

# COMPRENSIÓN DE LA ESPERANZA MATEMÁTICA Y VARIABILIDAD EN EL LANZAMIENTO DE MONEDAS POR ESTUDIANTES DE SECUNDARIA

## UNDERSTANDING OF MATHEMATICS EXPECTATION AND VARIABILITY BY SECONDARY SCHOOL STUDENTS

Nuria Begué, María Magdalena Gea, Jocelyn Díaz-Pallauta  
Universidad de Zaragoza. (España), Universidad de Granada. (España)  
nbegue@unizar.es, mmgea@ugr.es, jocelyndiaz@correo.ugr.es

### Resumen

Se analiza la comprensión de la esperanza matemática y la variabilidad mediante muestras tomadas de la distribución binomial en un grupo de 536 estudiantes españoles de educación secundaria y bachillerato. Para ello, a los participantes se les pide indicar cuatro valores probables para el lanzamiento de 100 y 10 monedas equilibradas. Del análisis de los valores medios y variabilidad de los datos entregados por los estudiantes se deduce una buena comprensión de la esperanza matemática, aunque es razonable para la variabilidad en 10 lanzamientos y excesiva en 100 lanzamientos. Se detecta una mejora del razonamiento al progresar el curso.

**Palabras clave:** pensamiento probabilístico, estadística, estudiantes de educación secundaria

### Abstract

This paper is aimed at analyzing the understanding of mathematical expectation and the variability through samples from binomial situations in a group of 536 Spanish secondary education and high school students. So, participants are asked to indicate four probable values for the toss of 100 and 10 balanced coins. From the analysis of the average values and the variability of the data provided by the students, a good understanding of mathematics expectation is deduced, although it is reasonable for the variability in 10 throws, but excessive in 100 throws. An improvement in reasoning is observed as the course progresses.

**Key words:** probabilistic thinking, statistics, secondary students

## ■ Introducción

La inferencia estadística nos permite obtener información de la población a partir del estudio de las muestras, por lo que resulta una herramienta esencial para la investigación. Esta es una de las razones por la que su enseñanza está presente en la universidad y la formación profesional (Batanero y Díaz, 2015). Los estudios dirigidos al análisis del currículo español revelan que este tema está presente en diferentes niveles educativos, tomando mayor relevancia en el segundo curso del Bachillerato de Humanidades y Ciencias Sociales. Sin embargo, la literatura nos advierte también de dificultades en su comprensión y aplicación. Según Batanero (2013), las dificultades surgen de la variedad de conceptos y procedimientos que intervienen en la inferencia, así como el poco tiempo que se dedica a su enseñanza.

Burril y Biehler (2011) indican que el estudio de la inferencia comienza por distinguir los conceptos de población y la muestra, junto con las ideas de representatividad y variabilidad muestral. En este sentido, la teoría del muestreo analiza la metodología para la obtención de muestras y sus propiedades con la finalidad de que las conclusiones obtenidas sean válidas y fiables. Por tanto, la estimación es una idea básica asociada al trabajo con el muestreo e implica la posibilidad de generalizar los datos de una muestra a una población mayor, a la vez se asume que la información obtenida presenta un margen de variabilidad. En definitiva, el sentido del muestreo exige coordinar de manera adecuada las ideas de representatividad y variabilidad muestral presentes en el proceso de muestreo (Batanero, Begué y Gea, 2018).

En el currículo español los contenidos de población y muestra se introducen desde el primer curso de la etapa de secundaria obligatoria (12-13 años); además, se propone que el trabajo de la probabilidad durante los dos primeros cursos (1º y 2º ESO) se fundamente en la simulación y/o experimentación (MECD, 2015). Por tanto, el currículo propone la enseñanza de la probabilidad a partir del enfoque frecuencial, lo que supone establecer un puente entre la probabilidad y la estadística, pues la Ley de los Grandes Números aparece implícita en algunas de las ideas asociadas al concepto de muestreo y a su vez supone la base del enfoque frecuencial.

El objetivo de nuestro trabajo es analizar la comprensión que muestran los estudiantes de educación secundaria obligatoria y bachillerato sobre la esperanza matemática y la variabilidad mediante muestras tomadas de la distribución binomial. Se consideran tres grupos de estudiantes de cursos distintos, por tanto, otro aspecto a estudiar es identificar si existe una progresión en la comprensión con respecto al curso escolar.

## ■ Marco referencial

La literatura que se ha centrado en analizar la comprensión del muestreo o caracterizar sus componentes, ha identificado una serie de niveles que nos permiten establecer en qué estadio se sitúa un sujeto. A continuación, se presenta una breve caracterización de algunas de estas investigaciones.

En la investigación de Rubin, Bruce y Tenney (1991) se investigaron a 12 estudiantes de bachillerato sin instrucción previa para formularles cuestiones sobre muestreo. Los autores identifican que los estudiantes ignoran que las muestras fueran representativas, lo que conduce a sobreestimar la obtención de valores centrales de la distribución muestral, independientemente del tamaño de la muestra.

Shaugnessy, Ciancetta y Canada (2004) estudian la variabilidad en el muestreo. En particular, pretenden analizar la comprensión que presentan 272 estudiantes (10-19 años) cuando se les presenta un contexto de caramelos de dos colores en el que el 40% son rojos y 60% son negros. Los estudiantes tenían que proporcionar una muestra de 10 elementos y otra de 100 elementos y, tenían que indicar si esperaban repetición de los resultados si se obtuviera una segunda muestra. Los resultados revelan que una parte de los estudiantes esperaban obtener el mismo resultado en las dos muestras repetidas del mismo tamaño, y algunos proporcionaron muestras muy poco probables (toda la muestra formada por caramelos negros). En relación con la variabilidad muestral, la mayoría sobreestimaron la

variabilidad de la distribución muestral sin considerar el efecto del tamaño de la muestra. Además, los autores identifican tres concepciones sobre las muestras: aditiva, proporcional y distribucional. La mayoría de los estudiantes se sitúan en la primera concepción, que se caracteriza por aquellas respuestas que se guían por la proporción presente en la población.

Siguiendo a Ben-Zvi, Bakker y Makar (2015), la variabilidad inherente al proceso de muestreo se fundamenta en las ideas de aleatoriedad y azar. Por otro lado, la Ley de los Grandes Números supone la base del significado frecuencial de la probabilidad y garantiza que muestras de mayor tamaño representen mejor a la población de la que fueron tomadas. Por tanto, describimos en las siguientes líneas algunas de las investigaciones centradas en el análisis de la comprensión de la probabilidad desde dicho enfoque, porque subyacen ideas presentes en el proceso de muestreo.

Gómez, Batanero y Contreras (2014) elaboran un cuestionario para evaluar el conocimiento matemático para la enseñanza de la probabilidad desde el enfoque frecuencial de futuros profesores de educación primaria. En particular, el primer ítem del cuestionario es una adaptación del propuesto en la investigación de Green (1983), pues se pide a los participantes generar cuatro muestras de tamaño 100 asociadas a un fenómeno que no cumple la propiedad de equiprobabilidad. El análisis de los resultados revela que solo una tercera parte de los sujetos tiene una comprensión simultánea del valor esperado y la variabilidad muestral.

Recientemente, encontramos la investigación de Valdez (2016) centrada en el estudio del razonamiento probabilístico de estudiantes de bachillerato (17-18 años), para analizar si diferencian y ponen en relación los significados clásicos y frecuencial de la probabilidad. A través de un cuestionario fundamentado en un contexto de urnas y entrevistas, las conclusiones del estudio indican que los estudiantes aceptan la variabilidad en la muestra cuando la distribución de bolas es equiprobable y la ignoran al hacer predicciones sobre el resultado que se puede obtener en una extracción. A pesar de que reconocen el modelo equiprobable, consideran la variabilidad en la muestra como excesiva si se aparta un poco de lo predicho por el modelo. Como resultado de la investigación, el autor elabora una tabla de cuatro niveles sobre el razonamiento probabilístico con respecto a las ideas de variabilidad, aleatoriedad e independencia.

## ■ Metodología

En nuestro trabajo se analizó las respuestas de 536 estudiantes: 157 de 2º ESO (12-13 años), 145 de 4º ESO (15-16 años) y 234 cursaban 2º Bachillerato (17-18 años) a tareas planteadas que se corresponden con el lanzamiento de una moneda. Se demanda al estudiante escribir cuatro valores probables para la situación de cada tarea, donde la diferencia radica en el tamaño de la muestra. En el enunciado de la primera tarea (Figura 1) se proporciona el resultado de lanzar 100 monedas, mientras que en el segundo caso solamente se describe el fenómeno aleatorio para el caso en que el tamaño de la muestra es de 10 monedas.

**Figura 1.** Tareas propuestas a los participantes del estudio.

**Tarea 1.** Un profesor vació sobre la mesa un paquete de 100 monedas obteniendo los siguientes resultados: 53 caen con la cara hacia arriba y 47 caen con la cruz hacia arriba. Supongamos que el profesor pide a 4 niños repetir el experimento. Cada niño lanza las 100 monedas y obtendrá algunas con la cara hacia arriba y otras con cruz hacia arriba. Escribe en la siguiente tabla un resultado que te parezca probable para cada niño:

| Elena | Clara | Matías | Rosa  |
|-------|-------|--------|-------|
| Cara: | Cara: | Cara:  | Cara: |
| Cruz: | Cruz: | Cruz:  | Cruz: |

**Tarea 2.** Un profesor pide a 4 niños lanzar 10 monedas sobre la mesa y contar el número de caras y cruces obtenidos. Escribe en la siguiente tabla un resultado que te parezca probable para cada niño:

| Silvia | Javier | Miguel | Carmen |
|--------|--------|--------|--------|
| Cara:  | Cara:  | Cara:  | Cara:  |
| Cruz:  | Cruz:  | Cruz:  | Cruz:  |

Elaboración de los autores.

Para analizar las respuestas de los estudiantes, a continuación, se describen las categorías empleadas, que emergen del estudio de la distribución del estadístico en la muestra.

En el caso de la representatividad muestral, se ha considerado la distribución muestral de la media de una muestra de cuatro valores del fenómeno aleatorio estudiado, y también se han caracterizado una serie de posibles sesgos asociados, emanados de la revisión de los antecedentes. La clasificación utilizada se describe a continuación:

- *Estimación normativa del valor esperado.* El valor medio de las cuatro estimaciones proporcionadas por el estudiante en el ítem es muy próximo al valor teórico (pertenece al intervalo central de la distribución muestral que teóricamente contendría al 68% de los valores de las medias muestrales). Los estudiantes que proporcionan respuestas cuyo valor medio se sitúan dentro de dicho intervalo comprenden la propiedad de representatividad muestral.
- *Estimación aceptable del valor esperado.* En el caso de que el valor medio de las cuatro estimaciones dadas por el estudiante se encuentra fuera del intervalo central de la distribución muestral que contendría al 68% de los valores de las medias muestrales, pero dentro del intervalo que contendría al 95% de dichos valores.
- *No completa.* Consideramos en esta categoría a aquellos estudiantes que no responden a un ítem.

El análisis de la variabilidad muestral se fundamenta en el estudio del rango de los cuatro valores, definido como la diferencia del valor máximo y el mínimo. En este caso, la distribución muestral del rango se ha simulado en el programa Fathom para cada una de las dos situaciones descritas en las tareas. A partir de esta distribución muestral empírica, se han calculado los diferentes percentiles que determinan los intervalos considerados para clasificar las respuestas de los estudiantes. A continuación, se describen las categorías utilizadas para el análisis de la percepción de la variabilidad en el muestreo de los estudiantes.

- *Estimación normativa de la variabilidad muestral.* Es la respuesta óptima y dicho rango corresponde a los valores más probables de los rangos de cuatro valores en la distribución binomial considerada en el enunciado de la tarea.
- *Estimación aceptable de la variabilidad muestral.* Estos valores tienen menor probabilidad en la distribución, pero no serían extremadamente raros.

- *Estimación excesiva de la variabilidad muestral.* El estudiante no percibe que la variabilidad de la distribución muestral es menor que la de la población.
- *Alta concentración.* En este caso, subyace una concepción determinista del muestreo, esperando la replicación de los resultados en las diferentes muestras. No se muestra comprensión intuitiva de la variabilidad del muestreo.

**Tabla 1.** Características de las tareas.

|   | Tarea 1      | Tarea 2         |
|---|--------------|-----------------|
| Tamaño de la muestra                                | 100          | 10              |
| Probabilidad del suceso de interés                  | 0,5          | 0,5             |
| Estimación de la probabilidad                       | Clásica      | Clásica         |
| Número esperado de éxitos                           | 50           | 5               |
| Desviación típica                                   | $\sigma = 5$ | $\sigma = 1,58$ |
| Intervalo que contiene el 68% de medias muestrales  | [47,5-52,5]  | [4,2-5,8]       |
| Intervalo que contiene el 95 % de medias muestrales | [45-55]      | [3,4-6,6]       |
| Rango normativo                                     | [6-15]       | [2-5]           |
| Rango aceptable                                     | [3-20]       | [1-6]           |

Elaboración de los autores.

La Tabla 1 sintetiza las características de las dos tareas planteadas. Se destaca que ambas se apoyan en el significado clásico de la probabilidad, fundamentado en la aplicación de la regla de Laplace. Además, se incluye el intervalo que contienen el 68% y el 95% que se corresponden con las respuestas normativas y aceptables, respectivamente, los cuales se obtienen desde el análisis descrito anteriormente sobre la distribución muestral de cada estadístico.

### Resultados

En esta sección se describen los resultados del análisis cuantitativo sobre las muestras aportadas por los estudiantes para cada tarea.

La Tabla 2 presenta los resultados del análisis del valor medio en las respuestas de los estudiantes. En primer lugar, se observa que la mayoría de los estudiantes proporcionan muestras cuyo valor medio se sitúa en el intervalo aceptable. Si analizamos los resultados según el tamaño de la muestra, en el caso de la Tarea 1 que demanda considerar muestras de mayor tamaño, identificamos que todos los grupos proporcionan muestras con estimación normativa o aceptable, siendo este porcentaje cercano al 70% tanto para los estudiantes de 4ºESO como los 2ºBachillerato y cercano al 50% para 2ºESO. En cualquier caso, el porcentaje de estudiantes que proporcionan muestras con un valor medio normativo es superior que aquellos que proporcionan muestras con un valor medio aceptable, independientemente del curso escolar. Por otro lado, se observa cómo influye el curso escolar en el grado de precisión de los valores proporcionados por los estudiantes, puesto que tanto para los estudiantes de 4ºESO como los 2ºBachillerato la diferencia con respecto al grupo de 2ºESO es de 20 puntos porcentuales.

En la segunda tarea, que se corresponde con la generación de muestras de tamaño 10, observamos que el grupo de estudiantes participantes proporciona mejores respuestas que en el caso de la Tarea 1, manteniendo también la tendencia por curso. De hecho, si comparamos el porcentaje de respuestas situadas en el intervalo normativo, la diferencia es de al menos 20 puntos porcentuales de diferencia con los resultados a la tarea 1.

Al comparar los resultados de las dos tareas, se observa una mejora en la realización de la tarea en la que se demanda generar muestras de menor tamaño al comparar las respuestas de cada grupo. Por tanto, se concluye que los tres grupos presentan una comprensión de la representatividad muestral adecuada, sobre todo cuando el tamaño de las muestras que se generan es menor.

**Tabla 2.** Porcentaje de estudiantes por grupo, según el valor medio de las estimaciones.

| Valor medio de las cuatro estimaciones    | Tamaño de la muestra (n=100)<br>Tarea 1 |                  |                         | Tamaño de la muestra (n=10)<br>Tarea 2 |                  |                         |
|---|---|------------------|-------------------------|--|------------------|-------------------------|
|   | 2°ESO<br>(n=157)                        | 4°ESO<br>(n=145) | bachillerato<br>(n=234) | 2°ESO<br>(n=157)                       | 4°ESO<br>(n=145) | bachillerato<br>(n=234) |
| Estimación normativa [47,5-52,5]          | 31,2                                    | 46,2             | 47,7                    | 56,7                                   | 67,6             | 71,5                    |
| Estimación aceptable [45-55] <sup>1</sup> | 19,1                                    | 23,4             | 21,3                    | 26,8                                   | 16,6             | 13,1                    |
| Menores que el aceptable (< 45)           | 16,6                                    | 9,7              | 15,2                    | 2,5                                    | 3,4              | 7,8                     |
| Mayores que el aceptable (>55)            | 25,5                                    | 15,9             | 11,1                    | 5,1                                    | 4,1              | 2,9                     |
| No completa                               | 7,6                                     | 4,8              | 4,7                     | 8,9                                    | 8,3              | 4,7                     |

<sup>1</sup>Fuera del intervalo normativo

Elaboración de los autores.

A continuación, se presenta el análisis de la variabilidad en las respuestas de los estudiantes, el cual queda fundamentado en el estudio del rango de las cuatro muestras generadas. Análogo al caso del estudio del valor medio, en la Tabla 3 se presenta el porcentaje de estudiantes en función de las categorías de sus respuestas, descritas en el apartado anterior.

En primer lugar, si analizamos las diferencias en los porcentajes según la tarea, observamos que la mayoría de los estudiantes de la tarea 2 proporcionan muestras cuyo rango se sitúa en el intervalo normativo, mientras que estos porcentajes decaen en el caso de la tarea 1, donde solamente un cuarto de la muestra de estudiantes de 2°ESO y 4°ESO proporcionan muestras con variabilidad adecuada (normativa o aceptable), siendo este porcentaje superior para el caso de 2°Bachillerato. En particular, se identifica una tendencia por estos grupos en sobreestimar la variabilidad, puesto que más de la mitad de la muestra de estudiantes de 2°ESO y 4°ESO proporcionan muestras cuyo rango es excesivo.

Por tanto, se infiere una comprensión insuficiente de la variabilidad muestral cuando el tamaño de la muestra es mayor, siendo los resultados mejores para el caso de Bachillerato. Estos resultados aportan evidencias de las dificultades de los estudiantes en identificar la relación entre la variabilidad muestral y el tamaño de la muestra, que son conceptos fundamentales en la comprensión de la probabilidad frecuencial.

**Tabla 3.** Porcentaje de estudiantes por grupo, según el rango de las estimaciones.

| Rango de las cuatro estimaciones         | Tamaño de la muestra (n=100)<br>Tarea 1 |                  |                         | Tamaño de la muestra (n=10)<br>Tarea 2 |                  |                         |
|--|---|------------------|-------------------------|--|------------------|-------------------------|
|  | 2°ESO<br>(n=157)                        | 4°ESO<br>(n=145) | Bachillerato<br>(n=234) | 2°ESO<br>(n=157)                       | 4°ESO<br>(n=145) | Bachillerato<br>(n=234) |
| Estimación normativa [6-15]              | 17,8                                    | 17,2             | 30,6                    | 66,9                                   | 66,2             | 72,6                    |
| Estimación aceptable [3,20] <sup>1</sup> | 8,3                                     | 9,7              | 15,2                    | 8,9                                    | 7,6              | 5,1                     |
| Estimación excesiva (>20)                | 58,6                                    | 59,3             | 37,4                    | 10,2                                   | 13,8             | 7,8                     |
| Alta concentración (<3)                  | 7,7                                     | 9,0              | 12,1                    | 5,1                                    | 4,5              | 9,8                     |
| No completa                              | 7,6                                     | 4,8              | 4,7                     | 8,9                                    | 8,3              | 4,7                     |

<sup>1</sup>Fuera del intervalo normativo.

Fuente: Elaboración de los autores

*Contraste de diferencia entre grupos*

Para completar el análisis de las respuestas de los estudiantes, según los datos que observamos en las Tablas 2 y 3 en cuanto a las diferencias por el curso en que se encuentran los estudiantes que participan en nuestro estudio, así como debido a la tarea que se propone, en este apartado se describen los resultados del análisis realizado sobre las diferencias observadas, en torno a valorar si son estadísticamente significativas. Por tanto, se ha realizado la prueba del análisis de varianza, tomando el grupo de estudiantes como variable independiente o factor.

En el caso de la tarea 1, en la Tabla 4 se observa que los resultados obtenidos son estadísticamente significativos, tanto en la diferencia de estimaciones de las medias como en la diferencia de estimaciones de los rangos, cuyo valor p es menor que 0,05.

En los resultados de las pruebas de Tukey de diferencias de medias, cuyos resultados se presentan en la Tabla 5, se observa una diferencia significativa de la estimación de la media al comparar los estudiantes de bachillerato con los otros dos grupos. Esta diferencia también es significativa en el caso del rango. Por tanto, desde el análisis de los resultados se observa una mejora en la comprensión del proceso de muestreo según progresa el estudiante atendiendo a su curso escolar.

**Tabla 4.** Resultados del análisis de varianza en la tarea 1.

|              |              | Suma de cuadrados | g.l. | Media cuadrática | F      | Sig. |
|--------------|--------------|-------------------|------|------------------|--------|------|
| <b>Media</b> | Inter-grupos | 2346,854          | 2    | 1173,427         | 9,861  | ,000 |
|              | Intra-grupos | 61166,626         | 514  | 119,001          |        |      |
|              | Total        | 63513,480         | 516  |                  |        |      |
| <b>Rango</b> | Inter-grupos | 14535,070         | 2    | 7267,535         | 14,579 | ,000 |
|              | Intra-grupos | 257223,867        | 516  | 498,496          |        |      |
|              | Total        | 271758,936        | 518  |                  |        |      |

Elaboración de los autores.

**Tabla 5.** Prueba post-hoc de diferencias de medias para la media y el rango de las estimaciones en la tarea 1.

|              |                   | Diferencia de medias (I-J) | Error típico | Sig.   |
|--------------|-------------------|----------------------------|--------------|--------|
| <b>Media</b> | Diferencia con 2º | -4,6109*                   | 1,1529       | ,000** |
|              | Diferencia con 4º | -3,8578*                   | 1,1708       | ,003** |
| <b>Rango</b> | Diferencia con 2º | -11,685*                   | 2,355        | ,000** |
|              | Diferencia con 4º | -9,201*                    | 2,391        | ,000** |

\*\* Muy significativo

Elaboración de los autores.

De igual modo, la Tabla 6 muestra los resultados obtenidos al realizar el análisis de la varianza para la segunda tarea. En este caso, el análisis señala que las diferencias son estadísticamente significativas donde además las pruebas de Tukey (Tabla 7) muestran que la diferencia de los estudiantes de bachillerato es estadísticamente significativa con respecto a los otros dos cursos tanto para la estimación de la media como el rango.

**Tabla 6.** Resultados del análisis de varianza en la tarea 2.

|              |              | Suma de cuadrados | g.l. | Media cuadrática | F      | Sig. |
|--------------|--------------|-------------------|------|------------------|--------|------|
| <b>Media</b> | Inter-grupos | 24,053            | 2    | 12,026           | 7,680  | ,001 |
|              | Intra-grupos | 793,916           | 507  | 1,566            |        |      |
|              | Total        | 817,969           | 509  |                  |        |      |
| <b>Rango</b> | Inter-grupos | 97,334            | 2    | 48,667           | 12,084 | ,000 |
|              | Intra-grupos | 2054,034          | 510  | 4,028            |        |      |
|              | Total        | 2151,368          | 512  |                  |        |      |

Elaboración de los autores.

**Tabla 7.** Prueba post-hoc de diferencias de medias para la media y el rango de las estimaciones en la tarea 2.

|                      |                   | Diferencia de medias |       |        |
|----------------------|-------------------|----------------------|-------|--------|
| <b>Media</b>         | Diferencia con 2º | -,4525*              | ,1328 | ,002** |
|                      | Diferencia con 4º | -,4162*              | ,1359 | ,007** |
| <b>Rango</b>         | Diferencia con 2º | -,8168*              | ,2117 | ,000** |
|                      | Diferencia con 4º | -,9296*              | ,2179 | ,000** |
| ** Muy significativo |                   |                      |       |        |

Elaboración de los autores.

## ■ Conclusiones

En este trabajo se describen los resultados de nuestro estudio con estudiantes de educación secundaria y bachillerato en España, cuyo objetivo es analizar la comprensión sobre las ideas básicas que subyacen al concepto del muestreo: representatividad y variabilidad muestral. El interés por el tema y la pertinencia sobre su estudio se justifica por las evidencias de la literatura previa, en donde se nos muestran los errores y dificultades de los estudiantes sobre el muestreo, reclamando la necesidad de mejorar la comprensión de los conceptos fundamentales de representatividad y variabilidad muestral (Gómez, Batanero y Contreras, 2014; Green, 1983; Valdez, 2016), puesto que, aunque aparentemente son conceptos antagónicos, el sentido en el muestreo exige coordinar ambos.

Las tareas planteadas presentan un contexto cercano al estudiante, lo que facilita evaluar su comprensión, ya que el lanzamiento de una moneda es un fenómeno aleatorio que aparece en los libros de texto como introducción del significado clásico de la probabilidad, así como está presente en contextos cotidianos. Por tanto, podemos esperar que los estudiantes tengan un conocimiento previo del fenómeno aleatorio, lo cual les puede ayudar a identificar la probabilidad del suceso interés desde el enfoque clásico, así como desde el enfoque frecuencial, puesto que en la tarea 1 se proporciona el resultado de realizar el experimento. Este hecho explica que la mayoría de los estudiantes presentan una comprensión adecuada de la representatividad muestral, alcanzando el nivel proporcional de razonamiento sobre muestreo en la clasificación de Shaughnessy et al. (2004) y un nivel intermedio según el trabajo de Valdez (2016). Además, el porcentaje de respuestas adecuadas (normativa o aceptable) es mejor con respecto aumenta el nivel del curso, por lo que se aprecia un progreso gradual en la comprensión de la esperanza matemática, en nuestro caso particular, en la situación de lanzamiento de monedas.

En el diseño del estudio, el interés por analizar la comprensión sobre la variabilidad conduce a que se demande la generación de cuatro muestras para identificar la variabilidad a partir del rango concedido, estudiando así mismo si se tiene en consideración cómo afecta el tamaño de la muestra a dicha variabilidad. El análisis de los resultados pone en relieve una dificultad en el concepto de variabilidad y en la percepción del efecto del tamaño de la muestra

sobre dicha variabilidad. Estos resultados también se identifican en los trabajos de Gómez et al. (2014) y en Shaughnessy et al. (2004).

Aunque el análisis estadístico revela diferencias significativas con respecto a los grupos de estudiantes, en concreto respecto a los estudiantes de 2º Bachillerato, las dificultades observadas en la comprensión de la variabilidad persisten, siendo estas dificultades más relevantes en la generación de muestras grandes. Los estudiantes de 2º Bachillerato han recibido una enseñanza en contenidos de estadístico y probabilidad, puesto que están presentes en las pruebas de acceso a la Universidad (López-Martín, Batanero, Díaz-Batanero, Gea, 2016). El hecho de que permanezcan los obstáculos en los estudiantes que cursan el curso previo al acceso de la universidad exige la necesidad de reflexionar sobre el diseño de procesos de enseñanza y aprendizaje que ayuden a los estudiantes a superarlas. El trabajo del docente exige el diseño de tareas que pongan en relieve la relación entre la representatividad y la variabilidad muestral. En este sentido y siguiendo a Huerta (2015), el trabajo de la simulación en el aula es recomendada para trabajar la probabilidad y la inferencia estadística. Por otro lado, consideramos necesario la introducción de la probabilidad desde sus diferentes significados y, en particular, siguiendo las directrices curriculares que se sitúan en sintonía con la investigación en Didáctica de la Probabilidad, consideramos relevante proporcionar situaciones al alumnado en las que se calcule la probabilidad desde el enfoque frecuencial, porque pone en relieve que las muestras de mayor tamaño estiman mejor la probabilidad del suceso.

En conclusión, los resultados de la investigación realizada pueden resultar de ayuda a la investigación porque muestra que las dificultades identificadas en torno al muestreo en las literatura previa aparecen en nuestro estudio; así como proporcionar información al docente sobre los posibles obstáculos que pueden presentar los estudiantes y que es necesario atender e intentar dar respuesta a través de un proceso de instrucción que contemple el trabajo de la probabilidad desde los primeros cursos, desde el enfoque frecuencial y apoyado en la simulación (Parraguez, Gea, Díaz-Levicoy y Batanero, 2017).

## ■ Agradecimientos

Proyecto PID2019-105601GB-I00 / AEI / 10.13039/501100011033, Grupo FQM126 (Junta de Andalucía) y Grupo S60\_20R.

## ■ Referencias bibliográficas

- Batanero, C. (2013). Del análisis de datos a la inferencia: Reflexiones sobre la formación del razonamiento estadístico. *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática*, 8(11), 277-291.
- Batanero, C., Begué, N. y Gea, M. M. (2018). ¿Cómo desarrollar el sentido del muestreo en los estudiantes?, 3º *Encuentro Colombiano de Educación Estocástica. Poyapan*, Colombia, Octubre, 2018.
- Batanero, C. y Díaz, C. (2015). Aproximación informal al contraste de hipótesis. En J. M. Contreras, C. Batanero, J. D. Godino, G.R. Cañadas, P. Arteaga, E. Molina, M.M. Gea y M.M. López (Eds.), *Didáctica de la Estadística, Probabilidad y Combinatoria*, 2, 135-144.
- Ben-Zvi, D., Bakker, A. y Makar, K. (2015). Learning to reason from samples. *Educational Studies in Mathematics*, 88(3), 291-303
- Burrill, G. y Biehler, R. (2011). Fundamental statistical ideas in the school curriculum and in training teachers. En C. Batanero, G. Burrill y C. Reading (Eds.), *Teaching statistics in school mathematics. Challenges for teaching and teacher education – A joint ICMI/IASE study* (pp. 57-69). Dordrecht: Springer
- Gómez, E., Batanero, C. y Contreras, C. (2014). Conocimiento matemático de futuros profesores para la enseñanza de la probabilidad desde el enfoque frecuencial. *Bolema*, 28(48), 209-229.
- Green, D. R. (1983). A Survey of probabilistic concepts in 3000 pupils aged 11-16 years. En D.R. Grey et al. (Eds.), *Proceedings of the First International Conference on Teaching Statistics* (Vol.2, pp. 766-783). Universidad de Sheffield: Teaching Statistics Trust.

- Huerta, M. P. (2015). La resolución de problemas de probabilidad con intención didáctica en la formación de maestros y profesores de matemáticas. En C. Fernández, M. Molina y N. Planas (Eds), *Investigación en Educación Matemática XIX* (pp. 105-119). Alicante: Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática.
- López-Martín, M.M., Batanero, C., Díaz-Batanero, C., Gea, M.M. (2016). La inferencia estadística en las pruebas de acceso a la universidad en Andalucía, *Revista Paranaense de Educação Matemática*, vol. 5, 8, pp. 33-59.
- MECD (2015). *Real Decreto 1105/2014, de 26 de diciembre, por el que se establece el currículo básico de la Educación Secundaria Obligatoria y del Bachillerato*. Madrid: Autor.
- Parraguez, R., Gea, M. M., Díaz-Levicoy, D., y Batanero, C. (2017). ¿ Conectan los futuros profesores las aproximaciones frecuencial y clásica de la probabilidad?. *Revista Digital: Matemática, Educación e Internet*, 17(2). <https://doi.org/10.18845/rdmei.v17i2.3077>
- Rubin, A., Bruce, B. y Tenney, Y. (1991). Learning about sampling: Trouble at the core of statistics. En D. Vere-Jones (Ed.), *Proceedings of the third international conference on teaching statistics* (Vol. 1, pp. 314-319). Otago, Nueva Zelanda: International Statistical Institute.
- Shaughnessy, J.M., Ciancetta, M. y Canada, D. (2004). Types of student reasoning on sampling tasks. En M.J. Høines y A.B. Fuglestad (Eds.), *Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol.4, pp. 177-184). Bergen, Noruega: International Group for the Psychology of Mathematics Education.
- Valdez, J. C. (2016). *Las grandes ideas de probabilidad en el razonamiento informal de estudiantes de bachillerato*. Tesis Doctoral. Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional. México