EL ROL DE LOS LENGUAJES INTERMEDIARIOS EN LA ENSEÑANZA DE LOS NÚMEROS ENTEROS

THE ROLE OF INTERMEDIARY LANGUAGES IN THE TEACHING OF WHOLE NUMBERS

Florencia Rivero, Verónica Molfino, Avenilde Romo-Vázquez
Dirección General de Educación Secundaria (Uruguay). Consejo de Formación Docente (Uruguay). Cinvestav (México)
florenciaprs@gmail.com, veromolifino@gmail.com, avenilderv@yahoo.com.mx

Resumen
Se presenta una investigación enfocada en el análisis del lenguaje empleado en la enseñanza del conjunto de los números enteros, enmarcada en elementos de la Teoría Antropológica de lo Didáctico y en las categorías de lenguajes intermediarios propuestas en Roshaní y Romo (2020). Se analizan los tipos de lenguajes intermediarios que figuran en dos libros de texto, en una propuesta didáctica específica implementada en el aula y en las producciones orales de los estudiantes. Los resultados muestran que tres categorías de lenguajes intermediarios coexisten en diferentes momentos de la construcción y reconstrucción de las actividades matemáticas en el aula.

Palabras clave: Lenguajes intermediarios, Praxeología matemática, Praxeología didáctica, Tipos de tareas

Abstract
An investigation focused on the analysis of the language used in the teaching of whole numbers set is presented. It is based on elements of the Anthropological Theory of Didactics and in the categories of intermediary languages proposed in Roshaní and Romo (2020). The types of intermediary languages that appear in two textbooks are analyzed, in a specific didactic proposal implemented in the classroom and in the oral productions of the students. The results show that three categories of intermediate languages coexist at different times in the construction and reconstruction of mathematical activities in the classroom

Key words: intermediary languages, mathematical Praxeology, didactic Praxeology, types of tasks

Introducción

El lenguaje ha sido objeto de estudio por diversas investigaciones, pero existen pocos trabajos realizados considerando como objeto de estudio el lenguaje matemático en el contexto latinoamericano. Un ejemplo de ello lo constituye la investigación de Parra y Trinick (2018). Sin embargo, sí existe un desarrollo importante en países europeos, lo que se evidencia mediante las diferentes ediciones del grupo de trabajo Matemáticas y Lenguaje del CERME (Congreso Europeo de Investigación en Educación Matemática).

El rol del lenguaje es un elemento clave para comprender los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Según Alfaro (2009), el lenguaje matemático es un elemento básico para desarrollar el pensamiento matemático y Sfard (2012) sostiene que en el aula conviven diferentes discursos y formas de actuar y pensar.

El lenguaje juega un papel importante en la comunicación matemática y, desde el enfoque semiótico, es una herramienta de representación, comunicación, pensamiento y construcción del conocimiento (Schleppegrell, 2010).

La caracterización del lenguaje matemático no es única, hecho que complejiza su estudio. De hecho, uno de los resultados más reveladores del estudio de Roshaní y Romo (2020) es que en el aula de matemáticas conviven diferentes tipos de lenguajes matemáticos: cotidianos, intermediarios y formales. Además, las categorizaciones propuestas por Roshaní y Romo (2020) no se han considerado en otras perspectivas y se considera que pueden ser la base de una contribución al desarrollo de este tipo de trabajos, principalmente en Latinoamérica.

Tomando la caracterización realizada por Roshaní y Romo (2020) resulta necesario profundizar en el estudio de estos lenguajes intermediarios, poco o nada percibidos por docentes e investigadores, para determinar si permiten transiciones entre el lenguaje cotidiano y el matemático-formal, así como su rol en el desarrollo de la actividad matemática. En particular, ¿qué tipo de lenguaje utiliza el docente para construir una noción matemática en el aula?, ¿estos tipos de lenguajes están relacionados con el tipo de tarea didáctica, como presentar una definición, explicar una técnica matemática o validar un teorema?

Más aún, cuáles son los tipos de lenguaje privilegiados para introducir el estudio de un tema matemático, particularmente cuando se usan contextos cotidianos para darles sentido. Con el objetivo de contribuir al estudio de esta problemática de investigación se optó por analizar la enseñanza de los números enteros en el nivel secundario, debido a su rol fundamental en el estudio del álgebra y de otras áreas de la matemática.

Se presenta, en primer lugar, el marco conceptual conformado por la Teoría Antropológica de lo Didáctico y el enfoque teórico conformado por seis tipos de lenguajes intermediarios (Roshaní, 2019). A continuación, se describe brevemente la metodología utilizada; más adelante se ejemplifican las características del análisis realizado y se muestran algunos resultados obtenidos y, por último, se presentan conclusiones y perspectivas de esta investigación.

Marco conceptual

Esta investigación se enmarcó en elementos de la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD) y en las categorías de los lenguajes intermediarios (Roshaní y Romo, 2020).

La TAD ofrece un modelo epistemológico para al análisis de la actividad humana en su dimensión institucional, es así que desde la TAD se entiende a las instituciones como organizaciones sociales que enmarcan las actividades humanas y las hacen posibles.

La TAD concibe a la actividad matemática, y en consecuencia la actividad del estudio de las matemáticas, inmersa en el conjunto de actividades humanas y de instituciones sociales, y es por eso que se habla de teoría "antropológica" (Bosch y Gascón, 2009). La praxeología es la unidad mínima de análisis de la actividad humana y se conforma de dos bloques: práctico y tecnológico-teórico. El bloque práctico corresponde al saber-hacer y se compone de dos elementos, los tipos de tareas –lo que se hace— y las correspondientes técnicas —maneras de realizar dichas tareas—.

El bloque tecnológico-teórico corresponde al saber, y se compone de la tecnología y de la teoría, entendiéndose por la primera el discurso que explica, produce y justifica las técnicas y por la segunda un discurso más general que explica, produce y justifica las tecnologías.

La TAD parte del principio que el saber matemático se construye y reconstruye como respuesta al estudio de cuestiones problemáticas, es el resultado de un proceso de estudio el cual esta influenciado por connotaciones sociales y culturales. Para conocer y reconocer cómo las praxeologías matemáticas u organizaciones matemáticas (OM) se construyen y reconstruyen se requiere de las praxeologías didácticas u organizaciones didácticas (OD).
Desde esta teoría, las praxeologías matemáticas y didácticas se co-determinan. Es decir, depende de la praxeología matemática considerada –en referencia a su dimensión epistemológica— la organización didáctica que pueda producirse y viceversa. Además, existen condiciones y restricciones específicas que se imponen ya sea desde adentro o afuera de cada institución docente, las cuales condicionan la OM de dicha institución. Sierra (2006) muestra un ejemplo:

[…] si en una institución docente determinada se restringe enormemente la posibilidad de llevar a cabo ciertas tareas matemáticas necesarias para que los sujetos de dicha institución rutinicen las técnicas matemáticas impidiendo así el consiguiente desarrollo de las mismas en manos de los estudiantes, entonces se está dificultando la posibilidad de organizar el proceso de estudio en base al trabajo autónomo de los estudiantes. (p. 39)
En este artículo el énfasis está en identificar y analizar las OD y las OM en la enseñanza de los números enteros, evidenciando los diferentes tipos de lenguaje matemático utilizados.

Roshaní y Romo (2020) plantean que existen seis categorías de lenguajes intermediarios entre el lenguaje natural y el lenguaje matemático formal, que han sido establecidas con base en la complejidad de los conceptos y de sus símbolos asociados, así como las tareas que permite realizar y del grado de abstracción requerido para las mismas.

-Lenguaje coloquial matemático: Los enunciados y proposiciones están expresados con términos del lenguaje coloquial, no hay presencia de variables, cuantificadores o conectores de manera explícita. Los signos o símbolos matemáticos que aparecen son los que se utilizan en la vida cotidiana de todos los individuos (números, signos de operaciones básicas, notación de unidades de medida, etc.). Los conceptos matemáticos son nombrados utilizando el nombre adecuado desde lo disciplinar (vértice, cuadrado, número par, múltiplo, etc.)

- Lenguaje intermediario básico: El lenguaje predominantemente es coloquial, pero se reconocen variables de manera explícita y presenta símbolos matemáticos que se usan en contextos escolares o matemáticos, como son: “∈”, “R”, “N”, “<”, “≤”, “≠”, “π”, “⊥”, “//”, “≡”, “⊂”, “R”, “C_O, r” etc. Este lenguaje se caracteriza por utilizar símbolos para designar objetos y otros para expresar hechos equivalentes a los verbos utilizados en la lengua coloquial.

- Lenguaje intermediario medio: Las proposiciones o enunciados están expresados en términos que se alejan del lenguaje coloquial, las variables están de forma explícita y se reconocen algunos conectores o cuantificadores de forma explícita, pero expresados en lenguaje coloquial, y otros están implícitos. A los símbolos utilizados en las categorías anteriores se incorporan términos que sólo pertenecen al ámbito matemático relacionados con conceptos de orden superior, como son: “ln”, “sen”, “lím”, “dx”, “Δ”, “Σ”, etc.

- Lenguaje intermediario avanzado: las proposiciones o enunciados están dados en términos más formales reconociendo variables, símbolos, cuantificadores y conectores de forma explícita utilizando lenguaje formal o coloquial.
- Lenguaje formal aplicado: las proposiciones y los enunciados se expresan en términos formales utilizando variables, símbolos, cuantificadores y conectores de forma explícita y con sus respectivos signos matemáticos. No hay presencia de palabras de la lengua vernácula.

- Lenguaje formal lógico: Presenta únicamente lenguaje formal con signos propios de la matemática y funciones proposicionales. (Roshaní y Romo, 2020, pp. 10-11)

Un ejemplo de lenguaje coloquial matemático podría ser "Si la temperatura era de 2ºC bajo cero y subió dos grados, ¿qué temperatura se tiene actualmente?". Por otra parte, ejemplos de lenguaje intermedio básico, medio y avanzado son, respectivamente: "la suma de dos números opuestos es cero", "Si dos números a y b cumplen que la suma es cero, entonces $b = -a$", "Cualesquiera sean a y b reales tales que $a+b=0$, se cumple que a= - b". Un ejemplo de lenguaje formal aplicado sería "$\forall a\in$R y $\forall b\in$R tal que $a+b=0$, entonces $b=-a$". Un lenguaje formal lógico sería "$\forall a\in$R, $\forall b\in$R, $a+b=0\Rightarrow b=-a$".

Los diferentes tipos de lenguajes intermediarios suelen estar presentes en la clase de matemática, así como en los recursos utilizados por docentes y alumnos, libros de texto, artículos, videos, etc. Es así que en este artículo se presenta la forma en que estos lenguajes figuran en la enseñanza de los números enteros en el nivel secundaria, considerando el caso de una clase uruguaya. Asimismo, se evidencia el rol de estos lenguajes en la co-determinación entre lo matemático y lo didáctico.

Metodología

Con base en los elementos descritos en el marco conceptual, la metodología de trabajo que guió la investigación utilizó como insumos libros de textos, secuencias de enseñanza y episodios de clase. Se analizaron las organizaciones didácticas y los tipos de lenguajes intermediarios utilizados en la enseñanza de los números enteros en dos libros de texto, Borbonet, Burgos, Martínez y Ravaioli (2005) y Ochoviet y Vitabar (2013), llamados LT1 y LT2 respectivamente, elegidos por ser utilizados en la planificación docente de las secuencias de clase que fueron observadas y documentadas. El análisis de los libros se realizó siguiendo la propuesta de Bittar (2017). Asimismo, se analizaron cinco episodios de clase correspondientes a la enseñanza de los números enteros, dictados por una misma docente que es a la vez una de las investigadoras autoras de esta contribución. Se identificaron las organizaciones didácticas implementadas por la docente y las praxeologías matemáticas construidas por los estudiantes. En el análisis de la componente tecnológica de las praxeologías analizadas, se identificaron los tipos de lenguajes intermediarios. El análisis de las OD de los libros de texto y de la clase permitió evidenciar la similitud de los lenguajes intermediarios utilizados en la propuesta didáctica planificada e implementada y la forma en que el docente puede proponer transiciones entre diferentes tipos de lenguajes intermediarios a partir de tareas consideradas en la planificación o generadas en la gestión de la clase.

Análisis de algunos ejemplos

En la investigación que da lugar a este artículo (Rivero, 2020) se analizaron varias OD enfocadas en la enseñanza de los números enteros en los libros de texto, LT1 y LT2, distinguiendo la componente praxis y la componente logos, en la que se identificaron los lenguajes intermediarios. Con el fin de ejemplificar el análisis realizado se muestran a continuación algunos casos concretos del análisis.

Uno de los tipos de tarea de la OD identificada en ambos libros de textos (LT1 y LT2) es *presentar definiciones de nociones matemáticas*, denominada T_1, y cuya praxeología, que es similar en ambos libros, se muestra en la siguiente tabla.

Tabla 1. Descripción de componentes praxeológicas relativas a la tarea T_1 en LT1 y LT2

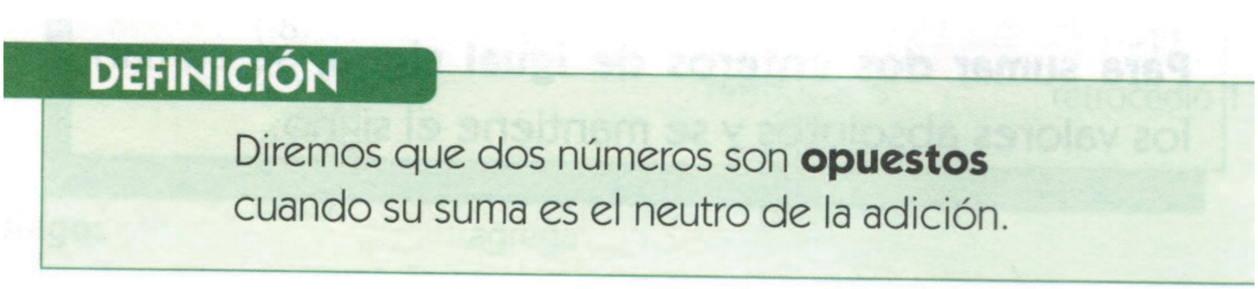
Tipo de tarea (T_1)	Presentar definiciones de nociones matemáticas	
Técnica	Presentar definiciones o diferentes discursos explicativos que permitan reconocer las características de nociones o conceptos vinculados al número entero.	
Tecnología	Darle un sentido de formalidad a la conceptualización realizada previamente a partir de situaciones extra-matemáticas. Situarse en el contexto matemático escolar y recurrir a un discurso más cercano al de la institución enseñanza de las matemáticas e incluso el de las matemáticas, considerando al conjunto de los números enteros como un conjunto de números con ciertas propiedades.	
	Tipo de lenguaje	➢ Intermediario básico ➢ Intermediario medio

Fuente: Elaboración propia

Es decir, ambos libros presentan una organización didáctica similar. Para ilustrarlo, a continuación, se muestran algunos ejemplos de los libros de texto donde se evidencia el tipo de tarea T_1 y en cada uno de ellos se identifica el tipo de lenguaje que se emplea para enunciar la tarea. De manera general, se puede decir que en las tareas del tipo T_1 el lenguaje que predomina es intermediario básico, pero también aparece el intermediario medio, debido a que los términos empleados se alejan de un sentido coloquial (característica del lenguaje intermediario medio), pero a la vez se reconocen variables, conectores y cuantificadores, aunque los símbolos formales no aparecen explícitamente, sino que son expresados con palabras "para todo", "todo número" (característica del lenguaje intermediario básico).

Ejemplo 1: Definición de números opuestos en LT1
Los números opuestos se definen de la manera siguiente: "Diremos que dos números son **opuestos** cuando su suma es el neutro de la adición" (Borbonet et al., 2005, p. 70). No se utilizan símbolos ni signos, pero los términos nombrados son exclusivos del ámbito de la matemática, por ejemplo "neutro de la adición". Por lo que el lenguaje que se utiliza es intermediario medio, el cuantificador universal ∀ aparece de forma implícita, ya que existe una cuantificación universal: cualesquiera sean dos números cuya suma es el neutro de la adición, son opuestos.

Figura 1. Definición de números opuestos


DEFINICIÓN

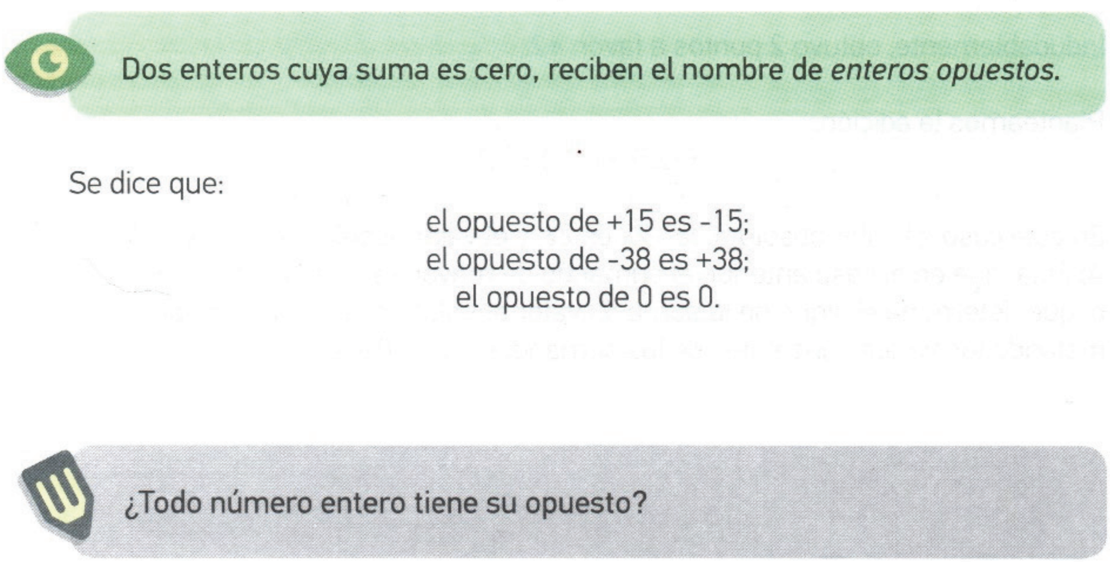
Diremos que dos números son **opuestos** cuando su suma es el neutro de la adición.

Fuente: Borbonet et al., 2005, p. 70.

Ejemplo 2: Definición de números opuestos en LT2

Una de las tareas de este tipo es la de presentar la definición de números opuestos: "Dos enteros cuya suma es cero, reciben el nombre de opuestos" (Ochoviet y Vitabar, 2013, p. 34). Se puede identificar que el lenguaje que subyace es el lenguaje intermediario básico o medio, debido a que los contenidos son exclusivos de la matemática (característica del lenguaje intermediario medio) y, además, se pueden identificar el cuantificador $\forall$ (para cada par de números enteros) y conectores $\Longrightarrow$ de forma implícita, (si dos números enteros suman cero, entonces son opuestos) característica del lenguaje intermediario básico. A diferencia del ejemplo anterior el hecho de decir "Dos enteros cuya suma es cero" y no el "neutro de la adición" induce a considerar que este ejemplo está expresado en el lenguaje intermediario básico.

Figura 2. Definición de números opuestos


Dos enteros cuya suma es cero, reciben el nombre de *enteros opuestos*.

Se dice que:

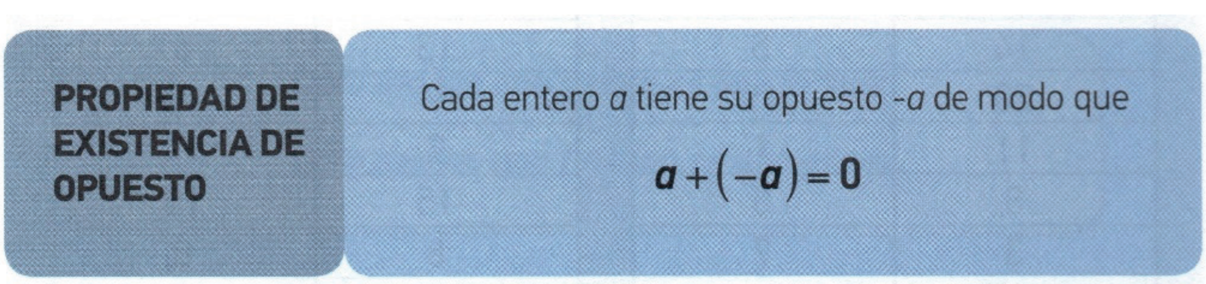
el opuesto de +15 es -15;
el opuesto de -38 es +38;
el opuesto de 0 es 0.

¿Todo número entero tiene su opuesto?

Fuente: Ochoviet y Vitabar, 2013, p. 34.

Seguida a la tarea de presentar la definición de números enteros opuestos, aparece la propiedad de existencia del opuesto: "cada entero a tiene su opuesto $-a$ de modo que $a + (-a) = 0$" (Ochoviet y Vitabar, 2013, p. 36). A diferencia de la tarea anterior, aquí sí se logra identificar claramente que el lenguaje empleado es intermediario medio, debido a que se introducen signos que representan números. También se identifica el cuantificador universal de forma implícita.

Figura 3. Propiedad de existencia y de opuesto


PROPIEDAD DE EXISTENCIA DE OPUESTO

Cada entero a tiene su opuesto $-a$ de modo que

$$a+(-a)=0$$

Fuente: Ochoviet y Vitabar, 2013, p. 36.

Otro de los tipos de tarea que se identificó en el análisis de los libros de texto fue el tipo de tarea denominado T_2: presentar actividades para deducir nociones matemáticas. En este caso, este tipo de tarea solo fue identificado en LT2. En la siguiente tabla se puede identificar la descripción de la praxeología.

Tabla 2. Descripción de componentes praxeológicas relativas a la tarea T_2 en LT2

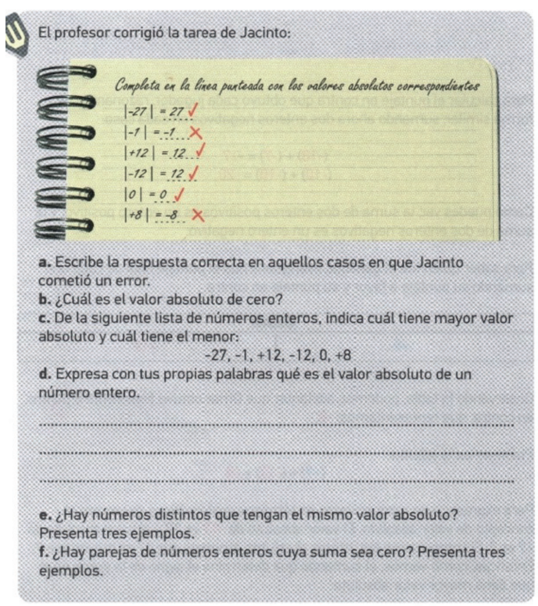
Tipo de tarea (T_2)	**Presentar actividades para deducir nociones matemáticas**	
Técnica	1) Asociar diferentes situaciones extra-matemáticas o intra-matemáticas con propiedades de números enteros. 2) Presentar actividades o situaciones donde surja la necesidad de incorporar reglas, definiciones o diferentes discursos explicativos que permitan reconocer las características de nociones o conceptos vinculados al número entero.	
Tecnología	Dar un sentido de formalidad a la conceptualización realizada previamente a partir de situaciones extra e intra-matemáticas. Para ello, se reconoce el contexto matemático escolar y se recurre a un discurso más cercano al de la institución enseñanza de las matemáticas (matemática escolar) e incluso al de las matemáticas (disciplina), alejándose de contextos cotidianos.	
	Tipo de lenguaje	➢ Coloquial matemático ➢ Intermediario básico

Fuente: Elaboración propia

Se muestran a continuación algunos ejemplos de este tipo de tareas y se analiza el tipo de lenguaje que presenta.

Ejemplo 3: t_{2b} presentar actividades para establecer la definición de valor absoluto
En la tarea que se presenta a continuación se pretende que los estudiantes establezcan una definición del valor absoluto de un número entero y deduzcan propiedades de este concepto.

Figura 4. Tarea para definir el valor absoluto


El profesor corrigió la tarea de Jacinto:

Completa en la línea punteada con los valores absolutos correspondientes

|-27| = 27
|-1| = -1
|+12| = 12
|-12| = 12
|0| = 0
|+8| = -8

a. Escribe la respuesta correcta en aquellos casos en que Jacinto cometió un error.
b. ¿Cuál es el valor absoluto de cero?
c. De la siguiente lista de números enteros, indica cuál tiene mayor valor absoluto y cuál tiene el menor:
-27, -1, +12, -12, 0, +8
d. Expresa con tus propias palabras qué es el valor absoluto de un número entero.
....
....
....
e. ¿Hay números distintos que tengan el mismo valor absoluto? Presenta tres ejemplos.
f. ¿Hay parejas de números enteros cuya suma sea cero? Presenta tres ejemplos.

Fuente: Ochoviet y Vitabar, 2013, p. 34.

A continuación, se muestra lo identificado en relación a los análisis de episodios de clase. Durante el análisis de episodios de clase se identificaron cinco tipos de tareas: T_a: Conceptualizar la noción de número entero mediante situaciones extra-matemáticas; T_b: Introducir la adición en los números enteros mediante situaciones extra-matemáticas; T_c: Conceptualizar la noción de número opuesto; T_d: Conceptualizar el conjunto de los números enteros y T_e: Conceptualizar el valor absoluto de un número.

En este artículo se abordará solo $T_{c,}$ detallando tanto la OD como la OM.

La secuencia didáctica propuesta por la docente (a la vez investigadora) tenía por objetivo que los estudiantes lograran ver similitudes y diferencias entre los ejemplos de números opuestos presentados, para así generar la idea de que dos números son opuestos si su suma es cero. A su vez se pretendía que identificaran otras dos características: equidistar del cero y poseer el mismo valor absoluto. La OD de la docente está conformada por dos tipos de tareas T_{c1}: Conceptualizar la noción de números opuestos a partir del análisis de ejemplos y T_{c2}: Establecer una definición de números opuestos a partir de las afirmaciones elaboradas por los estudiantes, como se muestra a continuación.

Tabla 3. OD relativa a T_{c1}: conceptualizar la noción de números opuestos a partir del análisis de ejemplos

Tipo de tarea (T_{c1})	Conceptualizar la noción de números opuestos a partir del análisis de ejemplos
Técnica	1) Analizar ejemplos de números opuestos e identificar diferencias y similitudes. 2) Determinar una condición para que dos números sean opuestos. 3) Establecer que el opuesto de x es $-x$ y de $-x$ es x.
Tecnología	Generar una primera significación concreta sobre los números opuestos.

Fuente: Elaboración propia

Tabla 4. OD relativa a $T_{c2:}$ conceptualizar la noción de números opuestos a partir del análisis de ejemplos

Tarea (T_{c2})	Establecer una definición de números opuestos a partir de las afirmaciones elaboradas por los estudiantes
Técnica	1) Realizar un debate analizando las afirmaciones elaboradas por los estudiantes. 2) Identificar qué aspectos debe de tener una definición. 3) Establecer una definición de números opuestos empleando la condición deben de cumplir dos números para ser opuestos.
Tecnología	Generar una primera significación concreta sobre los números opuestos.

Fuente: Elaboración propia

La tarea del tipo T_{c1} se llevó a cabo en la clase mediante la siguiente propuesta a los estudiantes:

Sabiendo que: 3 y -3 -12 y 12 -9 y 9 2 y -2

cada una de las parejas de números, son números opuestos. Escribe con tus palabras qué significa que un número es opuesto de otro

En este caso se puede identificar que el tipo de lenguaje que aparece en la consigna es coloquial matemático y lenguaje intermediario básico, ya que se utilizan términos como “opuesto” de índole matemático, distanciándose del lenguaje coloquial puro. En la segunda parte de la consigna, pedir a los estudiantes que expresaran con sus palabras el significado de un número opuesto, se pretendía una transición del lenguaje coloquial matemático al intermediario básico, pues se trata de expresar una propiedad de los números enteros con el lenguaje coloquial, sin imponer el lenguaje intermediario básico. Es decir, el objetivo de esta tarea es que los estudiantes construyan un discurso tecnológico-teórico, a partir de analizar varios ejemplos, reconociendo los elementos invariantes y definiendo una propiedad de los números enteros, el discurso de la docente está marcado por el uso de un lenguaje intermediario medio. En el discurso tecnológico de la docente se reconoce la invitación a que los estudiantes utilicen variables para generalizar de forma explícita. A partir del registro de las ideas de los estudiantes, se diseña la consigna de T_{c2}.

A continuación, se detallan algunas de las preguntas realizadas a los estudiantes para construir el discurso tecnológico-teórico:

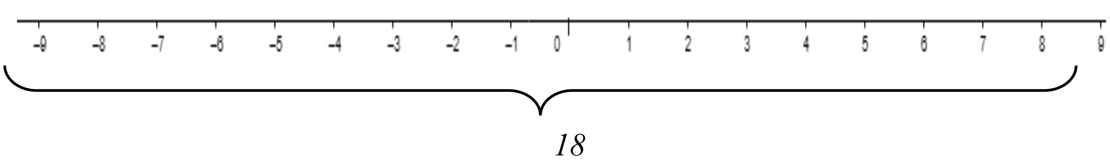
"¿La idea que escribiste servirá para cualquier número natural?" (no se menciona al conjunto de los números enteros debido a que aún no se introdujo en clase). Se considera importante aclarar que esta tarea pretende que los estudiantes transiten por diversos tipos de lenguaje con el objetivo de que se llegue en cierta medida a un dominio del tema matemático, de conceptos y de propiedades, así como cierta capacidad de abstracción para expresar dichos conceptos y propiedades mediante signos y símbolos.

La consigna que se les presentó a los estudiantes en relación al tipo T_{c2} consistía en presentarles enunciados elaborados por ellos mismos y solicitarles que ellos eligieran el que mejor define a los números opuestos.

Figura 5. Lista de definiciones propuestas por los estudiantes

Si tuviéramos que elegir una de estas ideas como definición, ¿cuál elegirían? y ¿por qué?

1) *Son números contrarios pero el mismo número. -12 fuego y 12 agua*
2) *Los dos números son iguales, uno negativo y otro positivo.*
3) *Significado no es igual a otro o siquiera parecido. Un positivo no se enfrenta a un negativo.*
4) *Si le restas el mismo número da 0. Si a 10 le restas 10 da cero. 10-10 = 0*
5) *A cualquier número le restas el doble me daría el mismo número negativo a-(a+a) =-a donde a+a es el doble de a.*
6) *Agrega al 2 que uno es mayor que cero y el otro es menor que cero.*
7) *Son contrarios, si a -12 +12 =0 y no 12, b no es lo mismo que –b*
8)



Fuente: Elaboración propia

Los enunciados presentados en estas tareas se basan en ideas que los estudiantes expresaron como respuesta a la tarea T_{c1}. Se puede identificar que sus definiciones están expresadas en lenguaje coloquial matemático o en intermediario básico, mientras que realizar la la tarea T_{3a} requería un lenguaje intermediario medio. Además, en el discurso tecnológico de la docente se insta a que los estudiantes utilicen variables "*a*" y "-*a*" para generalizar de forma explícita y al uso de cuantificadores expresados en lenguaje coloquial o en un lenguaje intermediario básico. Algunas de las preguntas que se realizaron a los grupos con base en esta tarea y con el objetivo de reflexionar sobre la forma de expresar la definición de los números opuestos: "¿Puedo dar una definición usando en ella el mismo concepto que quiero definir?" otra de las preguntas que se realizó fue "¿todos los números naturales tienen opuesto?" comenzado así a discutir lo que sucede con el 0. Otras preguntas fueron "¿Quién es *b*? y ¿–*b*?".

Nuevamente, se pretende que, en la construcción del discurso tecnológico teórico, los estudiantes transiten por diferentes tipos de lenguaje.

A continuación se realiza un análisis breve de la organización matemática de los estudiantes relativa a tareas de los tipos: T_{c1} *y* T_{c2}

La técnica y tecnología de algunas de las respuestas que fueron dadas por los estudiantes en la puesta en común de la tarea implementada del tipo T_{c1} que se presentó anteriormente. Cuando un alumno responde que "Son números contrarios pero el mismo número. -12 fuego y 12 agua" se puede observar que su técnica fue la de comparar esas parejas de números, identificando fuerzas de igual magnitud, pero antagónicas. Existe una búsqueda de analogías en contextos extra-matemáticos y, en este caso, el fuego y el agua son elementos ostensivos. La tecnología parece ser la de considerar un sinónimo coloquial de la palabra "opuesto", que es "contrario".

Cuando un estudiante selecciona alguna de estas respuestas: "Los dos números son iguales, uno negativo y otro positivo" o "los dos números son iguales, representan lo mismo, pero uno es negativo y el otro es positivo", se podría decir que hay una técnica de comparación de las parejas de números, buscando similitudes y diferencias entre los ejemplos propuestos, la tecnología asociada podría ser la de considerar que "número" y "valor absoluto de un número" son equivalentes.

La respuesta "A cualquier número le restas el doble me daría el mismo número negativo a-(a+a) = -a donde a+a es el doble de a.", está asociada a la técnica de determinar una regla para obtener los números opuestos, apoyada en la tecnología de considerar la existencia de una propiedad general de los elementos del conjunto de los números enteros: cada elemento tiene un elemento opuesto o simétrico.

En la construcción de estas técnicas y tecnologías asociadas al tipo de tareas T_c el tipo de lenguaje que subyace no es único. En algunos casos, se emplea el lenguaje coloquial matemático, específicamente cuando se utilizan términos del lenguaje coloquial puro, pero también hay casos donde el lenguaje que subyace es un lenguaje intermediario básico, ya que se usan términos como "natural" o "negativo" que son de índole matemático, que se alejan del lenguaje coloquial puro. Además, se evidenciaron casos donde el lenguaje del discurso tecnológico es un lenguaje intermediario medio, debido a que los términos empleados se alejan del lenguaje coloquial. Lo que implica el uso de los signos, además de relatores y funtores como, por ejemplo: "=". También se utilizaron variables de forma explícita, para generalizar, y se reconocieron algunos cuantificadores expresados en lenguaje coloquial o bien expresados de forma implícita, por ejemplo –b y b o a-(a+a) = -a, que implícitamente expresan "para todo número entero positivo b...", "para todo número entero a…"

En suma, se podría decir que el tipo de lenguaje que subyace en la construcción de la técnica en este tipo de tareas es variado y que oscila entre un lenguaje coloquial matemático hasta un lenguaje intermediario medio. De igual forma, durante la elaboración del discurso tecnológico para el tipo de tarea T_c se evidencia cómo los estudiantes transitan entre los diferentes tipos de lenguaje.

Es importante destacar que la propuesta didáctica posibilitó el tránsito por los otros tipos de lenguaje coloquial puro, coloquial matemático y el intermediario básico, permitiendo a su vez, que los estudiantes adquirieran un dominio del conocimiento de conceptos y de propiedades, así como de cierta capacidad de abstracción para poder expresar dichos conceptos y propiedades a través de signos y símbolos. Lo que se evidencia a partir de la construcción del concepto que ellos mismos fueron construyendo en clase respecto a cómo definir números opuestos.

Conclusiones

Los resultados encontrados en la investigación a partir del análisis de dos libros de textos y de diferentes episodios de clases, mostró seis grandes tareas didácticas en la enseñanza de los números enteros y la forma en que estas tareas, desde las propuestas en contextos cotidianos hasta las más matemáticas, promueven el uso de tres lenguajes intermediarios, coloquial matemático, intermediario básico, intermediario medio. El lenguaje coloquial aparece en la introducción del tema del conjunto de los números enteros, que antecede a las tareas presentadas aquí, y en las que se utilizan contextos cotidianos: funcionamiento de un ascensor, alturas sobre y bajo el nivel del mar, temperaturas sobre y bajo cero. Estas situaciones en las que predomina el lenguaje coloquial, permiten la introducción de ostensivos matemáticos, -2, -1 para etiquetar los pisos subterráneos y las temperaturas bajo cero, el 0 para la planta baja y para el punto neutral del termómetro. La evolución en el tratamiento didáctico de estos ostensivos obliga a transitar del lenguaje coloquial matemático a los lenguajes intermediarios básico e intermedio. Más precisamente, solicitar a los estudiantes definir los números opuestos a partir del análisis de varios ejemplos, posibilita la el uso de varios tipos de lenguaje, coloquial matemático, "son números contrarios […] 12 agua y -12 fuego", del intermediario básico "*A cualquier número le restas el doble me daría el mismo número negativo a-(a+a) =-a donde a+a es el doble de a.*" Analizar las diferentes "definiciones" propuestas por los estudiantes, permite a la docente promover una transición colectiva a los lenguajes intermediarios básico e intermediario medio. En esta evolución los tipos de tareas resultan clave, ya que de ello dependerán el tipo de técnicas necesarias para su resolución, distintos niveles de abstracción y, por tanto, diferentes tipos de lenguajes matemáticos intermediarios para comunicarlas.

También se evidenció que la función de los lenguajes intermediarios es posibilitar la conceptualización de los números enteros, mediante diferentes tareas didácticas presentadas gradualmente: analizar ejemplos, producir primeras definiciones individuales, análisis colectivo de las definiciones, consenso sobre "la definición más adecuada". La gestión de la docente de estas tareas resulta fundamental en esta conceptualización, ya que motiva transiciones entre diferentes tipos de lenguajes intermediarios. En este sentido, esta investigación muestra una ruta teórica-metodológica para generar propuestas didácticas, manteniendo como referente los libros de texto, pero poniendo una atención especial en la construcción del lenguaje matemático, a partir de generar transiciones entre diferentes tipos de lenguajes intermediarios.

Referencias bibliográficas

Alfaro, H. (2019). Taking advantage of the different types of mathematical languages to promote students' meaningful learning. *11th Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME 11)*, Utrech, Holanda. https://cerme11.org/

Bittar, M. (2017). A Teoria Antropológica do Didático como ferramenta metodológica para análise de livros didáticos. *Zetetiké, 25*(3), 364-387.

Borbonet, M., Burgos, B., Martínez, A. y Ravaioli, N. (2005). *Matemática 1*. Montevideo Uruguay: Fin de Siglo.

Bosch, M. y Gascón, J. (2009). Aportaciones de la Teoría Antropológica de lo Didáctico a la formación del profesorado de matemáticas de secundaria. En González, M., González, M. y J. Murillo. (Eds.), *Investigación en Educación Matemática. XIII Simposio de la SEIEM,* (pp. 89-113). SEIEM.

Ochoviet, C. y Vitabar, F. (2013). *Matemática 1*. Montevideo Uruguay: Losa Ediciones.

Parra, A. & Trinick, T. (2018). Multilingualism in indigenous mathematics education: an epistemic matter. *Mathematics Education Research Journal 30*, 233–253. https://doi.org/10.1007/s13394-017-0231-5

Rivero, F. (2020). *Análisis de prácticas lingüísticas en torno a la enseñanza de los números enteros. Un estudio exploratorio***.** **[**Tesis de maestría, CICATA, IPN]. Repositorio Institucional. https://www.cicata.ipn.mx/assets/files/cicata/ProME/docs/tesis/tesis_maestria/2020/rivero_2020.pdf

Roshaní, C. (2019). *Análisis de prácticas lingüísticas asociadas a la actividad matemática en la formación de futuros profesores***.** **[**Tesis de maestría, CICATA, IPN]. Repositorio Institucional. https://www.cicata.ipn.mx/assets/files/cicata/ProME/docs/tesis/tesis_maestria/2019/roshani_2019.pdf

Roshaní, C. y Romo-Vázquez, A. (2020). Lenguajes intermediarios y su rol en la enseñanza de las matemáticas. Una experiencia de formación docente. *Fuentes de Aprendizaje e Innovación, 1*(1), 4-25.

Schleppegrell, M. J. (2010). Language in mathematics teaching and learning: A research review. In J. N. Moschkovich (Ed.), *Language and mathematics education: Multiple perspectives and directions for research* (pp. 73-112). Information Age Publishing.

Sfard, A. (2012). Introduction: Developing mathematical discourse—Some insights from communicational research. *International Journal of Educational Research*, *51-52*, 1-9.

Sierra, T. (2006). *Lo matemático en el diseño y análisis de organizaciones didácticas: los sistemas de numeración y la medida de magnitudes*. [Tesis de doctorado, Universidad Complutense]. Repositorio Institucional. http://eprints.ucm.es/tesis/edu/ucm-t29075.pdf