

DESARROLLO DEL SENTIDO NUMÉRICO CON EL USO DEL DIAGRAMA TRIANGULAR EN TIEMPOS DE PANDEMIA COVID-19

DEVELOPMENT OF THE NUMBER SENSE USING THE TRIANGULAR DIAGRAM IN THE COVID-19 PANDEMIC TIMES

María del Pilar Beltrán Soria, René Gerardo Rodríguez Avendaño
Instituto de Educación Media Superior de la Ciudad de México (México).
pilar.beltran@iems.edu.mx, rene.rodriguez@iems.edu.mx

Resumen

En este trabajo, discutimos la necesidad de desarrollar el Sentido Numérico en el tratamiento de información estadística que los estudiantes del nivel medio superior tienen a su disposición de los casos asociados a la pandemia de COVID-19 en México. El propósito es brindar una experiencia que permita a los estudiantes visualizar la progresión de la pandemia y adquirir competencias numéricas útiles para la vida. Se propone que dichas competencias se puedan desarrollar a través de actividades en donde se hace uso del diagrama triangular en contextos aritméticos, algebraicos y geométricos. El diagrama triangular como técnica de análisis estadístico ofrece una alternativa a las gráficas convencionales y puede revelar tendencias no fácilmente detectadas. Se presenta unacaracterización del desarrollo del Sentido Numérico, a través de cuatro fases de desarrollo y su relación con los usos del número, se muestra como el uso del diagrama triangular permite la resignificación de la asociación entre cantidades o medidas al plantearse una situación de predicción.

Palabras clave: argumentación, diagrama triangular, diseño de situación, sentido numérico

Abstract

In this paper, we discuss the need to develop NumberSense in the treatment of statistical information that high school students have at their disposal regarding cases associated with the COVID-19 pandemic in Mexico. The purpose is to provide students with an experience that allows them to visualize the progression of the pandemic and to acquire useful numerical skills for life. Numerical skills are proposed to be developed through activities that use the triangle diagram in arithmetic, algebraic, and geometric contexts. The triangular diagram as a statistical analysis technique provides an alternative to conventional graphs and can reveal trends not easily detected. A characterization of Number Sense is presented, through four phases of development and its relationship with the uses of the number; it was shown how the use of the triangular diagram allows the resignification of the association between quantities or measures when considering a prediction situation.

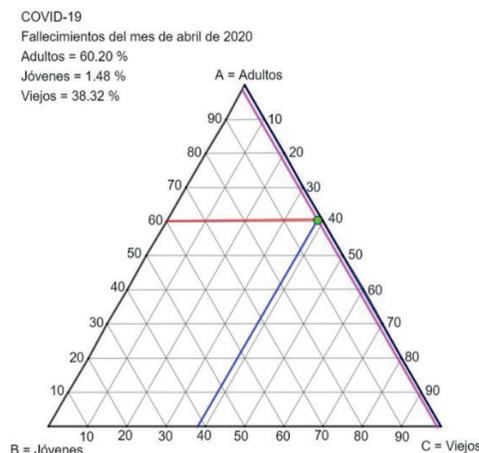
Key words: argumentation, triangular diagram, situation design, NumberSense

■ Introducción

Los coronavirus son una familia de virus que causan enfermedades (desde el resfriado común hasta enfermedades respiratorias más graves) y circulan entre humanos y animales. El coronavirus SARS-COV2 apareció en China y provoca una enfermedad llamada COVID-19, que se extendió por el mundo y fue declarada pandemia global por la Organización Mundial de la Salud. En este trabajo, se examina una situación de aprendizaje en la que los estudiantes usan al diagrama triangular como instrumento de análisis para estudiar los casos de fallecimientos asociados al COVID-19. Se parte de la idea que un aspecto muy importante en el empleo de tablas, gráficas y diagramas para representar fenómenos es la visualización. Se pretende que el estudiante sea capaz de identificar variables y sus relaciones al trabajar con diversos problemas, así como utilizar tablas, gráficas y diagramas para ordenar e interpretar datos. El uso del diagrama triangular permite abordar diversos problemas en donde el hilo conductor es la proporcionalidad. Este concepto se estudia desde la aritmética, el álgebra, la geometría, la probabilidad y la estadística. Se busca que la riqueza del concepto de proporcionalidad y la visualización de fenómenos en el uso del diagrama triangular, permita a los estudiantes percibir a la matemática como un todo.

Desde el punto de vista de Sánchez (1999) el diagrama de composición ternario o diagrama triangular es uno de los mejores medios para la expresión de las observaciones cuantitativas y se emplea para representar gráficamente un punto de cualquier distribución porcentual de tres variables. El diagrama triangular se puede construir sobre la figura de un triángulo equilátero, se asigna un lado a una de las variables y se marcan intervalos de 10 en 10% de manera que en cada vértice coinciden el 0% de una variable y el 100% de otra. De acuerdo con Castaño (1994) para obtener una línea que represente un porcentaje determinado de uno de los componentes (A, B o C), se traza una paralela en el lado opuesto al vértice ocupado por dicho componente de forma tal que sus extremos sean los valores deseados. La concurrencia de diferentes condiciones a cumplir, determinan diferentes lugares geométricos que las cumplan. Estos pueden ser de tres tipos: puntos, líneas o zonas. Para el caso de un punto porcentual, se requiere que tres líneas que representen un porcentaje determinado se intercepten. La Figura 1 muestra un diagrama triangular para la ubicación del punto porcentual 1) Adultos= 60.20%, 2) Jóvenes=1.48% y 3) Viejos=38.32% en el mes de abril.

Figura 1 Ubicación de un punto de composición porcentual en un diagrama triangular.



Nota: Beltrán y Rodríguez (2022)

De acuerdo con Gracia y Novelo (2010), se puede concebir al diagrama triangular como una representación gráfica del comportamiento de una propiedad característica con relación a la composición de un sistema de tres componentes.

Por lo anteriormente expuesto, el diagrama triangular puede proporcionar una manera complementaria para entender lo sucedido con los fallecimientos ocurridos por COVID-19. Esta técnica y su valor explicativo tiene gran utilidad cuando se presentan abundantes datos, de modo que en el triángulo del diagrama aparecen concentraciones de puntos en la zona superior, inferior derecha o izquierda. De acuerdo con Tapia y Tan (2001) el diagrama triangular como técnica de análisis se basa en proporciones relativas de sus tres variables, en lugar de números absolutos, lo que la hace más resistente a posibles errores de datos que subestiman el número real de casos. Por otro lado, destacan que, en el uso del diagrama triangular, la visualización es esencial para un apoyo eficaz de las decisiones.

■ Marco teórico

Con respecto al término Sentido Numérico, no hay una única caracterización, de hecho, a pesar de su importancia, no hay dos investigadores que hayan definido al Sentido Numérico exactamente de la misma manera (Gersten et al., 2005). La principal organización profesional de maestros de matemáticas de los Estados Unidos de América (National Council of Teachers of Mathematics) ha identificado al Sentido Numérico como una sensación "no algorítmica" para los números, una comprensión sólida de su naturaleza y el análisis de las operaciones, así como la necesidad de examinar la razonabilidad de los resultados (NCTM, 1989).

Por su parte, Andrews y Sayers (2015), han identificado tres "perspectivas" para el Sentido Numérico: el Sentido Numérico Preverbal (SNP), el Sentido Numérico Aplicado (SNA) y el Sentido Numérico Fundamental (SNF). El SNP, se refiere a esas ideas numéricas innatas para todos los seres humanos. El segundo, el SNA, se refiere a aquellas competencias relacionadas con el número que hacen que las matemáticas sean sensatas para todos los estudiantes y los prepara para un mundo adulto. Por último, el SNF comprende aquellos entendimientos que requieren instrucción y suelen surgir en primaria y secundaria. Whitacre et al. (2020) identificaron en la literatura tres construcciones sobre el Sentido Numérico: Sentido Numérico Aproximado; Sentido Numérico Temprano y Sentido Numérico Maduro. Estas tres construcciones se alinean con las perspectivas de Andrews y Sayers (2015). Según Back, Sayers y Andrews (2013), el SNA se basa en el SNF, y se refiere a la comprensión relacionada con los números y es el que se requiere que poseen todos los adultos independientemente de su ocupación (McIntosh et al. 1992). Por lo tanto, se puede establecer que el Sentido Numérico no se refiere únicamente al dominio de técnicas para resolver problemas numéricos específicos, sino también a formas cualitativas de razonamiento numérico, las cuales permiten discutir, conjeturar y argumentar en asuntos relativos a las posibles soluciones numéricas de acuerdo con los contextos en los que se presentan ciertas situaciones o problemas, con lo cual, la premisa es implementar tareas o actividades que presenten características de fluidez y flexibilidad, que desarrollen el razonamiento y las habilidades numéricas".

De acuerdo con Hernández et al. (2015) el Sentido Numérico debe incluir las dimensiones métricas, variacionales, algebraicas y geométricas además del estudio de los números, sus relaciones y operaciones. Esta versión ampliada de Sentido Numérico debe ser desarrollada en todos los grados escolares de tal manera que contribuya a la adquisición de competencias numéricas por parte de los estudiantes. Las competencias numéricas se pueden evidenciar a partir del desarrollo del Sentido Numérico, que es un proceso complejo y abarca diferentes componentes que involucran números, sus operaciones y relaciones (McIntosh et al., 1992). En este trabajo se propone caracterizar al desarrollo del Sentido Numérico mediante la adecuada lectura e interpretación de los datos de fallecimientos asociados a COVID-19 que los estudiantes realicen al usar el diagrama triangular, y su tránsito a través de 4 fases del Sentido Numérico: 1) Registrar y almacenar, 2) Facilitar la comunicación de información, 3) Analizar la distribución de datos para obtener conocimiento de su estructura, 4) Generar un juicio.

■ Marco conceptual

De acuerdo con Torres y Montiel (2021) un emergente de interés para la Teoría Socioepistemológica es el significado, que se considera fundamental en el entendimiento y organización de las prácticas. Con la intención de develar el significado construido o en construcción se estudia el uso del conocimiento matemático.

En Fregueiro (2014), se abordan los usos del número en la obra de René Descartes, bajo una mirada Socioepistemológica: Uso geométrico-aritmético; Uso geométrico-algebraico y Uso geométrico-analítico. El tránsito entre diversos contextos (aritmético, geométrico y algebraico) que Descartes realiza, le permite encontrar una manera de representar en lenguaje algebraico, aquellos problemas originados en el contexto geométrico y viceversa, dando evidencia de un uso estructural del número. Con lo cual, el uso del número es caracterizado a partir de la forma en que es empleada o adaptada la noción de número en un contexto específico (aritmético, algebraico o geométrico).

La teoría Socioepistemológica comparte la mirada situacional de la construcción de conocimiento y el reconocimiento de las circunstancias socioculturales que la rodean. De acuerdo con Torres y Montiel (2021) esto constituye la racionalidad contextualizada, en otras palabras, la relación del sujeto con el saber es una función del contexto donde actúa y construye conocimiento, donde el contexto se ha dimensionado en tres niveles: contexto cultural; contexto situacional y el contexto de resignificación.

Esta investigación busca dar cuenta del desarrollo del Sentido Numérico, a través del uso del número, en la resignificación de la asociación entre cantidades o medidas a través de anticipar un valor luego de realizar un análisis de los datos previos, lo que en Caballero y Cantoral (2013) es una de las estrategias variacionales, la predicción. Se emplea la noción de uso de conocimiento matemático descrito por Torres y Montiel (2021) quienes afirman que el uso se da en el ejercicio de prácticas contextualizadas, de él emergen significados que se ponen en funcionamiento en situaciones nuevas y, bajo la consideración de emergente social se resignifica.

Se busca que la situación de aprendizaje genere un interés en los estudiantes por estudiar la asociación de datos a través de predecir la ubicación de un punto porcentual a partir de conocer la distribución de datos previos en función del tiempo transcurrido. De acuerdo con Batanero et al. (2013) el razonamiento distribucional implica conectar datos (distribución de datos, la población donde se tomaron y las posibles muestras de estas) y establecer la asociación entre ellos. Este tipo de razonamiento requiere de problemas donde se planteen cuestiones relativas al cambio de una magnitud en función del tiempo (dependencia funcional) así como a la asociación de datos. En una dependencia funcional a cada valor de una variable X (independiente) corresponde un solo valor de otra variable Y (dependiente), mientras que, en el estudio de la asociación a cada valor de X corresponde una distribución de valores de Y , por lo que el concepto de distribución amplía el de dependencia funcional y se resalta la importancia del concepto de asociación en la toma de decisiones en ambiente de incertidumbre. Considerando lo anterior, la predicción guía el diseño de las acciones didácticas, donde los elementos para el diseño de las acciones didácticas serán aquellos que formen parte del marco epistemológico del conocimiento matemático (Suárez, 2014). Entonces, a partir de un trabajo deductivo en una epistemología de la predicción, se busca que la proporcionalidad ayude a los estudiantes a construir un puente entre la aritmética, el álgebra y la geometría y de esta manera establecer el uso del número asociado a la función orgánica de la predicción como epistemología, donde se presenten formas de uso del número, se construyan argumentos y se pongan en funcionamiento.

■ Metodología

Para dar cuenta del desarrollo del Sentido Numérico, se utiliza un “Diseño de Situación” como herramienta metodológica, ya que de acuerdo con Suárez (2014) permite la transformación entre la epistemología configurada y las acciones a desarrollarse en el sistema didáctico, a través de situaciones de aprendizaje. De esta manera una “situación de aprendizaje” es el conjunto de condiciones de un fenómeno o pregunta que propicie una

problematización, con lo cual, es un conjunto de características de las tareas que realizará el estudiante. El Diseño de Situación se enmarca en la teoría Socioepistemológica en Matemática Educativa, que de acuerdo con Cantoral et al. (2014) se ocupa de estudiar el problema que plantea la construcción social del conocimiento matemático y el de su difusión institucional, al integrar una dimensión social al estudio del sistema didáctico que está constituido por el saber, el profesor, el alumno y sus relaciones.

Para la fase 1 del desarrollo del Sentido Numérico a través del uso del número, se propone en el Momento I (Establecimiento de la forma de una representación visual de datos numéricos) la producción de representaciones funcionales y producciones individuales de uso del número para registrar y almacenar datos. El trabajo de los estudiantes inicia con la elaboración de triángulos equiláteros de manera individual, en el que tienen que elaborar triángulos de diferentes tamaños con el apoyo de papel, regla y compás. Dado que el compás ya no permitirá construir triángulos de mayor tamaño, se emplea el Teorema de Pitágoras que permite obtener la altura que deben tener los triángulos equiláteros que serán utilizados en los diagramas triangulares. El Teorema de Pitágoras es funcional a los estudiantes para comprender el concepto de la proporcionalidad. Además, se presenta un tipo de procedimiento de ejecución, de acuerdo con la tipología propuesta por Sánchez (1999), que les proporciona a los estudiantes la solución de obtener la altura para cualquier triángulo equilátero de una manera puntual y específica. Posteriormente, para la fase 2 del desarrollo del Sentido Numérico en el Momento II (Construcción de argumentos en el uso del número a través de la representación visual) se requiere que se inicie el proceso de la comunicación de la información. Este momento se caracteriza por el trabajo del estudiante con el profesor o con algunos compañeros cercanos o integrantes de su equipo. El trabajo se realiza de manera grupal, en donde intervienen todos los estudiantes con el profesor y se generan debates hasta llegar a consensos.

En la fase 3 del desarrollo del Sentido Numérico, se espera que los estudiantes en el Momento II, analicen la distribución de datos, razonen, conjeturen, discutan y defiendan sus ideas. El *teorema de Viviani* establece que las perpendiculares a los lados de un punto P sobre la frontera o dentro de un triángulo equilátero suman la altura del triángulo. Los estudiantes utilizan las construcciones geométricas para comprobar que el triángulo sea equilátero. Se eligió la prueba geométrica propuesta por Kawasaki (2005) por las ventajas que proporciona para el propósito de este trabajo, como, por ejemplo, es: una demostración eficiente, fácil de visualizar para los estudiantes y que se puede realizar a través de simples rotaciones y traslaciones de triángulos generados a partir de trabajar con un punto al interior del diagrama triangular, motivo por el cual se puede establecer que es un procedimiento del tipo motriz de acuerdo a la tipología propuesta por Sánchez (1999).

Posterior a la comprobación de la obtención del triángulo equilátero para el diagrama triangular, los estudiantes están en posición de ubicar los puntos porcentuales, siguiendo una serie de pasos e indicaciones para lograr ubicar adecuadamente los porcentajes de acuerdo con cada uno de los tres componentes, con lo cual se presenta un tipo de procedimiento algorítmico de acuerdo con la tipología de Sánchez (1999), en donde, si siguen correctamente estos pasos, todos los estudiantes llegan a las mismas localizaciones de los puntos. Se realiza la búsqueda de los datos abiertos asociados al COVID-19, en donde los estudiantes analizan cada uno de los apartados que se encuentran en los informes diarios. En la ubicación de los datos de fallecimiento por COVID-19, los estudiantes trabajan con XLSTAT que es un complemento de análisis de datos de Microsoft Excel que puede ser incorporado por un cierto periodo de prueba, se analizaron los datos de enero a octubre del 2020, de acuerdo con los datos de fallecimientos en la categoría de edad presentados por la Dirección General de Epidemiología. Se recurre a la elaboración de los diagramas triangulares, con el procedimiento reportado por Calmaestra y Capote (2020) para lo cual en los ejes se dispone la población joven (0-14 años), adulta (15-64 años) y anciana (65 y más años). Los datos numéricos correspondientes a los fallecimientos por COVID-19 son ubicados en un diagrama triangular, de acuerdo con los porcentajes de jóvenes, adultos y viejos para cada uno de los meses. La distribución de los datos representados en el diagrama triangular es compartida a todo el grupo con la intención de que se lleve a cabo una coevaluación entre los estudiantes, acerca de sus contenidos, estableciendo disensos y consensos y su posible corrección.

La idea principal es que, para la construcción de un concepto, o para la superación de una dificultad, los estudiantes deben hacer frente de manera cooperativa al aportar e intercambiar sus conocimientos individuales y generar otros

nuevos. Finalmente, en la fase 4 del desarrollo del Sentido Numérico, (Puesta en funcionamiento de lo aprendido, a partir de la reflexión autónoma del uso del número del Momento III) se espera que el uso del diagrama triangular permita a los estudiantes modelar la situación estudiada, se les solicita a los estudiantes realizar una predicción de lo ocurrido para el mes de noviembre de 2020, a partir de la distribución de puntos de los meses anteriores. Los estudiantes realizan un juicio al responder a la pregunta ¿Cuál es la composición porcentual que se esperaría para el mes de noviembre?

■ Resultados

A continuación, se presenta la confrontación de las evidencias recabadas y la situación de aprendizaje propuesta. En el Momento I de la situación de aprendizaje se espera:

- La construcción del triángulo que se utiliza como base para el diagrama triangular y asociar las características geométricas de los triángulos equiláteros. Se busca que la dimensión geométrica y métrica del Sentido Numérico esté presente.
- La construcción de triángulos equiláteros de cualquier tamaño para generar diagramas triangulares. Se busca con ello contribuir a las dimensiones geométrica y algebraica del Sentido Numérico.
- La asignación de los márgenes de variación en cada uno de los lados del triángulo equilátero. Se busca que la dimensión aritmética del Sentido Numérico esté presente.

En el Momento I de la situación de aprendizaje los estudiantes dan sentido a:

- Las características geométricas de los triángulos equiláteros, al identificar que sus ángulos y cada uno de sus lados son congruentes. El tamaño de los triángulos equiláteros está relacionado con la medida de sus lados, a mayor longitud de cada lado, mayor tamaño del triángulo. En la construcción de los triángulos equiláteros, la longitud de cada lado está relacionada con la abertura del compás. En cuanto a la congruencia de ángulos, se verifica que cada uno de ellos debe ser un invariante igual a 60° , independientemente del tamaño del triángulo, lo cual se visualiza mediante la superposición de un triángulo de menor tamaño en otro para identificar si efectivamente coinciden, es decir, si la medida es de 60° . Por lo que, el triángulo pequeño se emplea como unidad de medida en la comparación de los ángulos correspondientes del triángulo de mayor tamaño.
- La incógnita asociada a la determinación algebraica de la altura de un triángulo equilátero de cualquier tamaño. La construcción de triángulos de gran tamaño se encuentra limitada por las características físicas del compás. La abertura de un determinado compás puede ser insuficiente como medida del lado de un triángulo equilátero. La altura de un triángulo equilátero se obtiene por medio del Teorema de Pitágoras de tal manera que $h = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{longitud del lado}$. Adicionalmente, el símbolo como elemento algebraico, aparece para la asignación de cada uno de los componentes en los vértices del triángulo equilátero.
- La escala de cada uno de los lados del triángulo equilátero. La longitud de cada lado del triángulo se subdivide en múltiplos de 10, con lo cual, quedan establecidos los márgenes de variación de cero a 100, que corresponden a los porcentajes de cada uno de los componentes del diagrama triangular. La importancia de establecer los subintervalos a partir de los márgenes de variación radica en que dan lugar a la construcción de las líneas proporcionales del diagrama triangular. En Castaño (1994) se definen las líneas de proporción como aquellas que están formadas por los puntos que configuran los lugares geométricos en los que el porcentaje de una variable se mantiene constante. Cada una de ellas es en realidad un diagrama binario que reparte entre dos variables la proporción que resta tras atribuir al tercer componente un porcentaje fijo y determinado.

El establecimiento del diagrama triangular como una forma de representación visual del número, se da a partir de que los estudiantes construyen el diagrama triangular a través de las líneas proporcionales, así como de localización

de puntos al interior del diagrama y de la visualización de la distribución de puntos de los fallecimientos asociados a COVID-19 en México.

En el Momento II de la situación de aprendizaje se espera:

- La comprobación geométrica del teorema de Viviani para garantizar que se trabaja con un triángulo equilátero. El teorema de Viviani establece que, en un triángulo equilátero, la suma de las distancias desde cualquier punto interior o sobre la frontera a los tres lados es igual a la altura del triángulo. Se busca que la dimensión geométrica del Sentido Numérico esté presente.
- La comprobación aritmética del teorema de Viviani, en la que se verifica que la suma de los porcentajes es igual al cien por ciento, es decir, $\%_A + \%_B + \%_C = 100$. Se busca con ello que las dimensiones métrica y aritmética del Sentido Numérico estén presentes.
- La ubicación de los datos porcentuales del número de fallecimientos asociados a COVID-19 en México. Por lo que se busca que la dimensión estadística del Sentido Numérico esté presente.

En el Momento II de la situación de aprendizaje los estudiantes dan sentido a:

- La prueba visual a partir de rotaciones y traslaciones para demostrar el teorema de Viviani. Dado un punto cualquiera al interior del triángulo equilátero se trazan las perpendiculares a los lados del triángulo, la distancia de cada perpendicular constituye la altura de tres pequeños triángulos. La prueba visual emplea sólo rotación para demostrar el teorema. Como se puede observar en la Tabla 1, al alinear las tres alturas de cada uno de los tres triángulos pequeños, se puede verificar que su suma es igual a la altura del triángulo original. Con lo cual, se tiene que $h_A + h_B + h_C = H$. Cuando el punto se encuentra en la frontera (en uno de los lados del triángulo) se forman solamente dos triángulos pequeños cuyas alturas son las perpendiculares hacia los otros dos lados, nuevamente al alinear las dos alturas la suma es igual a la altura del triángulo. Por lo tanto, se asocia la prueba visual a la comprobación del teorema de Viviani.
- La noción de porcentaje como relación entre dos cantidades a través de una escala. El porcentaje es una razón, es decir una relación multiplicativa entre dos cantidades o conjunto de cantidades. De acuerdo con Mendoza y Block (2010) la adquisición de la noción de razón y por consecuencia del porcentaje, conlleva un paso difícil e importante en el estudio de la aritmética. Dado que el porcentaje puede ser interpretado como una fracción: 50% es “50/100 de”, en el caso de la comprobación aritmética del teorema de Viviani, se puede establecer que, la suma aritmética de los tres porcentajes de un punto al interior del diagrama triangular debe ser igual a 100, o bien, la suma de las fracciones debe ser igual a uno.
- La distribución de puntos porcentuales a partir del uso de las líneas proporcionales y relacionales. Las líneas proporcionales son empleadas a través de trayectorias paralelas que ayudan a los estudiantes a argumentar acerca de que cada punto en el diagrama ternario representa la distribución de fallecimientos en un determinado mes. Adicionalmente, se argumenta acerca del cambio porcentual de cada uno de los componentes (A, B o C) en relación con cada uno de los meses analizados. El cambio porcentual se visualiza a través de la distancia del punto hacia cada uno de los vértices, lo cual, se logra a partir de las líneas relacionales (visualizadas a través de trayectorias diagonales) que se trazan siempre de un vértice al lado opuesto (son lugares geométricos en los que la proporción entre dos variables es siempre constante). Con la ubicación de las composiciones porcentuales al interior del diagrama triangular y de su relación que guarda con los vértices A, B y C, se presenta una apropiación de la idea de distribución y variabilidad de los datos de fallecimientos asociados al COVID-19 en México.

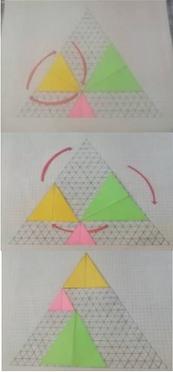
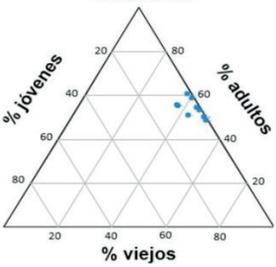
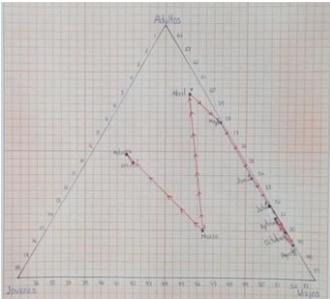
En el Momento II, el trabajar con pruebas visuales en el aula (prueba geométrica del teorema de Viviani) ayuda a los estudiantes a “ver” por qué un enunciado en particular puede ser verdadero, y también “ver” cómo se podría comenzar a trabajar para dar una demostración de que ésta es verdadera (Herrera, 2011).

En la Tabla 1, se presenta la distribución de fallecimientos en un determinado intervalo de tiempo de la pandemia de COVID-19 (la dimensión del tiempo no se representa explícitamente en el diagrama triangular. A partir del mes

de abril de 2020 la composición porcentual de fallecimientos, se ubica prácticamente en el sistema binario adultos-viejos (una frontera) en donde la composición porcentual de jóvenes es muy cercana a cero, cuestión que no se presentó en los meses previos de enero a marzo del 2020, una posible explicación fue la eliminación por parte del gobierno mexicano de datos de fallecimientos ocasionadas por enfermedades que se consideró ya no estaban asociadas a COVID-19, por lo que el número de fallecimientos de jóvenes se vio disminuido. Para los meses de mayo a octubre se presentó un incremento en el porcentaje de personas mayores a 65 años, con lo cual se puede observar la vulnerabilidad de este sector ante la pandemia.

Dado que los datos se ubican en una región muy pequeña del diagrama triangular, es necesario para una mejor visualización, realizar una ampliación de tal región. En donde los nuevos ejes coordenados están asignados de la siguiente forma: para los adultos van de un 46.5 a un 65%, para los jóvenes van de cero hasta 18% y para los viejos de 35 a 53.5%. Las cantidades de cada uno de los porcentajes se trabajan como una magnitud medible, en donde los estudiantes establecen que la población mayormente afectada por COVID-19 son los adultos y viejos, siendo los jóvenes los menos afectados.

Tabla 1 Trabajo con el diagrama triangular en el contexto de datos de COVID-19 en México.

Representación visual	Tarea realizada	Procedimiento
	Realizar la prueba visual del teorema de Viviani empleando la rotación para establecer el teorema.	El procedimiento es del tipo Motriz: Los estudiantes para realizar la comprobación del teorema de Viviani ejecutan acciones observables de forma directa, en este caso, son las rotaciones.
<p>Fallecimientos asociados a COVID-19</p> 	Ubicación de la composición porcentual de adultos, jóvenes y viejos, correspondiente a las defunciones asociadas a COVID-19 de enero-octubre de 2020	El procedimiento es algorítmico: Los estudiantes ejecutan los pasos que hay que realizar para la correcta ubicación de los puntos en el diagrama triangular.
	En una hoja milimétrica realizar una ampliación de la región de los fallecimientos asociados a COVID-19.	El procedimiento es heurístico: En la interpretación de lo que sucede para el mes de noviembre con respecto al análisis de los datos de los meses anteriores

Nota: Beltrán y Rodríguez (2022)

En el Momento III de la situación de aprendizaje se espera:

- La asociación entre cantidades o medidas a través de la predicción. Se busca que la dimensión estadística del Sentido Numérico esté presente.

En el Momento III de la situación de aprendizaje los estudiantes dan sentido a:

- La predicción a partir de la asociación de los datos de fallecimientos asociados a COVID-19 en México. Los puntos porcentuales de los fallecimientos desde el mes de enero hasta octubre de 2020 son asociados a una trayectoria que se traza de acuerdo con las estadísticas proporcionadas por el gobierno de México y está en función de los porcentajes de fallecimientos en las tres edades analizadas, en lugar de un recuento total. El funcionamiento que los estudiantes le dan a la trayectoria generada por los puntos es como un sistema referencial. La distribución de puntos y la trayectoria constituyen elementos que permiten realizar una predicción que se sustenta en el número de fallecimientos.
- Mediante el uso del diagrama triangular, los estudiantes son capaces de extender la idea de dependencia funcional “uno a uno” (en donde a cada valor de una variable le corresponde un único valor de la otra variable) a una concepción de distribución (en donde a cada valor de una variable le corresponde una distribución de valores de la otra variable), con lo cual, dan evidencia de la adquisición de un Sentido Numérico.

■ Análisis de los resultados

En la fase 1 del Sentido Numérico se presenta el uso del número asociado a la geometría del plano, con acciones tales como: ubicar puntos con respecto a puntos de referencia y relacionar puntos dentro del diagrama ternario con coordenadas (x, y) en el plano.

Por lo que, se puede establecer, el uso geométrico del número por parte de los estudiantes.

- 1) Al localizar puntos a lo largo de un segmento de recta,
- 2) Al distinguir representaciones de segmentos de recta.

Adicionalmente, se puede establecer un uso geométrico emergente que está asociado a la geometría proporcional en planos (líneas proporcionales en la construcción).

El uso aritmético-geométrico del número está asociado a lo concreto (los números para medir) y lo asociado a lo comunicativo (comunicar la idea del triángulo equilátero) lo asociado al concepto de triángulo equilátero (el triángulo equilátero visto como objeto matemático que tiene la longitud de sus lados iguales y sus ángulos de 60°) con lo cual, se puede establecer que lo aritmético se concibe mucho más allá de las simples operaciones numéricas. Además, se pueden identificar un uso aritmético-geométrico del número en lo asociado a las razones y proporciones (proporcionalidad en los lados del triángulo equilátero), así como lo asociado a la argumentación (argumentar si se obtiene un triángulo equilátero, empleando el Teorema de Viviani).

En la fase 2 del Sentido Numérico, el uso algebraico del número se presenta al trabajar con la incógnita en el teorema de Pitágoras. Además, el uso algebraico, permite distinguir a los estudiantes lo que pueden y no pueden hacer con los símbolos empleados en el diagrama triangular. Por lo tanto, el uso algebraico del número queda asociado a la literal, asociado al parámetro como cantidad variante y asociado a símbolos sin operación en el trabajo con el diagrama triangular.

En la fase 3 del Sentido Numérico, se puede establecer que aparecen argumentaciones autónomas articuladas acerca del uso del número a partir de la asociación, a partir de la distribución de los datos de fallecimientos asociados a COVID-19 en México.

En la fase 4 del Sentido Numérico, el trabajo que los estudiantes realizaron y sus juicios están en contacto e interacción con la realidad exterior, de manera que se establece un doble proceso simultáneo y continuo: en donde, a la vez, lo sucedido a nivel mundial durante la pandemia de COVID-19, influye en el juicio de los estudiantes, y la perspectiva de los estudiantes se ve influida por su propia imagen construida durante el trabajo con los datos de la Dirección General de Epidemiología.

■ Conclusiones

A partir del trabajo realizado por los estudiantes en los diferentes momentos de la situación de aprendizaje, se da evidencia del desarrollo del Sentido Numérico en el tránsito de las cuatro fases propuestas. Las capacidades numéricas adquiridas por los estudiantes les permiten la lectura e interpretación de los datos de fallecimientos asociados a COVID-19. Con lo cual, la situación de aprendizaje permite adquirir independencia de criterio y juicio crítico. Se concluye que el desarrollo del Sentido Numérico y el desarrollo de competencias procedimentales y actitudinales se conectan entre sí, toda vez que las actitudes son contenidos inseparables de los conceptos y procedimientos en el proceso de construcción del conocimiento. El uso del diagrama triangular a través de un uso estructural del número les permitió a los estudiantes leer, procesar e interpretar la información proveniente de la Dirección General de Epidemiología y hacerla suya, mediante un riguroso análisis crítico.

El uso aritmético, algebraico y geométrico del número que se emplea en el diagrama de composición ternario o diagrama triangular, les permitió a los estudiantes la resignificación de la asociación de los datos de fallecimientos de COVID-19 en México.

El trabajo con los diferentes usos del número en el diagrama triangular se puede considerar como una propuesta para desarrollar el SNA en los estudiantes de un nivel medio superior y su vez les ayuda a concebir al número como un elemento integrador de las matemáticas y concebirlo mucho más allá de los aritmético. El SNA es un tema de gran interés en la matemática y puede ayudar a encontrar soluciones a problemas escolares. Se puede establecer que, el diagrama triangular es una de las maneras de lograr el desarrollo del Sentido Numérico para que los estudiantes sean capaces de hacer “uso del número” en ámbitos algebraicos, geométricos y aritméticos. Es decir, que sean capaces de desempeñarse como sistemas autoorganizados y logren la autonomía necesaria para generar soluciones novedosas a problemas matemáticos, con poco o ningún antecedente. Los estudiantes lograron una integración de los datos que les ayudó a concebir de mejor manera lo sucedido durante la pandemia de COVID-19 en México, lo cual, no es posible si no se desarrollan destrezas de índole actitudinal. Este conjunto de actitudes se desarrolla a través del trabajo con los teoremas de Viviani y Pitágoras entre otros objetos matemáticos, y constituyen la base para la adquisición de nuevas competencias cognitivas. También, les ayuda a lograr la transición de soluciones convencionales preexistentes, hacia nuevas aplicaciones. Adicionalmente, este tipo de propuestas les permite a los estudiantes participar constructivamente como ciudadanos preocupados por la problemática generada por la pandemia de COVID-19.

■ Referencias bibliográficas

- Andrews, P., y Sayers, J. (2015). Identifying opportunities for grade one children to acquire foundational number sense: Developing a framework for cross cultural classroom Analyses. *Early Childhood Education Journal*, 43(4), 257–267.
- Back, J., Sayers, J., y Andrews, P. (2013). *The development of foundational number sense in England and Hungary: A case study comparison*. Paper Presented to the Eighth Conference of the European Society for Research in Mathematics Education, Antalya, Turkey., 1835–1844.
- Batanero, C., Díaz, C., Contreras, J. M., y Roa. R. (2013). El sentido estadístico y su desarrollo. *Números*, 83, 7-18.

- Caballero, M. y Cantoral, R. (2013). Una caracterización de los elementos del pensamiento y lenguaje variacional. En Flores R. (Ed), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* (pp. 1195-1203). Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.
- Calmaestra, J. A. N., y Capote, A. (2020). Geografía del envejecimiento en España y Portugal. *Ería: Revista Cuatrimestral de Geografía*, 40(1), 107–122.
- Cantoral, R., Reyes-Gasperini, D. y Montiel, G. (2014). Socioepistemología, Matemáticas y Realidad. *Revista Latinoamericana de Etnomatemática*, 7(3), 91-116. <https://bit.ly/3s8r0yA>
- Castaño, S. (1994). Mecánica de los diagramas ternarios: Aplicación en el diagrama de clasificación de las rocas ígneas de Streckeisen. *Enseñanza de las Ciencias: Revista de Investigación y Experiencias Didácticas*, 12(3), 406-411.
- Gersten, R., Jordan, N. C., y Flojo, J. R. (2005). Early identification and interventions for students with mathematics difficulties. *Journal of Learning Disabilities*, 38(4), 293–30.
- Hernández, O., López, J., Quintero, A., y Velázquez, A. (2015). *Sentido numérico: más allá de los números*. CreateSpace Independent Publishing Platform.
- Herrera, A. P. (2011). Pruebas visuales y su uso didáctico. [Tesis doctoral no publicada] Facultad de Ciencias Físico Matemáticas. Benemérita Universidad Autónoma de Puebla. México.
- Gracia, J., y Novelo, A. M. (2010). Trayectorias en diagramas ternarios. *Educación Química*, 21(4), 300–305.
- Kawasaki, K. (2005). Proof without words: Viviani's Theorem. *Mathematics Magazine*, 78(3), 213.
- McIntosh, A., Reys, B. J., y Reys, R. E. (1992). A proposed framework for examining basic number sense. *For the Learning of Mathematics*, 12(3), 2–8.
- Mendoza, T., y Block, D. (2010). El porcentaje: lugar de encuentro de las razones, fracciones y decimales en las matemáticas escolares. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 13(4), 177-190. <https://www.redalyc.org/pdf/335/33529137012.pdf>
- National Council of Teachers of Mathematics (NCTM) (1989). *Curriculum and evaluation standards for school mathematics* (NCTM, Ed.). Reston, VA.
- Sánchez, A. (1999). *Conocimiento geográfico procedimientos y técnicas para el estudio de la Geografía en secundaria*. NARCEA, S.A. DE EDICIONES.
- Suárez, L. (2014). *Modelación-graficación para la matemática escolar*. Ediciones Díaz de Santos.
- Tapia, J. y Tan, R. (2021). Ternary diagram for visualizing epidemic progression. *Process Integration and Optimization for Sustainability*, 5, 687-691. <https://link.springer.com/article/10.1007/s41660-021-00170-x>
- Torres-Corrales, D. y Montiel, G. (2021). Resignificación de la razón trigonométrica en estudiantes de primer año de Ingeniería. *Educación Matemática*, 33(3), 171-199. DOI: 10.24844/EM3303.08
- Whitacre, I., Henning, B. L., Romeo, J., y Shakespeare, W. (2020). Disentangling the research literature on “number sense” three constructs, one name. *Review of Educational Research*, 90(1), 202-232.