Clame Acta Latinoamericana de Matemática Educativa
SECCIÓN 2 / PROPUESTAS PARA LA ENSEÑANZA DE LAS MATEMÁTICAS
VOL 34, NÚMERO 2, AÑO 2021

PROPUESTA DE MODELACIÓN MATEMÁTICA PARA LA COMPRENSIÓN DE LAS RAZONES TRIGONOMÉTRICAS EN UN CONTEXTO DE ENTORNOS RURALES

MATHEMATICAL MODELING PROPOSAL FOR UNDERSTANDING TRIGONOMETRIC RATIOS IN A RURAL ENVIRONMENT CONTEXT

Raúl Efraín Sánchez Martínez, Gabriela Ibarra Ruiz, Jesús Roberto Alcantar Palacios.
Centenaria y Benemérita Escuela Normal del Estado de Querétaro "Andrés Balvanera" (México)
raulefrainsanchezmartinez18@gmail.com, gabrielaibarraruiz8@gmail.com, jalcantar021@gmail.com

Resumen
La presente propuesta expone el uso áulico de un material didáctico que pretende disminuir las dificultades que hay en el aprendizaje y aplicación práctica de las razones trigonométricas, a través de un triángulo rectángulo interactivo. Dicho material se realizó con el propósito de emplearse con estudiantes de tercer grado de secundaria que habitan en zonas que carecen de entornos tecnológicos. Cabe señalar que la propuesta fue enriquecida con una contextualización en torno a un sentido ecológico y sustentable, con el que los alumnos se sintieran atraídos, además de poder visualizar el tema de forma cercana; se manifestó interés por parte de los estudiantes, logrando una mejor comprensión del tema, puesto que no se limitaron a utilizar solo el material propuesto, sino que hicieron uso de otras herramientas matemáticas que les ayudaron a encontrar soluciones a los problemas planteados.

Palabras clave: razones trigonométricas, interdisciplinar, modelación

Abstract
This paper presents the classroom use of a didactic material that aims to diminish the existing difficulties in the learning and practical application of the trigonometric reasons, through an interactive right-angle triangle. The aforementioned material was made with the aim to be used with third-grade middle school students who live in areas that lack technological environments. It should be point out that the proposal was enriched with a contextualization around an ecological and sustainable sense, what made students feel attracted, in addition to be able to visualize the subject in a close way. Interest was expressed on the part of the students, achieving a better understanding of the subject, since they did not limit themselves to using only the proposed material, but they made use of other mathematical tools that helped them to find solutions to the problems posed.

Key words: trigonometric ratios, interdisciplinary, modeling

Introducción

El presente escrito hace referencia a un reporte de actividad escolar, llevado a cabo durante el mes de enero de 2020, antes de comenzar la contingencia sanitaria derivada de la propagación del virus COVID-19 en México. La experiencia educativa se implementó con alumnos de tercero de secundaria, pues es hasta este grado que se propone la enseñanza de las razones trigonométricas de acuerdo con el plan de estudios mexicano.

La propuesta presentada se relaciona con el uso de un material didáctico referente a la manipulación de un triángulo rectángulo con vértices móviles, con el propósito de facilitar la comprensión y hacer palpable la aplicación de las razones trigonométricas. La pertinencia de este material es la funcionalidad en ambientes escolares donde se carece de entornos tecnológicos, ya que es un sustituto visual y manejable de plataformas de geometría dinámica, por lo que se vuelve relevante al poder ser ocupado en ambientes rurales, presentando de una manera interesante un contenido complicado.

En la enseñanza secundaria el contenido matemático que concierne a las razones trigonométricas, ha sido objeto de estudios epistemológicos debido a que: "la trigonometría es un contenido escolar que resulta difícil de entender por los estudiantes" (De Kee, Mura y Dionne, 1996; Maldonado, 2005; citado por Martin Fernández, Ruiz Hidalgo y Rico, 2016, p. 52).

De acuerdo con el contenido matemático, más allá de aprender un algoritmo de resolución, está la comprensión y aplicación de los procedimientos, los cuales pocas veces son reflexionados por los docentes, ya que se acostumbra a presentar dicho tema con ejercicios, donde se tiene que encontrar la dimensión de un lado faltante del triángulo rectángulo (Montiel, 2013).

Las actividades se llevaron a cabo con el objetivo de que los alumnos obtuvieran los modelos matemáticos de las razones trigonométricas seno y coseno, pretendiendo "llevar al alumno a construir conocimientos que tienen significados o sentido para él" (Biembengut y Hein, 2004, p. 108). Se decidió trabajar con aspectos teóricos de la modelación matemática, involucrando un tema actual como es el caso del cambio climático, implementando el trabajo interdisciplinar con la asignatura de Biología, donde se abordó el desarrollo sustentable como una propuesta que contrarreste los efectos de dicha problemática global.

Marco teórico

Para llevar a buen término las actividades planteadas en la propuesta presentada, se decidió trabajar con la modelación matemática expuesta por Biembengut y Hein (2004), quienes mencionan la importancia de introducirla en las aulas de secundaria como un recurso que apoye el proceso de enseñanza-aprendizaje, ya que: "permite al alumno no solamente aprender las matemáticas de manera aplicada a las otras áreas del conocimiento, sino también mejorar la capacidad para leer, interpretar, formular y solucionar situaciones problema" (Biembengut y Hein, 2004, p. 105).

Se consideró la definición planteada por los autores: "La modelación matemática es un proceso involucrado en la obtención de un modelo matemático. Un modelo matemático de un fenómeno o situación problema es un conjunto de símbolos y relaciones matemáticas que representa, de alguna manera, el fenómeno en cuestión" (Biembengut y Hein, 2004, p. 106).

La modelación busca que, a través de una interacción con el medio real, los alumnos puedan plantear los modelos adecuados que permitan dar solución a las problemáticas presentadas y de esta manera comprendan el contenido matemático relacionado. Para la puesta en práctica de las actividades, se consideraron las etapas de la modelación matemática del primer abordaje propuesto por los autores, con el objetivo de contextualizar el material didáctico y lograr que los estudiantes fueran miembros activos del aprendizaje.

Por lo anterior, esta propuesta de actividad escolar se clasifica dentro de la modelación como herramienta para enseñar y aprender matemática, donde lo relevante es: "la producción de significados matemáticos articulados a los significados de los objetos en los contextos y profesiones en que se modelan" (Villa-Ochoa y Alencar, 2019, p. 25), donde la importancia radica en construir conceptos matemáticos a partir de contextos cercanos a los alumnos.

Los alumnos no comprenden el significado de las razones trigonométricas pues el contenido tradicionalmente se imparte presentando fórmulas donde tienen que sustituir valores para encontrar lo que se pide. De acuerdo con Montiel (2013, p. 27): "El discurso Trigonométrico Escolar (dTE) ha convertido a las razones trigonométricas en el proceso aritmético de dividir las longitudes de los lados del triángulo, esto es, en una técnica para encontrar valores faltantes de un triángulo".

De esta manera, se ha decidido trabajar desde una perspectiva distinta a la comúnmente empleada, rescatando elementos que involucran a la proporcionalidad, de acuerdo con las investigaciones de Montiel (2013), pues es de esta confrontación donde surgen las razones trigonométricas. Algunas de las actividades de su trabajo son parte fundamental del presente reporte, pues complementado con el uso de un prototipo manipulable permite que los estudiantes establezcan las relaciones y razones proporcionales entre los elementos del triángulo rectángulo, logrando una comprensión más cercana de las razones trigonométricas.

Se sabe, de acuerdo con un estudio realizado por Naranjo y Triana (2015, p. 70) que:

Los estudiantes no le encuentran sentido a las respuestas que obtienen: por ejemplo, hallan el valor de la hipotenusa y, por algún error de procedimiento, obtienen un valor incorrecto menor al valor de los catetos; aun así, siguen resolviendo el triángulo.

Ello ratifica que es indispensable la adecuación de la clase en la que se imparta este contenido matemático, involucrando la participación de los estudiantes, donde puedan observar lo que ocurre al cambiar las longitudes de los elementos del triángulo y de esta manera se pueda generar un ambiente de aprendizaje significativo. Por otra parte, es necesario recalcar que, de acuerdo con Vasco (1978, p. 100): "La producción matemática parte de actividades, de manipulaciones, acciones, movimientos". Por lo que se corrobora el involucramiento activo de los estudiantes, donde puedan ser miembros de escenarios de aprendizaje auténtico, poniendo en marcha el uso de sus conocimientos, habilidades y actitudes.

Metodología

Se abordó desde la perspectiva del enfoque cualitativo y mediante la investigación-acción cuyos rasgos, entre otros, son la autorreflexión de los participantes (alumnos y profesores) para la mejora de sus prácticas (Kemmis y McTaggart, 1988), lo que permitió hacer uso de la técnica descriptiva para explicar el desarrollo de las actividades planteadas, así como lo ocurrido durante el proceso de enseñanza-aprendizaje con los estudiantes.

Para la organización de actividades se consideraron los elementos teóricos de Biembengut y Hein (2004), considerando el primer abordaje de modelación propuesto por los autores. Además, se tomaron en cuenta las ideas de Villa-Ochoa y Alencar (2019) contextualizando en un sistema de riego triangular el contenido. También, se involucraron ideas propuestas por Montiel (2013), las cuales fomentan la relación entre lo proporcional y lo trigonométrico, encaminando a los estudiantes hacia la modelación, llegando a comprender los modelos de seno y coseno. Las actividades se organizaron de la siguiente manera:

1.Exposición del tema Se realizó una exposición en Power Point donde se presentaron los principales efectos y problemáticas ocasionadas por el cambio climático, además como propuesta para combatirlo se mencionó el desarrollo sustentable, el cual se podría visualizar por medio de la construcción de un pequeño sistema de riego de forma triangular, donde se colocaron plantas que podían consumir agua de un contenedor, por medio de un proceso llamado ósmosis. Las plantas con las que se trabajó poseen las siguientes características:

Tabla 1. *Plantas empleadas en el sistema de riego triangular.*

Planta	Descripción
Hierbabuena	Es una planta que se usa como condimento por sus peculiaridades culinarias. También suele emplearse en farmacología como carminativo, estimulante y antiespasmódico (Japon Quintero, 1985, p. 13).
Romero	Planta rica en principios activos y con acción sobre casi todos los órganos de cuerpo humano. Al tener un alto contenido en aceites esenciales, cuyos ingredientes activos son flavonoides, ácidos fenólicos y principios amargos, genera una acción tónica y estimulante sobre el sistema nervioso, circulatorio y corazón (Musa y Chalchat 2008; citado por Avila Sosa, Navarro-Cruz, Vera-López, Dávila-Márquez, Melgoza-Palma y Meza-Pluma, 2011, p. 24).
Perejil	Las hojas pueden utilizarse como condimento, crudas o cocidas. Se añaden a las salsas, ensaladas, etc., tanto para dar su típico sabor como para adornar los platos. Hoy día la industria expende las hojas de perejil troceadas y envasadas en botes de cristal. La destilación de la planta permite obtener esencias y un aceite utilizado como estimulante (Japon Quintero, 1985, p. 20).

Elaboración de los autores.

Figura 1. *Hierbabuena, romero y perejil.*

Fotografía de los autores.

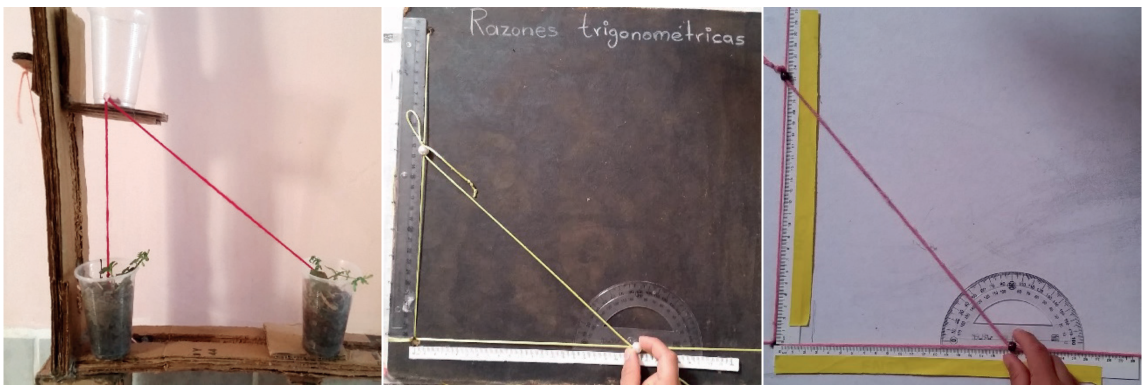
El estudio y producción de vegetales, plantas, hierbas o frutos pueden ayudar a combatir el cambio climático, por medio del desarrollo sustentable, fomentando la elaboración de un huerto en casa, que permita consumir y compartir con otros lo sembrado. Además, el cultivo sirve para diversas causas, ya que existen plantas ornamentales, medicinales, gastronómicas, entre otras. Por lo tanto, la investigación de estos aspectos se dejó a consideración de los alumnos, pues ellos mismos decidieron que tanto profundizar y conocer acerca de las plantas que sembrarían, lo que les pareció algo atractivo e interesante, pues muchas veces no se reflexiona acerca de las plantas y sus múltiples beneficios para la humanidad.

El objetivo de este primer paso es precisamente que los alumnos se sientan atraídos por la temática expuesta y se involucren desde el primer momento en la investigación, así como en la formulación de preguntas que incrementen su curiosidad, pues ello contribuirá más adelante a relacionarlo con el contenido matemático.

La prueba del material se realizó en dos grupos de tercer grado de secundaria, en el estado de Querétaro, México. Los alumnos se organizaron para producir su propio material en equipos de 5. El material consta de un triángulo rectángulo simulado con piezas de cartón o madera de 50 cm x 50 cm, en el que los vértices correspondientes a los ángulos agudos pueden ser modificados manualmente, donde con ayuda de reglas y un transportador adheridos al mismo, se aprecia el cambio de longitudes de los catetos y los ángulos agudos, representados por partes del mismo prototipo y estambres, esperando contrarrestar lo expuesto por Naranjo y Triana (2015), llevando al alumno a comprender el sentido de lo que obtienen.

Dado que se trabajó con plantas, se decidió elaborar un prototipo con plantas y uno sin plantas, donde se pudieran observar de mejor manera las longitudes al modificar alguno de los elementos del triángulo rectángulo.

Figura 2. *Prototipos triangulares con vértices móviles.*



Fotografía de los autores.

Dicho sistema cuenta con un contenedor de agua “A”, (vértice superior), una planta B y una planta C, ubicadas en los vértices inferiores. El cateto adyacente al contenedor de agua y la hipotenusa se encargan de suministrar el agua a las plantitas por medio de estambres, realizando el proceso de ósmosis.

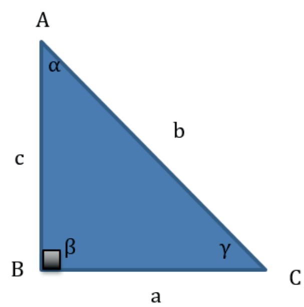
“La ósmosis es el paso de un disolvente a través de una membrana semipermeable, la cual permite el paso de algunos tipos de partículas, pero no de todas. El proceso espontáneo es siempre el paso de disolvente hacia la solución más concentrada” (Corominas, 2009, p. 151). En este caso se empleó la ósmosis inversa por medio de la capilaridad que ofrece el estambre que transporta el agua, pues precisamente esta propiedad, permite que la planta pueda adquirir el agua necesaria para su supervivencia.

2. Delimitación del problema Se delimitó el problema realizando preguntas detonadoras a los alumnos y solicitando la investigación sobre ellas. Se cuestionó qué pasaría si se modifican las posiciones del contenedor de agua y las plantas, a lo que una estudiante respondió que se modifican las distancias de los catetos e hipotenusa. Posterior a ello se preguntó cómo se podían obtener dichas distancias, donde las respuestas fueron muy interesantes pues mencionó que podía usar una regla para medir, utilizar la semejanza de triángulos o bien construir algunos con las mismas características para obtener la medida que faltara.

Se hicieron otras preguntas como cuál de las dos plantitas requiere mayor cantidad de agua, y cómo podemos saber qué estambre es el que conduce mayor cantidad de agua, solo como reflexión, ya que también se debía tomar en cuenta para colocar la especie de la planta de acuerdo con la cantidad de agua que requiere, aunque no se hicieron los cálculos en ese aspecto, se requiere analizar el agua que fluye a través de los estambres, puesto que un exceso de agua puede hacer que la planta muera.

3. Formulación del problema Ante la problemática del cambio climático, se ha propuesto construir un huerto personal que permita promover el desarrollo sustentable en nuestro hogar. El huerto tiene forma triangular como el siguiente:

Figura 3. *Notación de un triángulo rectángulo.*



Elaboración de los autores.

-En el vértice A se encuentra un contenedor de agua, en los vértices B y C se encuentra una plantita en cada uno.

a) Si colocamos el contenedor de agua a 15 cm de altura de la planta B, con un ángulo de 45° respecto a la planta C. ¿Qué longitud tendrá el estambre del contenedor a la planta C?
b) ¿Cuántos centímetros hay de separación entre cada planta?
c) Si colocamos el estambre del contenedor a 50° respecto a la planta C y las plantas B y C, están separadas 30 cm ¿Qué distancia existe entre el contenedor de agua y la planta C?
d) De acuerdo con lo anterior, ¿Qué altura tiene sobre la planta B?
e) Si se coloca el contenedor a 25 cm de altura sobre la planta B, y la distancia entre el contenedor y la planta C es de 50 cm, ¿Cuál es la abertura del ángulo del estambre del contenedor respecto a la planta C?

Una vez presentado el problema se pidió que le dieran solución utilizando los métodos que desearan, incluyendo el uso del prototipo manipulable. Fue aquí donde se pudieron apreciar distintas estrategias pues estas pueden pertenecer a las matemáticas intuitivas, previas a conocer y aplicar las razones trigonométricas. La estrategia propuesta en el presente artículo es el uso de un prototipo manipulable, del cual hicieron uso de manera adecuada y encontraron resultados muy aproximados, pero esta no fue la única manera en que los alumnos lograron llegar a una aproximación, pues utilizaron otras herramientas matemáticas que les ayudaron bastante, a continuación, se analiza el uso y procedimientos empleados.

Prototipo manipulable Para encontrar las soluciones a las diferentes cuestiones, los estudiantes reflexionaron sobre lo que se les estaba solicitando, manipulando el prototipo, modificando las distancias de los catetos e hipotenusa, así como la abertura de los ángulos agudos, las medidas las obtuvieron con una regla, así como con un transportador. Ello permitió que los estudiantes pudieran observar algunas de las relaciones entre los lados del triángulo rectángulo del problema inicial, pues conforme obtuvieron los resultados, se percataron de que la hipotenusa siempre es el lado más grande y que en ocasiones los catetos y ángulos agudos miden lo mismo.

La importancia del uso de este prototipo es que los estudiantes puedan manipular para encontrar respuestas, lo cual los prepara de manera previa al contenido de razones trigonométricas. Además, es un sustituto de una plataforma de geometría dinámica, el cual se planteó con el objetivo de ser utilizado en zonas rurales sin acceso a ese tipo de tecnologías.

Construcción de triángulos Algunos alumnos hicieron uso de esta estrategia, pues el contenido ya lo habían visto previamente. Con este contenido trazaron en su cuaderno los distintos triángulos de acuerdo con las especificaciones, corroborando sus medidas con el uso de la regla y transportador, fue parecido a lo que hicieron con el prototipo, a diferencia de que con esta estrategia deben trazar cada uno de los triángulos y en el prototipo basta con modificar los vértices para poder obtener el triángulo deseado.

Semejanza de triángulos De igual forma este contenido fue visto de manera previa, para hacer uso de él trazaron un triángulo rectángulo pequeño y midieron sus lados, luego relacionaron las medidas dadas en el problema con las del triángulo pequeño, estableciendo proporciones, para de esta manera encontrar el lado faltante, cabe mencionar que con esta estrategia pudieron encontrar solo los lados, ya que los ángulos no los pudieron encontrar haciendo uso de este método.

Las respuestas encontradas a las preguntas con los distintos métodos fueron las siguientes:

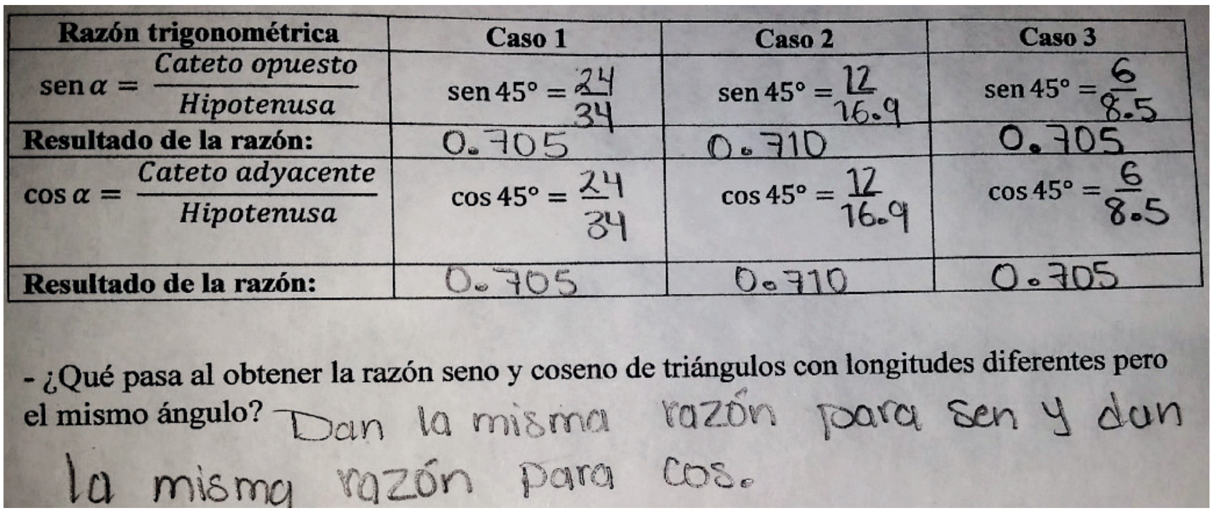
Tabla 2. *Problemáticas planteadas y respuestas de uno de los equipos.*

Problemática	Herramienta matemática utilizada	Respuestas
a. Si colocamos el contenedor de agua a 15 cm de altura de la planta B, con un ángulo de 45° respecto a la planta C. ¿Qué longitud tendrá el estambre del contenedor a la planta C?	Prototipo Construcción Proporciones / semejanza	21.3 cm 21.5 cm 21.9 cm
b. ¿Cuántos centímetros hay de separación entre cada planta?	Prototipo Construcción Proporciones / semejanza	15 cm 15 cm 15 cm
c. Si colocamos el estambre del contenedor a 50° respecto a la planta C y las plantas B y C, están separadas 30 cm ¿Qué distancia existe entre el contenedor de agua y la planta C?	Prototipo Construcción Proporciones / semejanza	39 cm 39 cm 39.3 cm
d. De acuerdo a lo anterior, ¿Qué altura tiene sobre la planta B?	Prototipo Construcción Proporciones / semejanza	24.2 cm 25.4 cm 25.2 cm
e. Si se coloca el contenedor a 25 cm de altura sobre la planta B, y la distancia entre el contenedor y la planta C es de 50 cm, ¿Cuál es la abertura del ángulo del estambre del contenedor respecto a la planta C?	Prototipo Construcción Proporciones / semejanza	No se pudo No se pudo No se pudo

Elaboración de los autores.

4. Desarrollo del contenido programático En esta etapa del primer abordaje se utilizó una de las actividades propuestas por Montiel (2013) que orientó a los alumnos a llegar a los modelos matemáticos de las razones trigonométricas seno y coseno, aquí es donde se pudo corroborar la importancia de la modelación. Además, ello permitió proponer actividades complementarias para lograr la comprensión del contenido, ya que estuvieron orientadas a responder qué pasa al obtener la razón seno y coseno de triángulos con longitudes diferentes pero el mismo ángulo. Por ejemplo, una de las actividades que propusimos consistió en establecer en 3 ocasiones las relaciones entre los elementos del triángulo rectángulo, donde siempre se mantuvo un ángulo de 45°, pero las longitudes de los catetos e hipotenusa se modificaban.

Figura 4. *Comparación de elementos del triángulo rectángulo con un mismo ángulo.*



Razón trigonométrica	Caso 1	Caso 2	Caso 3
$\text{sen}\,\alpha = \frac{\text{Cateto opuesto}}{\text{Hipotenusa}}$	$\text{sen}\,45° = \frac{24}{34}$	$\text{sen}\,45° = \frac{12}{16.9}$	$\text{sen}\,45° = \frac{6}{8.5}$
Resultado de la razón:	0.705	0.710	0.705
$\cos\alpha = \frac{\text{Cateto adyacente}}{\text{Hipotenusa}}$	$\cos 45° = \frac{24}{34}$	$\cos 45° = \frac{12}{16.9}$	$\cos 45° = \frac{6}{8.5}$
Resultado de la razón:	0.705	0.710	0.705

- ¿Qué pasa al obtener la razón seno y coseno de triángulos con longitudes diferentes pero el mismo ángulo? Dan la misma razón para sen y dan la misma razón para cos.

Elaboración de los autores.

5.Presentación de ejemplos análogos Trabajando en el huerto personal se pudo visualizar un sistema a escala de problemas de la vida cotidiana, como la obtención de grandes distancias y alturas, problemas relacionados con la arquitectura, ingeniería civil, construcciones como rampas y puentes, entre otras situaciones que se pueden apreciar en la vida cotidiana. Ello permitió que los estudiantes comprendieran la importancia de hacer uso de las razones trigonométricas en el contexto real y no solo en el aspecto matemático.

6.Formulación de un modelo matemático y resolución del problema a partir del modelo Dado que los modelos de las razones trigonométricas seno y coseno se obtuvieron en una etapa previa, en esta fase se utilizaron para dar solución a la problemática inicial y comparar los resultados obtenidos con los distintos métodos empleados. Además, se invitó a los alumnos a comprobar los resultados de las distancias midiendo y comprobando la aplicación de las razones trigonométricas en el sistema de riego, cuestionándoles si se aproximaba la distancia obtenida con la regla a la obtenida con las razones, a lo que la mayoría respondió que sí.

También se cuestionó, qué beneficios tenía la aplicación de las razones trigonométricas, a lo cual respondieron que nos da resultados más exactos, en menor tiempo, a comparación de los otros métodos empleados, puesto que llevaron más tiempo de resolución al hacer uso de ellos.

Haciendo uso de las razones trigonométricas, las respuestas a los problemas referidos en la tabla 2 fueron las siguientes:

Tabla 3. *Respuestas obtenidas por un equipo aplicando las razones trigonométricas.*

Problema	Respuestas con razones trigonométricas
a.	21.21 cm
b.	14.99 cm
c.	39.16 cm
d.	25.17 cm
e.	60°

Elaboración de los autores.

7.Interpretación de la solución y validación del modelo En el sistema de riego se podían verificar las distancias que se movieran o los grados que adoptaran, dejando siempre un lado faltante a calcular, por lo que se pudieron establecer y aplicar los modelos de las razones trigonométricas, en este caso el de

$$sen\ \alpha = \frac{Cateto\ opuesto}{hipotenusa}\ ,\text{y}\ \ cos\ \alpha = \frac{Cateto\ adyacente}{hipotenusa}.$$

Finalmente, se realizó la interpretación de la solución y validación de los resultados encontrados con los modelos, donde se invitó nuevamente a los alumnos a comprobar los resultados de las distancias, midiendo y comprobando en el sistema de riego. Así nos acercamos a la manipulación de la matemática propuesta por Vasco (1978).

Se realizó una reflexión sobre el uso de las razones trigonométricas, y se propusieron algunas mejoras al prototipo, también se planteó la idea de tomar en cuenta la cantidad de agua que requiere cada planta, cuál requiere más, cuál requiere menos. Algunos alumnos comentaron que la solución de los problemas se puede realizar con distintos métodos, pero que las razones dan un resultado más certero.

Análisis de resultados

Se observó una interacción positiva por parte de los alumnos respecto al material, logrando así una mejor visualización de la aplicación, así como el uso de las razones trigonométricas por medio del manejo y configuración de las medidas del triángulo rectángulo. Además, se pudo corroborar que se facilitó la comprensión de para qué sirven las razones trigonométricas a través del manejo de la modelación matemática.

Se impulsó la contextualización que mencionan Villa-Ochoa y Alencar (2019) promoviendo el desarrollo sustentable por medio del cuidado de especies vegetales de consumo y que ocupan poco espacio en el hogar, relacionando esto con la parte matemática del prototipo. Los estudiantes comentaron que habían adquirido la responsabilidad por cuidar y mantener vivas a sus plantas. Para obtener respuestas certeras, se realizó una evaluación del prototipo propuesto, que fue a lo que se le dio énfasis en el presente artículo.

El objetivo principal, era precisamente que pudiera coadyuvar en el proceso de aprendizaje de las razones trigonométricas seno y coseno, lo que para algunos resultó de manera positiva, pues mencionaron que les había ayudado a corroborar el uso y aprendizaje del contenido debido a que al comparar las estrategias empleadas, se dieron cuenta de que en realidad el uso del prototipo les había proporcionado resultados aproximados a los que brindaban las razones trigonométricas, aunque hubo algunas distorsiones de medición al utilizar herramientas matemáticas tangibles, como lo fueron la regla y el transportador. Con lo anterior se contrarrestó lo planteado por Naranjo y Triana (2015), al lograr que los alumnos entendieran el sentido de los datos encontrados.

Por otra parte, la confrontación entre los distintos métodos para llegar a los resultados (Tabla 2), permitió visualizar que las razones trigonométricas son una herramienta matemática eficiente. Principalmente se buscó que los alumnos notaran regularidades al comparar razones (figura 4), permitiendo así dirigirse hacia la trigonometría, como lo propone Montiel (2013). De esta manera se introdujo una noción sobre la relación entre lo proporcional y lo trigonométrico, es decir, se logró que los alumnos observaran que las razones trigonométricas tienen un origen y no son simples fórmulas donde se sustituyen valores para encontrar otros.

Lo que realmente impactó en esta fase de la propuesta educativa, fue que algunos alumnos comentaron que el tema de razones es complicado, pero te queda más claro cuando lo ves, precisamente fue lo que se buscó con la implementación de este prototipo didáctico, resaltando la manipulación que menciona Vasco (1978), pues pocas veces se reflexiona por medio de la manipulación de elementos matemáticos de forma real, además lo que se pretendió fue hacer uso de él, debido a que en muchos espacios educativos se carece de tecnología, lo que favorece su utilización en zonas rurales.

Finalmente, se encontró que la implementación del método de modelación matemática (Biembengut y Hein, 2004), a través de propuestas manejables y cercanas al contexto de los alumnos, favorece en gran medida la comprensión de un tema complejo para la mayoría.

Como docentes en formación es necesario concientizar acerca de las dificultades y problemas epistemológicos respecto a los contenidos observados en educación básica, para que de esta manera se lleven a cabo propuestas en pro de que los estudiantes no manifiesten un rezago matemático, logrando adquirir las competencias necesarias para desenvolverse en ámbitos sociales y académicos, buscando siempre la superación personal.

Conclusiones

La propuesta educativa expresada en este artículo manifiesta una respuesta positiva por parte de los alumnos en cuanto a la comprensión del contenido matemático abordado. Se enfatiza que el profesor de matemáticas debe modificar su práctica pedagógica al momento de impartir este contenido, pues por lo regular se presentan las fórmulas para que sean sustituidas por valores numéricos que se encuentran en distintos triángulos rectángulos, de manera que solo se encuentren los elementos faltantes de esta figura geométrica como lo expresa Montiel (2013).

Por otra parte, el utilizar las etapas de la modelación que proponen Biembengut y Hein (2004), fueron clave para lograr una buena comprensión, pues estas dan la pauta para tener un seguimiento paso a paso en el aprendizaje, lo que permite identificar y profundizar en aspectos donde los estudiantes pudieran tener dudas.

El trabajar de manera interdisciplinar con la asignatura de Biología impulsa el trabajo colaborativo entre docentes, al igual que se manifiesta la amplia gama de aplicaciones donde se puede presentar la Matemática, pues, aunque no se reflexionó sobre las cantidades de agua y los recipientes empleados, cabe la posibilidad de realizar una investigación futura sobre estos aspectos, donde se pueda recuperar la colaboración interdisciplinar.

Agradecimientos

Agradecemos el apoyo brindado para la participación en la Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa (RELME 34), a nuestra institución: Centenaria y Benemérita Escuela Normal del Estado de Querétaro "Andrés Balvanera". Dicho apoyo favorece nuestra profesionalización como docentes, lo cual valoramos profundamente.

Referencias bibliográficas

Avila-Sosa, R., Navarro-Cruz, A., Vera-López, O., Dávila-Márquez, R. M., Melgoza-Palma, N. y Meza-Pluma, R. (2011). Romero (*Rosmarinus officinalis* L.): una revisión de sus usos no culinarios. *Ciencia y Mar XV(43),* 23-36.

Biembengut, M. S. y Hein, N. (2004). Modelación matemática y los desafíos para enseñar matemática. *Educación matemática, 16*(2), 105-125.

Corominas, J. (2009). Patatas y huevos osmóticos. *Revista Eureka sobre Enseñanza y Divulgación de las Ciencias, 7*(1), 151-157.

Japon Quintero, J. (1985). Cultivo del perejil y de la hierbabuena. *Hojas divulgadoras del Ministerio de Agricultura, Pesca y Alimentación, 14*, 1-20

Kemmis, S., Mc Taggart, T. (1988). *Cómo planificar investigación-acción*. Laertes.

Martin Fernández, E., Ruiz Hidalgo, J. F. y Rico, L. (2016). Significado escolar de las razones trigonométricas elementales. *Enseñanza de las ciencias, 34*(3), 51-71. DOI: https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.1871

Montiel Espinosa, G. (2013). *Desarrollo del pensamiento trigonométrico.* México: SEP.

Naranjo Triana, W. E. y Triana Tobar, M. A. (2015). Las razones trigonométricas a través del trabajo experimental en Matemáticas: reflexiones de una indagación en el aula. *Ejes 3*, 67-73.

Vasco, C. E. (1978). Estratificación conceptual del proceso de producción de conocimientos matemáticos. *Ideas y valores 27*(53-54), 99-112.

Villa-Ochoa, J. A., y Alencar, E. S. de. (2019). Un panorama de investigaciones sobre Modelación Matemática: Colombia y Brasil. *Revista De Educação Matemática 16*(21), 18 – 37. DOI: https://doi.org/10.25090/remat25269062v16n212019p18a37