

ANÁLISIS DIDÁCTICO DE LA PROBABILIDAD FRECUENCIAL

DIDACTIC ANALYSIS OF FREQUENCY PROBABILITY

Ilsyth Johana Leyva Zazueta, Angélica Moreno–Durazo
Universidad de Sonora (México)
ilsethleyva@hotmail.com, angelica.morenodurazo@unison.mx

Resumen

Este trabajo presenta un análisis sobre la enseñanza de la probabilidad frecuencial en la Educación Media Superior en México. Utilizamos herramientas teóricas de la Socioepistemología para analizar la dimensión didáctica a través del estudio de planes y programas, libros de texto y diálogos con docentes, esto como un primer acercamiento hacia una *problematización del saber probabilístico*. Empleamos la idea de *discurso Matemático Escolar* y sus características para verificar que la matemática escolar asociada a los significados de probabilidad privilegia el estudio del significado clásico, restando protagonismo al significado frecuencial y repercutiendo en el desarrollo del razonamiento probabilístico de los estudiantes.

Palabras clave: probabilidad frecuencial, discurso Matemático Escolar, Socioepistemología

Abstract

This paper presents an analysis on the teaching of frequency probability in the Mexican high school. We use theoretical tools of socio-epistemology to analyze the didactic dimension through the study of curricula and syllabuses, textbooks, and dialogues with teachers; this as a first approach towards a problematization of probabilistic knowledge. We use the idea of mathematical school discourse and its characteristics to verify that school mathematics associated with probability notions privileges the study of classical notion, downplaying the frequency notion and affecting the development of students' probabilistic reasoning.

Key words: frequency approach, mathematical school discourse, socio-epistemology

■ Introducción

La diversidad de problemáticas con las que constantemente nos confrontamos precisan que a nivel personal y colectivo se cuenten con las competencias adecuadas para la toma de decisiones. Gran parte de estas problemáticas tienen que ver con aspectos no deterministas, por lo que, el reconocimiento de las situaciones en las que intervienen cuestiones aleatorias ha provocado un incrementado en el interés por el aprendizaje y la enseñanza de la probabilidad. Al respecto, los planes y programas de estudio mexicanos han ido evolucionando e incorporando en sus propuestas de enseñanza, cada vez más contenidos referentes a probabilidad (SEP, 2017b).

Ahora bien, en la actualidad la probabilidad acepta diferentes perspectivas que se complementan entre sí, a saber, el enfoque intuitivo, clásico, frecuencial, subjetivo y axiomático (Batanero, Henry y Parzysz, 2005), que nacen en la búsqueda de atender las problemáticas de los enfoques existentes y ampliar el rango de aplicación de la probabilidad.

Según Batanero, Henry & Parzysz (2005), no se debe limitar el estudio de la probabilidad a una sola perspectiva, sino presentar a los estudiantes un panorama general a través de sus diferentes enfoques, lo que beneficia el desarrollo adecuado del razonamiento probabilístico. Por otra parte, diversas investigaciones realizadas en torno a los enfoques de probabilidad evidencian una inclinación del estudio de la probabilidad desde el enfoque clásico, concentrando en gran medida a métodos de combinatoria y repetición (Godino, Batanero y Cañazares, 1987; Batanero, 2005; Insunza, 2017). Por su parte, Sánchez (2009) señala que la ausencia de la probabilidad frecuentista evita el desarrollo de nociones fundamentales de probabilidad como la aleatoriedad, variación, predictibilidad e incertidumbre.

Cabe resaltar que una de las principales ventajas de estudiar el enfoque frecuencial de probabilidad para el área de la didáctica es el de conectar dos áreas de estudio, estas son la Probabilidad y la Estadística. Por lo que, a partir de consideraciones de diversas investigaciones, enmarcamos la problemática establecida para nuestro proyecto, considerando que la manera actual de estudio de la probabilidad frecuencial es limitada, bajo la hipótesis de que se presenta como un método experimental para la asignación de probabilidades cuando el espacio muestral del experimento aleatorio es desconocido, sin realizar una diferenciación adecuada entre los enfoques probabilísticos.

En consecuencia, presentamos un análisis didáctico de la probabilidad en la Educación Media Superior que brinda un panorama general de cómo es abordada la probabilidad frecuencial dentro del sistema educativo. Con esto en mente, mostramos un análisis transversal de los planes y programas de estudio y analizamos libros de texto vigentes, lo que nos brinda un panorama acerca de los contenidos y el enfoque de enseñanza a seguir; además, diseñamos y ejecutamos un instrumento de diálogo de su enseñanza, el cual se desarrolla con tres profesores en activo de nivel medio superior. En concreto, caracterizamos la enseñanza del enfoque experimental en la Educación Media Superior. Cabe mencionar que en este trabajo reportamos los resultados obtenidos a partir de Leyva (2021), donde se incluye de manera amplia cada etapa de su desarrollo.

■ Marco teórico

Para el análisis de la enseñanza de la probabilidad desde su enfoque frecuencial, se retoman los elementos de la Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa. En las investigaciones dentro de esta teoría se estudian los fenómenos didácticos vinculados con el saber matemático, contemplando toda forma de saber, ya sea popular, técnico o culto, que, de manera integral, forman la sabiduría humana (Cantoral, 2013). Así, la Socioepistemología construye, reconstruye, significa y resignifica el saber, se localiza temporal y espacialmente, se estudia a partir de la perspectiva del contenido de la enseñanza (saber), quien aprende (estudiante) y quien enseña (docente); en otras palabras, se realiza una problematización del saber (Cantoral, Reyes-Gasperini & Montiel, 2014).

En tanto, si se busca el diseño o rediseño de actividades para la enseñanza de la probabilidad, es preciso realizar una problematización del saber que posibilite el diseño de actividades que enfatizan el *valor de uso* del conocimiento probabilístico en una situación de aprendizaje y, por tanto, se impulse hacia la *construcción social del conocimiento matemático*. Para la Socioepistemológica, esta problematización del saber matemático (y en este caso probabilístico) se realiza por medio de un análisis articulado de las dimensiones que constituyen un saber matemático en particular (Cantoral *et al*, 2014):

- *Dimensión epistemológica*: “aquellas condiciones que permitieron la constitución del saber, cuál fue el origen de determinado conocimiento matemático y el contexto asociado a su surgimiento” (Cantoral, 2013, p. 147).
- *Dimensión cognitiva*: construcciones mentales; formas de significación progresiva del conocimiento; forma de desarrollo del pensamiento matemático.
- *Dimensión didáctica*: forma en la que existe el saber dentro del sistema didáctico; la manera en la que se genera su difusión institucional, su intencionalidad al momento de ser enseñado y forma de develar su evolución dentro y fuera de entornos escolares.
- *Dimensión sociocultural*: se refiere al uso del saber en un tiempo y lugar determinado, la forma en que se contextualiza un conocimiento matemático en particular.

De forma que, al tener presente el objetivo de análisis del presente estudio, nos enfocamos en la dimensión didáctica (al realizar un análisis sobre cómo es que existe el saber probabilístico referido a la probabilidad frecuencial por medio de los elementos de estudio: planes y programas de estudio, libros de texto y el instrumento diseñado para docentes), lo que representa un inicio para la problematización del saber probabilístico.

Por otra parte, según Soto y Cantoral (2014) es común culpabilizar a los docentes o a los estudiantes de las problemáticas existentes en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas; el panorama del fracaso común conduce a considerar a docentes y estudiantes como únicos responsables de los bajos niveles de aprovechamiento existentes. Ante lo cual, la Teoría Socioepistemológica considera estas problemáticas desde una tercera perspectiva que pone en manifiesto la idea de *discurso Matemático Escolar (dME)*.

Entre las características del *dME* se enlistan las siguientes (Soto y Cantoral, 2014, p. 1528):

- *La atomización en los conceptos*: no se consideran los contextos sociales y culturales que permiten la constitución del conocimiento.
- *El carácter hegemónico*: existe una supremacía de argumentaciones, significados y procedimientos, frente a otras.
- *La concepción de que la Matemática es un conocimiento acabado y continuo*: los objetos matemáticos son presentados como si hubiesen existido siempre y con un orden.
- *El carácter utilitario y no funcional del conocimiento*: la organización de la matemática escolar ha antepuesto la utilidad del conocimiento a cualquiera de sus restantes cualidades. Se busca que el conocimiento tenga un carácter funcional, en el sentido que logre integrar tal conocimiento a la vida para transformarla.
- *La falta de marcos de referencia para resignificar la matemática escolar*: se ha soslayado el hecho de que la Matemática responde a otras disciplinas y, por tanto, es ahí donde encuentra una base de significados naturales.

De esta manera, Soto y Cantoral (2014) al analizar las características del *dME* consideran al fracaso desde una perspectiva más amplia, es decir, el *fenómeno de exclusión*, respecto a dos planteamientos: *violencia simbólica* referente a “todo poder que logra imponer significaciones e imponerla como legítimas disimulando las relaciones de fuerza en que se funda su propia fuerza” (Bourdieu y Passeron, 2005, p. 44, como se citó en Soto y Cantoral, 2014) y los *sistemas de prácticas* que conciben mapas y delimitan la forma de acción, razón, significancia y

argumentación de las personas, así no se aceptarán como válidas aquellas formas que no concuerden con lo establecido, valorándose como fuera de lo normal y enmarcan la imposición presente dentro del *dME*.

En este sentido, a partir del modelo de exclusión (Soto y Cantoral, 2014), exponemos la presencia del *dME* para la enseñanza de la probabilidad frecuencial haciendo uso de las nociones de *violencia simbólica* y *sistemas de prácticas*.

■ Metodología

Para el desarrollo del estudio, se analizaron tres elementos relacionados con la matemática escolar del significado frecuencial de probabilidad: planes y programas de estudio mexicanos, libros de texto vigentes para Educación Básica y Media Superior, así como el diseño e implementación de un instrumento de diálogo dirigido a docentes de bachillerato. Pretendiendo en cada punto de análisis identificar la presencia de los elementos del *dME* planteados por la Socioepistemología presentando un contraste entre estos y sus implicaciones.

■ Instrumentos de análisis

Análisis curricular

El análisis de planes y programas de estudio referentes a la probabilidad frecuencial es de tipo documental y se realizó transversalmente; esto es, consideramos los documentos para la Educación Básica y para la Educación Media Superior. Para la Educación Básica, tomamos en cuenta las últimas dos reformas establecidas por la Secretaría de Educación Pública (SEP 2011; SEP, 2017a) y desglosamos sus principales características, así como la evolución y comparación de las nociones probabilísticas establecidas de una reforma a otra. Seguido, se presenta un análisis probabilístico del plan de estudio para el nivel medio superior, partiendo del programa para el bachillerato general mexicano.

Análisis de libros de texto

El *Modelo exhaustivo de análisis y valoración de libros de texto escolares de matemáticas* de Monterrubio y Ortega (2012) guía el análisis de los libros de texto. Este modelo considera una valoración cualitativa bajo diversos criterios, entre ellos seleccionamos los organizadores: *objetivos, contenidos, conexiones, actividades, lenguaje, ilustraciones y recursos generales*, pues en nuestro criterio son los que mejor permiten analizar el tratamiento del conocimiento matemático. En concreto, analizamos las secciones relacionadas con nociones probabilísticas de los libros de texto para quinto y sexto grado de primaria, diversas propuestas de textos escolares vigentes para la secundaria y los libros de texto desarrollados por el Colegio de Bachilleres del Estado de Sonora para la asignatura de Probabilidad y Estadística.

Diseño y aplicación de instrumento

Como tercer elemento de análisis, diseñamos un instrumento de diálogo y lo implementamos a docentes de bachillerato en activo. Para esto, realizamos una revisión bibliográfica, donde presentamos una serie de investigaciones enfocadas en evaluar o caracterizar el aprendizaje de la probabilidad en distintos niveles educativos (Green, 1983; Cañizares, 1997; Gómez, Batanero y Contreras, 2014). Estas investigaciones se enfocan tanto en estudiantes como en docentes y son base para la conformación del instrumento.

El producto resultante consta de tres apartados llamados componentes (1, 2 y 3) y que describimos en lo siguiente.

Componente 1 – Entrevista inicial: Conformado por una serie de preguntas relativas a la formación, experiencia docente y cuestionamientos sobre la enseñanza de la probabilidad.

Componente 2 – Cuestionario: Para la selección de ítems, se retomaron algunas tareas y/o ejercicios de investigaciones previas con base en su relación con las nociones que pretendemos estudiar. La Tabla 1, muestra los tres ítems seleccionados.

Tabla 1. Componente 2 – Cuestionario

ÍTEM 1.

Una moneda equilibrada se lanza al aire cinco veces y sale CARA las cinco veces. De las siguientes frases, señala la que consideres correcta:

- a) La próxima vez es más probable que otra vez salga CARA
- b) La próxima vez es más probable que salga CRUZ.
- c) La próxima vez es igual de probable que salga CARA o CRUZ
- d) No lo sé

Justifica la respuesta.

ÍTEM 2

Una bolsa contiene en su interior algunas bolas blancas y algunas bolas negras. Un niño extrae una bola, anota su color y la vuelve a introducir. A continuación, remueve las bolas para que se mezclen bien. El chico repite esta operación 4 veces y siempre obtiene una bola negra. A continuación, extrae una quinta bola. ¿De qué color piensas que será con más probabilidad? Señala la frase que consideres correcta:

- a) La negra es más probable de nuevo
- b) La negra y la blanca son igualmente probables.
- c) La blanca es más probable esta vez.
- d) Otra: ¿Cuál?

Justifica la respuesta.

ÍTEM 3

Actividad 1. Un profesor vacía sobre la mesa un paquete de 100 chinchetas obteniendo los siguientes resultados: 68 caen con la punta para arriba y 32 caen hacia abajo.

Supongamos que el profesor pide a 4 niños repetir el experimento, lanzando las 100 chinchetas. Cada niño obtendrá algunas con la punta hacia arriba y otras con la punta hacia abajo.

- a) Escribe en la siguiente tabla un posible resultado para cada niño:

Daniel	Martín	Diana	María
Punta arriba:	Punta arriba:	Punta arriba:	Punta arriba:
Punta abajo:	Punta abajo:	Punta abajo:	Punta abajo:

Actividad 2. Cuatro alumnos completaron cada uno la tarea anterior. Estas fueron sus respuestas

- a)

Daniel	Martín	Diana	María
Punta arriba: 32	Punta arriba: 70	Punta arriba: 35	Punta arriba: 65
Punta abajo: 68	Punta abajo: 30	Punta abajo: 65	Punta abajo: 35

- b)

Daniel	Martín	Diana	María
Punta arriba: 67	Punta arriba: 68	Punta arriba: 70	Punta arriba: 71
Punta abajo: 33	Punta abajo: 32	Punta abajo: 30	Punta abajo: 29

- c)

Daniel	Martín	Diana	María
Punta arriba: 68	Punta arriba: 68	Punta arriba: 68	Punta arriba: 68
Punta abajo: 32	Punta abajo: 32	Punta abajo: 32	Punta abajo: 32

- d)

Daniel	Martín	Diana	María
Punta arriba: 50	Punta arriba: 51	Punta arriba: 48	Punta arriba: 53
Punta abajo: 50	Punta abajo: 49	Punta abajo: 52	Punta abajo: 47

- a) Señala cuál o cuáles de estas respuestas son correctas

- b) Para cada una de las respuestas incorrectas explica cuáles son las posibles intuiciones o estrategias incorrectas que han llevado a los participantes a dar una respuesta errónea

Ítem 1. Tomado de Green (1983) y Cañizares (1997), aborda la independencia de ensayos repetidos bajo las mismas condiciones iniciales; se puede detectar la presencia de los efectos de la heurística de la representatividad (Khaneman, Slovic & Tvesky, 1982). Su intención dentro del instrumento es establecer un vínculo con problemas clásicos de los cursos de probabilidad, esperando sea familiar para el docente y permita considerar casos no equiprobables.

Ítem 2. Extraído de Cañizares (1997), usa el principio de inferencia para estimar el contenido de una bolsa mediante datos, esperando estimaciones frecuenciales. Sesgo asociado: sesgo de equiprobabilidad (Lecountre y Durand, 1988).

Ítem 3. Tomado de Cañizares (1997) y Gómez, Batanero y Contreras (2014), con el propósito de comparar probabilidades binomiales. Sesgo asociado a este problema: sesgo de equiprobabilidad.

Componente 3 - Análisis didáctico por parte del docente: Consta de cinco preguntas (Tabla 2) con la finalidad de conocer aspectos didácticos de los problemas planteados en el Componente 2, su vinculación con los problemas presentes en los cursos de los docentes y su postura con respecto a las nociones probabilísticas involucradas.

Tabla 2. Componente 3 – Análisis didáctico

1. Resuelva cada uno de los ítems.
2. ¿Los ítems presentados tienen similitudes con los trabajados en su clase? ¿Qué similitudes y qué diferencias encuentra?
3. ¿Con qué conceptos del currículo escolar relaciona el contenido involucrado en la resolución de estos problemas?
4. ¿Qué dificultades podrían presentarse en los estudiantes al enfrentarse a la resolución de los problemas antes descritos?
5. ¿Qué tipo de errores podrían cometer sus estudiantes al abordar la resolución de los problemas?

Fuente: Elaboración propia

■ Análisis didáctico de la probabilidad

Análisis de planes y programas

Para esta sección se analizan los planes y programas de estudio vigentes para la Educación Básica y Educación Media Superior para el bachillerato general. La Tabla 3. Muestra los aprendizajes esperados en el nivel básico para el eje *Análisis de datos* para el tema de probabilidad.

Tabla 3. Aprendizajes esperados eje Análisis de datos Educación Básica (Adaptado SEP, 2017b, p. 314 – 315)

Educación primaria	Secundaria		
5° y 6°	1°	2°	3°
Determina y registra en tablas de frecuencias los resultados de experimentos aleatorios.	Realiza experimentos aleatorios y registra los resultados para un acercamiento a la probabilidad frecuencial.	Determina la probabilidad teórica de un evento en un experimento aleatorio.	Calcula la probabilidad de ocurrencia de dos eventos mutuamente excluyentes

Fuente: Elaboración propia

En quinto grado de primaria se plantea el estudio de resultados de experimentos aleatorios y un acercamiento experiencias aleatorias, así como una idea primitiva de espacio muestral. Para el sexto grado, se espera que el estudiante logre identificar los posibles resultados en un experimento aleatorio sencillo y desarrollar nociones intuitivas de espacio muestral sin la necesidad de manejar el concepto formalmente.

Para la educación secundaria, el primer grado se designa para el estudio de la probabilidad frecuencial y el uso de diferentes métodos para recolectar y registrar datos, en el segundo grado se estudia el enfoque clásico de probabilidad y en el tercer grado se espera que el estudiante logre calcular la probabilidad de eventos mutuamente excluyentes.

Con respecto a la Educación Media Superior, se establece el estudio de los enfoques clásico y frecuencial de probabilidad, análisis y organización de información y determinación de probabilidades numéricas, además de su vinculación con herramientas estadísticas. La Tabla 4 presenta los contenidos establecidos para la asignatura de Probabilidad y Estadística para el bachillerato general.

Tabla 4. Contenidos para Probabilidad y Estadística, Educación Media Superior (SEP, 2017, p. 151)

Aprendizajes clave para Probabilidad y estadística en la Educación Media Superior			
Eje	Contenido Central	Contenidos Específicos	Aprendizajes esperados
Del manejo de la información al pensamiento estocástico	Conceptos básicos de Estadística y Probabilidad. Recolección de datos y su clasificación en clases. Uso del conteo y la probabilidad para eventos.	Nociones y conceptos básicos de Estadística y Probabilidad. Enfoques de probabilidad: ¿qué significa cada enfoque de probabilidad?, ¿qué significan las medidas de tendencia central?, ¿para qué obtener estos valores? Técnicas de conteo y agrupación en clases para la determinación de probabilidades.	Usa un lenguaje propio para situaciones que necesiten del estudio con elementos de Estadística y Probabilidad. Usa técnicas de conteo o agrupación en la determinación de probabilidades. Organiza la información como parte de la Estadística para el estudio de la probabilidad. Estudia el complemento que ofrece la Estadística para la Probabilidad.

Fuente: Elaboración propia

Así, al tomar en cuenta el currículo vigente para Educación Básica y Media Superior, observamos que se establece el estudio de los enfoques de probabilidad de forma gradual, iniciando en la primaria con nociones intuitivas de probabilidad y para en el nivel secundaria se introducen los enfoques frecuencial y clásico (SEP, 2017b), que serán retomados para su estudio en el nivel medio superior (SEP, 2017a).

Análisis de libros de texto

Aunque el análisis de libros de textos se realiza para la Educación Básica y Media Superior (Leyva, 2021), en esta sección nos concentraremos en presentar los resultados obtenidos exclusivamente del análisis de textos de Educación Media Superior. Para esto, recurrimos a los textos de las asignaturas *Probabilidad y Estadística I y II* del Colegio de Bachilleres del Estado de Sonora (COBACH). En lo siguiente, se sintetizan los resultados obtenidos:

Probabilidad y Estadística I (Durazo, 2018). En general, el texto presenta al inicio de cada bloque un panorama histórico en torno a las nociones de estudio e incluye actividades de investigación, se retoman situaciones extramatemáticas, proporciona ejemplos de aplicación y se utiliza información real para su análisis en las actividades.

Respecto a la probabilidad frecuencial, ubicada en el Bloque 4 del texto, se inicia con el estudio básico de la teoría de conjuntos y se introduce el enfoque clásico como fórmula para eventos de espacios equiprobables y el enfoque frecuencial como fórmula para eventos posibles al realizar un experimento. Con base en esto, no se identifica una diferenciación de situaciones para la aplicación de cada enfoque, lo que indica la presencia de la concepción de que *la matemática es un conocimiento acabado, continuo y con carácter hegemónico*.

Probabilidad y Estadística II (COBACH, 2016). El Bloque I, en la secuencia didáctica II, incluye los significados clásico y frecuencial de probabilidad. El enfoque experimental se presenta como una forma para determinar probabilidades cuando no se conoce el espacio muestral y mientras que, si se conoce el espacio muestral, se recurre al significado clásico (sin especificar la necesidad de equiprobabilidad) (Ilustración 1).

Métodos para asignar probabilidades.

En este curso abordaremos que probabilidad se puede determinar de dos formas: experimentalmente y teóricamente. La diferencia entre ellas, es que la probabilidad experimental no conocemos los resultados posibles que pueden ocurrir, como su nombre lo expresa se tiene que probar el experimento al instante e ir anotando los resultados que se han obtenido al repetirlo una determinada cantidad de veces .

Sin embargo la probabilidad teórica podemos obtenerla cuando podemos conocer los resultados posibles que pueden darse de un experimento dado, es decir, cuando conocemos su espacio muestral.

Fórmula de la probabilidad teórica.

$$P(E) = \frac{\text{número de resultados favorables}}{\text{número total de resultados}}$$

Ilustración 1. Módulo de aprendizaje: Probabilidad y Estadística II (COBACH, 2016, p. 36)

Enseguida, se presentan ejemplos de aplicación y fórmulas para la probabilidad teórica y experimental.

Como resultado del análisis, se identifica la presencia de las características del *dME*:

- *Carácter hegemónico*: mayor importancia al estudio del enfoque clásico.
- *Carácter utilitario*: la probabilidad frecuencial se presenta como regla ante situaciones específicas, no se permite realizar inferencias, cuestionamientos o argumentaciones para su resignificación.
- *Concepción de que la matemática es un conocimiento acabado y continuo*: se obliga a la asunción de la validez de la probabilidad frecuencial.
- *Falta de marcos de referencia*: el enfoque frecuencial se establece bajo características limitadas, a pesar de ser posible estudiarlo de formas alternativas.
- *Atomización de conceptos*: se establece la probabilidad frecuencial desprovista de argumentaciones y enfoques a partir de las problemáticas de la sociedad.

Lo que pone en evidencia el *fenómeno de exclusión*: las argumentaciones, significados y procedimientos del *dME*, con relación a los enfoques probabilísticos se imponen, presentados como si siempre hubieran existido sin admitir la participación de los participantes en la *construcción social del conocimiento matemático*; en suma, no se consideran aspectos sociales y culturales en su construcción.

Análisis de instrumento de diálogo

Para su análisis, se transcriben y sintetizan las respuestas expresadas por los docentes para cada componente del instrumento. Para fines ilustrativos, seleccionamos los resultados obtenidos del diálogo con el docente B que presentamos a continuación. La Tabla 5, resume lo expuesto por el docente B con respecto al Componente 1 – Entrevista inicial.

Tabla 5. Respuestas Componente 1 – Entrevista inicial. Docente B.

Ideas acerca de la probabilidad	<i>Es importante porque se presenta en muchas situaciones de la vida real. Se debe brindar importancia al estudio de la probabilidad por su gran campo de aplicación y porque proporciona herramientas para entender diversas situaciones de interés actual.</i>
Objetivos de enseñanza	<i>Que sus estudiantes puedan analizar datos presentes en la vida real, como cuestiones climáticas, precios, ofertas y visualicen la aplicación de los conceptos probabilísticos fuera de la escuela.</i>
Distribución, materiales y herramientas didácticas	<i>La institución proporciona temarios y libros de texto revisados por el área de matemáticas del sistema educativo en cuestión. Se adecua el temario y actividades del libro de texto acorde al grupo. Basa gran parte de su labor en el libro de texto de COBACH. Uso principalmente de libro, calculadora y cuaderno. Uso de Excel.</i>
Dificultades de los estudiantes	<i>Ideas intuitivas muy limitadas acerca de la probabilidad, conocimientos base insuficientes, no logran ver el espacio muestral en su totalidad y falta de interés.</i>
Vinculación	<i>Buscar aplicaciones de la probabilidad para motivar su estudio y apoyar el aprendizaje (desarrollo de proyectos y planteamiento de problemas cercanos a la realidad).</i>
Enfoque frecuencial	<i>Se asigna muy poco tiempo al estudio del significado frecuencial de la probabilidad. Se tiene que buscar estrategias para que los estudiantes visualicen los conceptos referentes a la probabilidad frecuencial porque el tiempo y las instalaciones no permiten la experimentación. Clases más enfocadas al estudio del significado clásico de la probabilidad.</i>

Fuente: Elaboración propia

En general, los docentes coinciden en la importancia del estudio de la probabilidad y señalan dificultades que enfrenta su enseñanza, concuerdan en que se deben estudiar estas nociones a partir de situaciones cercanas y de interés para los estudiantes. En la Tabla 6, mostramos los resultados expresados por el docente B a partir de la aplicación del Componente 2 – Cuestionario:

Tabla 6. Respuestas al Componente 2 – Cuestionario: Docente B.

ITEM 1			
c) La próxima vez es igual de probable que salga CARA o CRUZ. Justificación: <i>Como se trata de una moneda equilibrada, ambos lados pesan lo mismo. Un lado no es más pesado que el otro, es decir, no está cargado. Es, de hecho, la respuesta que yo esperaría de mis estudiantes ante un problema similar.</i>			
ITEM 2			
Respuesta: b) La negra y la blanca son igualmente probables. Justificación: <i>Son solamente dos colores y, por tanto, es igual de probable que salga bola blanca o bola negra, suponiendo que haya la misma cantidad de bolas.</i>			
ITEM 3			
Respuesta: Actividad 1. <i>Al principio la dejé en blanco, porque no sé cómo se hizo el lanzamiento de las chinchetas, si de una por una o se dejan caer todas sobre la mesa o al piso. No propuse una respuesta, pero sé que las respuestas van en proporción a que la suma de las que caen hacia arriba más las que caen hacia abajo sea 100; por tanto, los resultados de Daniel, Martín, Diana y María deberán sumar 100 cada uno.</i>			
Daniel	Martín	Diana	María
Punta arriba: 30	Punta arriba: 70	Punta arriba:40	Punta arriba: 60
Punta abajo: 70	Punta abajo: 30	Punta abajo: 60	Punta abajo: 40

Actividad 2.

Todas las respuestas son correctas por el hecho de sumar 100, la que considero con menos probabilidad de ocurrencia es la respuesta 50-50 que da el cuarto niño; puede suceder, pero con probabilidad baja.

Fuente: Elaboración propia

Respecto al ítem 1, los tres docentes lo resuelven sin mayor problema, con justificaciones semejantes a la expresada por el docente B (Tabla 6). Los resultados muestran la presencia del sesgo de equiprobabilidad en los tres docentes para los ítems 2 y 3; sin embargo, los docentes A y B, después de reflexionar acerca de las implicaciones de cada ítem, realizan estimaciones frecuenciales que les permiten modificar sus respuestas. Por último, mostramos la síntesis de respuestas obtenidas del docente B, del Componente 3 – Análisis didáctico:

Tabla 7. Respuestas docente B. Componente 3 – Análisis didáctico.

2. *Por cuestiones de tiempo, me limito a problemas clásicos. Mis estudiantes quizá pudiesen resolver este tipo de problemas, pero sin encontrarles sentido y sin realizar un análisis adecuado para llegar a la solución.*
3. *Fracciones, ordenamiento de datos en tablas, números enteros y fraccionales.*
4. *Es complicado hacer una diferenciación entre una moneda o dado equilibrado a uno truqueado; por ejemplo, si yo les muestro una moneda truqueada, ellos presentarán dificultades para concebir que tiene características diferentes a las monedas comunes. Por otra parte, en el ítem 2, es probable que mis estudiantes desvíen su atención hacia las características de las bolas (textura, tamaño, peso).*
5. *Para los ítems 1 y 3, los estudiantes pueden no concebir las características del objeto en cuestión y llegar a resultados erróneos por una mala interpretación. Para el ítem 2, no lograr estimar el contenido de la bolsa.*

Fuente: Elaboración propia

A partir de esto, identificamos las siguientes características del *dME*:

- *El carácter hegemónico*: los docentes resuelven problemas del enfoque clásico, mientras que en situaciones donde se requieren estimaciones frecuenciales manifiestan dificultades y se inclinan al uso de la regla de Laplace en cada problema.
- *La concepción de que la matemática es un conocimiento acabado y continuo*: los docentes buscan reducir la probabilidad a la aplicación de una regla, sin considerar características específicas de la situación aleatoria.
- *Falta de marcos de referencia para resignificar la matemática escolar*: a partir de los comentarios expresados por los docentes, que remarcan la importancia y necesidad de estudiar la probabilidad desde sus diversos enfoques.

■ Conclusiones

A partir del análisis de los planes de estudio y libros de texto, se destaca la presencia de los elementos *dME* para los enfoques de probabilidad; se privilegia el estudio de la probabilidad clásica y se evidencia el *fenómeno de exclusión* modelado por la teoría Socioepistemológica. Consideramos que los conocimientos y nociones matemáticas no son concebidos desde situaciones de aprendizaje, lo que nos conduce a declarar que no se motiva al estudiante hacia el aprendizaje de las nociones probabilísticas y no se le incluye en la *construcción del conocimiento matemático*.

Respecto a la implementación del instrumento, los comentarios expresados por los docentes durante la primera y segunda sesión surgen de forma natural; la idea de que la enseñanza de la probabilidad se inclina al estudio del

enfoque clásico. De igual forma, mediante el análisis didáctico de los ítems, se exhibe el hecho de que no se estudia la probabilidad frecuencial con la misma profundidad que la probabilidad clásica, prestando mayor atención a la última.

En lo siguiente, enlistamos los elementos del *dME* identificados para la enseñanza de la probabilidad frecuencial:

- *El carácter hegemónico*: Presente al favorecer el uso del enfoque clásico de probabilidad, sobreponiéndolo ante los restantes, privilegiando argumentaciones, significados y procedimientos provenientes de la probabilidad clásica.
- *El carácter utilitario del conocimiento*: El significado frecuencial de probabilidad es presentado como una regla estática, como un saber que permite hacer frente a ciertas problemáticas y con el fin de implementarse ante situaciones con las mismas características. No se permite a los actores del sistema educativo problematizar, inferir y trastocar el conocimiento. Por tanto, no es posible resignificarlo en contextos diferentes.
- *La concepción de que la Matemática es un conocimiento constituido y anterior a la praxis humana*: El enfoque frecuencial se estudia como una fórmula, como un saber matemático terminado y lineal, obligando a los actores del sistema educativo a su asunción como objeto matemático preexistente.
- *La falta de marcos de referencia que obliguen a resignificar la Matemática Escolar*: La forma de estudio del enfoque frecuencial, surge de la matemática misma, mediante situaciones con características específicas, sin considerar otros campos de conocimiento.
- *La atomización de los objetos y procesos matemáticos*: Se estudia el enfoque frecuencial desprovisto de argumentaciones y significados que surjan de la acción humana, sin considerar las prácticas que permitieron su nacimiento ni los fundamentos institucionales que lo colocan dentro de los planes y programas de estudio.

Con base en estos elementos, consideramos que no solo es posible, sino necesario un planteamiento didáctico que articule el estudio de los enfoques probabilísticos de manera complementaria, diferenciado sus características y otorgando relevancia requerida a su estudio. De igual forma, es importante su estudio mediante situaciones aleatorias cercanas al estudiante y hagan emerger de manera natural los enfoques.

En concreto, el análisis didáctico realizado evidencia áreas de oportunidad para posibles rediseños de la Matemática Escolar para los significados de probabilidad y particularmente, para el estudio de la probabilidad frecuencial. Bajo este propósito, se pretende ampliar el proyecto, al realizar un análisis de las dimensiones epistemológica, cognitiva y sociocultural que, sumada la dimensión didáctica, constituyen un saber matemático. El análisis pretendido posibilitaría el diseño de materiales que favorezcan la interacción individual y social de los individuos, permitiendo la *construcción social del conocimiento matemático*.

■ Referencias bibliográficas

- Batanero, C. (2005). Significados de la probabilidad en la educación secundaria. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 8 (3), 247-264.
- Batanero, C., Henry, M. y Parzysz, B. (2005). The nature of chance and probability. En G. Jones (Ed.), *Exploring probability in school: Challenges for teaching and learning* (pp. 15-37), Springer. doi.org/10.1007/0-387-24530-8_2
- Bourdieu, J. y Passeron, J. (2005). *La reproducción: elementos para una teoría del sistema de enseñanza*. Ed. Traducción de Melendres J., Subirat M. Fontamara.
- Cantoral, R., Reyes, D. & Montiel, G. (2014). Socioepistemología, Matemática y Realidad. *Revista Latinoamericana de Etnomatemática*, 7(3), 91-116.
- Cantoral, R. (2013). *Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa. Estudios sobre construcción social del conocimiento*. Gedisa.

- Cañizares, M. J. (1997). *Influencia del razonamiento proporcional y combinatorio y de creencias subjetivas en las intuiciones probabilísticas primarias*. [Tesis de doctorado, Universidad de Granada]. <http://www.ugr.es/~batanero/pages/ARTICULOS/CANIZARE.pdf>
- Colegio de Bachilleres del Estado de Sonora, COBACH (2016). *Probabilidad y Estadística II, módulo de aprendizaje*. Hermosillo, Sonora: Departamento de Innovación y desarrollo de la práctica docente.
- Durazo, A. (2018). *Probabilidad y Estadística I, módulo de aprendizaje*. Hermosillo, Sonora: Departamento de Innovación y desarrollo de la práctica docente.
- Godino, J., Batanero, C. y Cañizares, M. J. (1987). *Azar y probabilidad. Fundamentos didácticos y propuestas curriculares*. Síntesis.
- Gómez, E., Batanero, C., & Contreras, J. M. (2014). Conocimiento matemático de futuros profesores para la enseñanza de la probabilidad desde el enfoque frecuencial. *BOLEMA. Boletim de Educação Matemática*, 28(48), 209-229.
- Green, D. (1983). A Survey of probabilistic concepts in 3000 pupils aged 11-16 years. *Proceedings of the First International Conference on Teaching Statistics*, 2, 766 – 783.
- Hacking, Ian (1975). *The Emergence of Probability: A Philosophical Study of Early Ideas about Probability, Induction and Statistical Inference*. Cambridge University Press.
- Inzunza, S., (2017). Conexiones entre Probabilidad Teórica y Probabilidad Frecuencial en un Ambiente de Modelación Computacional. *Avances de investigación en educación matemática*, 11, 69-86.
- Kahneman, D., Slovic, P. y Tversky, A. (1982). *Judgment under uncertainty: heuristics and biases*. Cambridge University Press.
- Lecoutre, M. P. y Durand, J. L. (1988). Judgements probabilistes et modèles cognitifs: étude d'une situation aleatoire. *Educational Studies in Mathematics*, 19, 357- 368.
- Leyva, I. (2021). *Análisis didáctico referido a la probabilidad frecuencial*. [Tesis de Licenciatura, Universidad de Sonora].
- Monterrubio, M. C. y Ortega, T. (2012). Creación y aplicación de un modelo de valoración de textos escolares matemáticos en Educación Secundaria. *Revista de Educación*, 358, 471-496.
- Sánchez, E. (2009). La probabilidad en el programa de estudio de matemáticas de la secundaria en México. *Educación matemática*, 21(2), 39-77.
- SEP. Secretaría de Educación Pública (2017a). *Aprendizaje Clave para la Educación Integral*. SEP. https://www.planypogramasdestudio.sep.gob.mx/descargables/APRENDIZAJES_CLAVE_PARA_LA_EDUCACION_INTEGRAL.pdf.
- SEP. Secretaría de Educación Pública (2017b). *Planes de estudio de referencia del marco curricular común de la Educación Media Superior*. <http://sems.gob.mx/work/models/sems/Resource/12491/4/images/libro.pdf>
- Soto, D. y Cantoral, R. (2014). Discurso Matemático Escolar y la Exclusión. Una visión Socioepistemológica. *Bolema- Boletim de Educação matemática*, 28 (50), 1525 – 1544.