciones iniciales del instrumento. La Figura 3 muestra la respuesta que entregó a la situación 1, explicitando elementos del modo SG como la rotación e identidad que hacían invariante a la letra T.

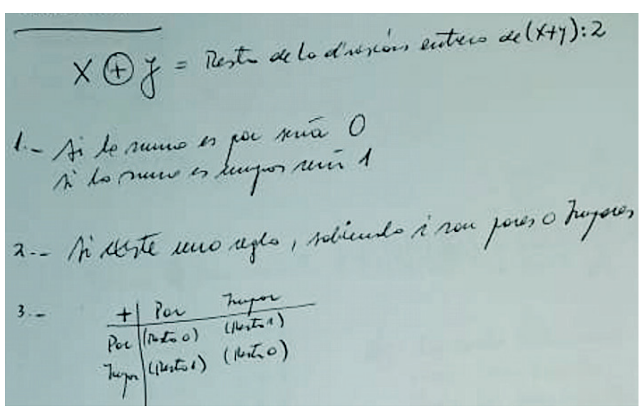
Figura 3. Respuesta de René a la situación 1.



Fuente: Elaboración propia

La respuesta de René ante la situación 2 muestra el uso de categorías como par e impar en el análisis de la situación, así como también el uso de los restos asociados a estas categorías (Figura 4). Ambas estrategias las asociamos con el modo AA.

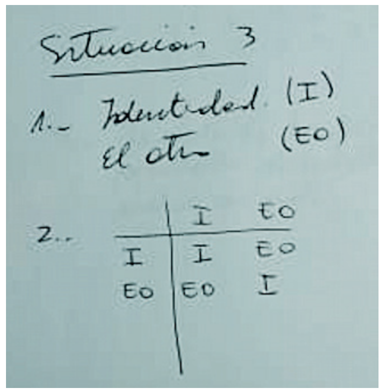
Figura 4. Respuestas de René a la situación 2.



Fuente: Elaboración propia

Siguiendo el cuestionario, la respuesta escrita de René a la situación 3 es más sintética y solo da muestras del uso de composición de las permutaciones por la tabla generada y por los nombres dados a estas composiciones (Figura 5). A partir de esta respuesta intuimos que el participante está desarrollando estrategias desde el modo AC pero hace falta una posterior entrevista para confirmarlo.

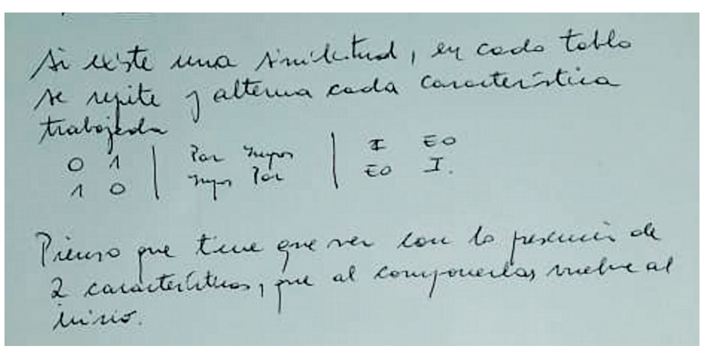
Figura 5. Respuestas de René a la situación 3.



Fuente: Elaboración propia

Al abordar la situación 7, René expone la similitud de estas primeras tres situaciones basándose en una característica común: "En cada tabla se repite y alterna cada característica trabajada". La respuesta de René ilustrada en la Figura 6 muestra la identificación de una similitud en las tablas al ponerlas una al lado de otra. Sin embargo, es interesante destacar que la primera tabla descrita en esta respuesta no pertenece a ninguna de las tres situaciones. Esta tabla con ceros y unos es más bien una primera generalización de estas tablas.

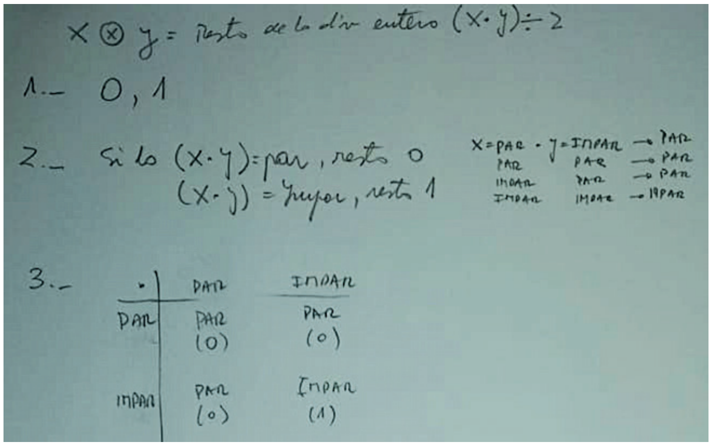
Figura 6. Respuestas de René a la situación 7.



Fuente: Elaboración propia

Observando que René asocia la similitud con la cantidad de características trabajadas y su alternancia, le propusimos resolver la situación 8. La Figura 7 muestra la respuesta de René ante esta nueva situación.

Figura 7. Respuestas de René a la situación 8.



Fuente: Elaboración propia

Al ser consultado por la semejanza entre esta nueva situación 8 y las situaciones anteriores, René expresa que: “No existe relación, ya que los resultados son distintos… tenemos 3 posibilidades que dé par versus 1 que es par, mientras que en las situaciones anteriores había 2 par y 2 impar”. Posteriormente en la entrevista, René, buscando alguna posible explicación de esta diferencia, expresa lo siguiente (E de Entrevistador y R de René):

> E27: Ya. ¿Y qué me podrías decir de la situación 8? ¿Es igual? Porque también se están relacionando dos elementos.
> R27: No [se ríe]. Y eso me generaba ruido. Entonces decía yo: **Pero por qué… por qué esto me sale distinto a los demás, si tiene esa paridad de términos. O sea, digamos tiene dos elementos también, par e impar, par e impar. Pero creo que tiene que ver con la ley de las multiplicaciones, no sé… con algo con el tema con las multiplicaciones.**

Podemos apreciar que René intuye que la razón por la cual la tabla queda diferente, incluso identificando dos elementos en juego, es por la multiplicación. Este hecho es interesante leerlo a la luz de las investigaciones de Dubinsky *et al.* (1994), quienes señalan que en la primera fase del aprendizaje del concepto de grupo, un estudiante puede interpretar un grupo principalmente en términos de sus elementos, es decir, como un conjunto. Si el individuo permanece en esta comprensión elemental de los grupos, es posible que no distinga un grupo por nada más que el número de elementos que contiene (p. 273).

El esfuerzo de René por entregar una razón que justifique esta diferencia, a pesar de que se esté trabajando con 2 características en la situación, es una muestra que está avanzando en la comprensión del concepto de grupo, dejando atrás la sola identificación de la cantidad de elementos (como conjunto) e incorporando la operación descrita al análisis de la situación. De esta manera, René se va acercando a la noción de grupo como conjunto dotado de una operación (con algunas propiedades puntuales).

Siguiendo con la entrevista, René establece una relación entre las primeras tres situaciones haciendo una correspondencia entre los elementos de cada una de estas situaciones y de la forma en que estos elementos se relacionan consigo mismo bajo la operación en cada situación.

> E33:Podrías darme un ejemplo de alguna situación que tú veas que se cumple en una y que se cumple en otra.

> R33: Eh… [balbucea] cuando yo tengo aquí la identidad… Bueno, cuando yo comparo, por ejemplo, identidad o el mismo con el mismo, no sé, **identidad con identidad, par con par, $\{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}\}$ con $\{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}\}$, siempre me da el mismo resultado.**
> E34: Mmm… ya.
> R34: Ya. Eh… **cuando ya, uno compara una cosa distinta de la otra, siempre da la otra.** No sé si me explico.

En términos matemáticos, René establece la identidad en cada una de las situaciones y corrobora que al componer estos elementos consigo mismo, siempre llegan a ellos mismos, es decir, que $a \circ a = a$, y que además si uno compone este elemento con el otro, siempre queda lo otro, es decir, $a \circ b = b$. Esta verbalizacion es bastante cercana a la forma como se define el grupo de orden 2.

A pesar de las evidencias anteriores, el ejemplo más claro del reconocimiento de esta estructura común es el momento cuando el propio René es quien entrega un nuevo ejemplo, desde un modo AA (punto de vista aritmético), de una situación similar a las situaciones 1, 2 y 3.

> R36: Eso es lo que veo. O sea, si yo comparo lo mismo con lo mismo me da lo que estoy comparando al principio. Si comparo alguno de ellos que son distintos, me da el otro… Es como la ley de los signos…
> E37: Es súper interesante lo que me acabas de decir.
> R37: **Es como la ley de los signos. Si yo hago + por +, me va a dar +. Si hago – con -, me va a dar +, ¿se entiende? Y si hago + con -, si alguno de ellos es distinto, me va a dar -. Tiene como esa onda, de la ley de multiplicación de signos.**

Como mencionábamos, acá el participante René entrega una nueva situación desde el modo AA, la que puede resumirse en la Figura 8.

Figura 8. Situación que propone René para explicar cómo operan los elementos de las situaciones 1, 2 y 3.

$\cdot$	$+$	$-$
$+$	$+$	$-$
$-$	$-$	$+$

Fuente: Elaboración propia

Finalizando la entrevista, René entrega una nueva verbalización más completa que resume la manera en que operan los dos elementos de las situaciones 1, 2 y 3.

> R178: **Entonces, si yo compongo al mismo elemento con el mismo, me da la identidad, si lo compongo con uno distinto, me da el otro elemento.**

Esta es exactamente la caracterización de los elementos de un grupo de orden 2. Matemáticamente tenemos un conjunto con 2 elementos, $A = \{a, e\}$ donde, siguiendo la convención, consideramos e como la identidad.

1. De la primera afirmación de René se tiene que $a \circ a = e$ y $e \circ e = e$.
2. De la segunda afirmación de René se tiene que $a \circ e = e \circ a = a$.

Todo conjunto de dos elementos dotado de una operación en la que cumplan estas dos características es *isomorfo* al grupo de orden 2.

Conclusiones

Las situaciones estudiadas que conforman el instrumento de toma de datos, en conjunto con la posterior entrevista, permitieron levantar elementos que caracterizaban cada uno de los modos de pensar el grupo de orden 2. Se evidencia además que la secuencia de situaciones le permitió al participante conectar determinados elementos de una situación con los de otra, relacionando las diversas situaciones no solo en la cantidad de elementos que involucraban, sino en la manera en que estos elementos se relacionaban con ellos mismos y con los otros a partir de la operación dada en cada situación. Esta similitud de las situaciones y conexión entre los elementos de estas no solo se evidenció en las respuestas escritas del cuestionario, sino que se pudo corroborar en las respuestas en la entrevista posterior, especialmente en el momento en que el participante entrega una nueva situación ajena al cuestionario, donde estaba implícita la estructura de grupo de orden 2. Cabe destacar que esta nueva situación propuesta por el participante está alojada en el modo AA, al relacionar los números positivos y negativos a través de operarlos mediante la multiplicación. Tanto el cuestionario como la posterior entrevista dan cuenta de la articulación que hizo el participante entre los elementos de cada situación alojada en un modo de pensamiento específico. Esta articulación comenzó desde las tablas de resumen de cada situación, pero se particularizó al conectar los elementos de las diferentes situaciones y concluir que, bajo la operación definida en cada situación, las situaciones eran *idénticas*

Por lo tanto, podemos concluir que el diseño de cada una de las situaciones, asociada a un modo de pensar el concepto de grupo de orden 2, facilitó en el participante la identificación de una estructura común que trascendía las situaciones y los objetos estudiados en cada una de ellas, logrando verlas como *la misma situación.*

Agradecimientos

Este trabajo ha sido financiado por el programa de Formación de Capital Humano Avanzado de CONICYT, a través del proyecto FONDECYT Nº1180468.

Referencias bibliográficas

Dubinsky, E., Dautermann, J., Leron, U. y Zazkis, R. (1994). On learning fundamental concepts of group theory. *Educational Studies in Mathematics*, *27*(3), 267-305.

Edwards, T. G. y Brenton, L. (1999). An attempt to foster students' construction of knowledge during a semester course in abstract algebra. *The College Mathematics Journal*, *30*(2), 120-128.

Hazzan, O. (1999). Reducing abstraction level when learning abstract algebra concepts. *Educational Studies in Mathematics, 40*(1), 71-90.

Ministerio de Educación de Chile. (2012). *Estándares orientadores para carreras de pedagogía en educación media.* Recuperado el 19 de diciembre de 2018 de https://www.cpeip.cl/wp-content/uploads/2018/09/Estándares_Media.pdf

Ortega, V. E. (2011). *Formación de la noción abstracta de estructura algebraica: a partir del estudio histórico-epistemológico de los aportes de Cantor y Dedekind.* Tesis de Maestría no publicada, Universidad del Valle. Santiago de Cali, Colombia.

Sepúlveda, D. O. (2016). *Conocimiento didáctico-matemático del profesor universitario para la enseñanza del objeto Grupo*. Tesis de Doctorado, Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia.

Sierpinska, A. (2000). On Some Aspects of Students' thinking in Linear Algebra. En J. L. Dorier (Ed.), *The Teaching of Linear Algebra in Question* (pp. 209-246). Dordretch: Kluwer Academic Publishers.

Stake, R. E. (1999). *Investigación con estudios de casos*. Madrid: Ediciones Morata.

Wasserman, N. H. (2016). Abstract algebra for algebra teaching: Influencing school mathematics instruction. *Canadian Journal of Science, Mathematics and Technology Education*, *16*(1), 28-47.

Wussing, H. (2007). *The genesis of the abstract group concept: a contribution to the history of the origin of abstract group theory*. New York: Dover Publications.