

## ESQUEMA DE DESARROLLO DEL PENSAMIENTO Y LENGUAJE VARIACIONAL

## DEVELOPMENT SCHEME OF VARIATIONAL THINKING AND LANGUAGE

Luis Manuel Cabrera Chim, José David Zaldívar Rojas  
Universidad Autónoma de San Luis Potosí, Universidad Autónoma de Coahuila (México)  
luis.cabrera@uaslp.mx, david.zaldivar@uadec.edu.mx

### Resumen

En los últimos años se ha investigado y evidenciado la importancia de que los estudiantes desarrollen habilidades y competencias para el estudio del cambio. Se han reportados las dificultades que presentan para enfrentar situaciones que exigen del análisis del cambio, y se han establecidos niveles de desarrollo respecto estas formas de razonamiento y/o pensamiento. Sin embargo, ha habido poca sistematización de los elementos que intervienen para su desarrollo en el aula de clases. Situándonos en el enfoque teórico del Pensamiento y Lenguaje Variacional, en este documento se discute una propuesta en construcción de un esquema, que presenta elementos clave y sus relaciones, para guiar el desarrollo del Pensamiento y Lenguaje Variacional. Este es producto de una revisión documental de trabajos que han evidenciado algunos de dichos elementos y relaciones, y busca sintetizarlos bajo una estructura que pueda servir de fundamento para el diseño de situaciones de aprendizaje para el aula. Así, se tiene un aporte teórico fundamentado en la empiria de los trabajos revisados.

**Palabras clave:** pensamiento y lenguaje variacional, esquema, socioepistemología

### Abstract

In recent years, the importance of developing skills and competencies for the study of change on the part of students has been researched and highlighted. The difficulties students present in facing situations that require the analysis of change have been reported; and levels of development have been established with respect to these forms of reasoning and/or thinking. However, there has been little systematization of the elements involved in their development in the classroom. Within the theoretical approach to Variational Thinking and Language, this paper discusses a proposal under construction of a scheme, which presents key elements and their relationships, to guide the development of Variational Thinking and Language. This is the result of a documentary review of works that have highlighted some of these elements and relationships and seeks to synthesize them under a structure that can serve as a basis for the design of learning situations for the classroom. Thus, this research shows a theoretical contribution based on the empirical evidence of the reviewed works.

**Key words:** variational thinking and language, scheme, socio-epistemological theory

## ■ Introducción

En los últimos años ha cobrado un importante impulso el desarrollo de propuestas didácticas y de investigación que tienen como objetivo el desarrollo, por parte de los estudiantes y las personas en general, de habilidades para el estudio del cambio (Arias, Leal & Organista, 2011; Artola, Mayoral y Benarroch, 2016; Báez, Martínez-López, Pérez y Pérez, 2017; Caballero, 2018; Cantoral, 2019; Carlson, Jacobs, Coe, Larsen y Hsu, 2002; Johnson, 2015; Martínez-López y Gualdrón-Pinto, 2018; Maury Mancilla, Palmezano Sarmiento, y Cárcamo Barriosnuevo, 2016; Thompson y Carlson, 2017). Esto como un objetivo de formación en sí mismo o como un mecanismo para la construcción de saberes matemáticos (Cantoral, 2019; Thompson & Carlson, 2017).

Las investigaciones sobre este tema no son nuevas. Thompson y Carlson (2017) señalan que, si bien la covariación ha sido una forma de razonamiento en matemática desde alrededor del año 1000 d.C., sólo se hizo explícito como constructo teórico hasta finales de la década de 1980 y a principios de 1990 en las obras de Jere Confrey y Pat Thompson. A partir de ese momento, se han desarrollado multitud de trabajos sobre el razonamiento covariacional (Carlson et al., 2002; Ellis, Özgür, Kulow, Williams & Amidon, 2015; Johnson, 2015; Thompson y Carlson, 2017; Thompson, Hatfield, Yoon, Joshua y Byerley, 2017).

En otra línea de desarrollo se encuentra el trabajo de Cantoral (2001), que dio evidencia de que la noción de predicción, en los fenómenos de flujo continuo de la naturaleza, se ubica en la base de significación primaria para el concepto matemático Serie de Taylor, lo cual ha sido sustituido dentro del discurso Matemático Escolar prevaeciente en la actualidad por un enfoque analítico. Estos resultados han cimentado diferentes estudios (Caballero, 2018; Caballero-Pérez y Moreno-Durazo, 2017; Cantoral, 2019; Hernández-Zavaleta y Cantoral, 2017) que proponen que el desarrollo de habilidades para estudiar el cambio enmarcado dentro de la práctica social de la predicción (Preadicere) es un acercamiento pertinente para la construcción de saberes matemáticos propios de la variación y el cambio (Cantoral & Farfán, 1998).

Sin embargo, el desarrollo de las capacidades y habilidades para el estudio del cambio no es sencillo. Cantoral (2019), Carlson et al., (2002) y Maury Mancilla et al. (2016) señalan que al privilegiarse en la enseñanza de matemáticas los algoritmos y procedimientos, el pensamiento de lo que cambia queda opacado o no se desarrolla, por tanto, muchos estudiantes no adquieren las estructuras y códigos variacionales para desarrollar dicho pensamiento. Por su parte, Caballero (2012) evidencia las dificultades de un grupo de profesores de bachillerato para enfrentar situaciones variacionales, es decir, aquellas que requieren del estudio de la variación y el cambio. Para realizar esto, los profesores plantean funciones o procedimientos algorítmicos conocidos que se aproximan o modelan, lo mejor posible, a las situaciones que se plantean. De este modo, el análisis variacional se sustituye por un trabajo algebraico no variacional.

Otro tipo de trabajos sobre esta temática se han enfocado en establecer niveles de razonamiento variacional y covariacional (Thompson y Carlson, 2017) o niveles de desempeño del pensamiento variacional (Báez et al., 2017). Estos se enfocan en caracterizar los tipos de análisis, comprensión o respuestas que plantean los estudiantes al enfrentar situaciones dinámicas o variacionales que requieren del estudio del cambio y, en su caso, determinar el nivel alcanzado por los estudiantes. Sin embargo, presentan poco énfasis en establecer cómo desarrollar ese razonamiento o pensamiento.

En el caso particular del Pensamiento y Lenguaje Variacional (Cantoral, 2019), enfoque teórico en el que se enmarca este trabajo, se han generado interesantes resultados teóricos y empíricos sobre cómo las personas enfrentan las situaciones variacionales y los significados que las personas construyen, a partir del uso, de los saberes matemáticos implicados (Caballero, 2018; Cantoral, 2019; Caballero-Pérez y Moreno-Durazo, 2017; Hernández-Zavaleta y Cantoral, 2017). Sin embargo, existe una falta de articulación de estos diferentes resultados, constructos y elementos que permitan, de forma clara y orientada, dar dirección o fundamento a los esfuerzos didácticos para el desarrollo del Pensamiento y Lenguaje Variacional en las personas, en particular, en el contexto escolar. Esta situación es señalada por Cantoral (2019) como el desafío actual dentro de esta línea de investigación.

En este documento se presentan los avances de un trabajo de investigación que busca incidir sobre la situación anterior y, más aún, establecer elementos para promover y evaluar el desarrollo del Pensamiento y Lenguaje Variacional. Para esto, se ha percibido como necesario tener un modelo de su desarrollo que sirva como referente contra el cual contrastar el desempeño de los estudiantes con fines de evaluar esto (De la Orden, 2009). Así, este documento tiene como objetivo presentar y reflexionar sobre una propuesta de esquema que articula aquellos elementos y relaciones clave que intervienen para el desarrollo de dicho pensamiento. Se pretende que en primera instancia sirva de base para orientar el diseño de secuencias didácticas o de intervención en el aula, es decir, generar trayectorias hipotéticas de aprendizaje (Simon y Tzur, 2004), y que posteriormente sea la base para establecer criterios y estándares para desarrollar procesos de evaluación sobre el desarrollo del Pensamiento y Lenguaje Variacional.

### ■ Fundamento teórico

El Pensamiento y Lenguaje Variacional, como línea de investigación, postula al estudio del cambio y la variación, cuando deviene en el marco del desarrollo de prácticas predictivas, como elementos que fundamentan la construcción y significación de los saberes matemáticos (Cantoral, 2019). Estas prácticas predictivas ponen el énfasis en determinar, en un sentido amplio, estados o comportamientos desconocidos de la situación o fenómeno bajo estudio.

Esta línea de investigación se enmarca en la construcción social del conocimiento matemático (Cantoral, 2016). Este proceso se realiza a través de prácticas y se sintetiza en el modelo de anidación (Figura 1):

**Figura 1.** *Esquema de anidación de prácticas.*



**Fuente:** (Cantoral, 2016).

Este modelo establece que las acciones directas de un individuo ante un medio evolucionan y se organizan como una actividad humana situada socioculturalmente y, posteriormente, dan lugar a prácticas socialmente compartidas. Estas prácticas son reguladas y estructuradas por prácticas de referencia, que a su vez son normadas por prácticas sociales (Cantoral, 2016). Estas relaciones pueden analizarse en dos sentidos: de arriba hacia abajo o de abajo hacia arriba.

abajo. En el primer sentido la construcción social del conocimiento comienza con la acción del sujeto sobre el medio y en el segundo comienza por la norma que regula las acciones del individuo como parte de una comunidad.

Por su parte, por Pensamiento y Lenguaje Variacional, como una forma de pensamiento matemático, se entenderá a la forma de pensar y comunicar el análisis de las variaciones que intrínsecamente determinan el comportamiento y las leyes que rigen a un fenómeno o situación de cambio, con la finalidad de su comprensión y/o, en su caso, realizar estimaciones, anticipaciones o predicciones sobre el mismo (Cabrera, 2014). Así, es a partir de comprender qué cambia, cómo cambia, cuánto cambia, cómo cambia ese cambio y así sucesivamente, que podemos generar una comprensión profunda de las particularidades de dichos fenómenos o situaciones. Para esto se pueden emplear medios gráficos o icónicos, analíticos, gestuales, numéricos, verbales, entre otros. Como puede notarse, el desarrollo del Pensamiento y Lenguaje Variacional implica, según el caso, el desarrollo de los razonamientos variacional y covariacional.

Se entenderá por cambio a la modificación de las variables de una situación o fenómeno; mientras que, por variación, a la forma como cambian dichas variables. De este modo, se puede percibir el cambio, sin que esto implique que se es consciente de la variación. Para comprender esta idea, tomemos como ejemplo la situación del llenado de un recipiente cilíndrico. Una persona puede ser consciente que conforme pasa el tiempo la altura del agua en el recipiente no es la misma, es decir, percibe el cambio. Pero, puede no ser consciente de las particularidades con las que se produce ese cambio, es decir, no ser consciente de su variación. Sin embargo, para comprender la variación es necesario ser consciente del cambio.

## ■ Aspectos metodológicos

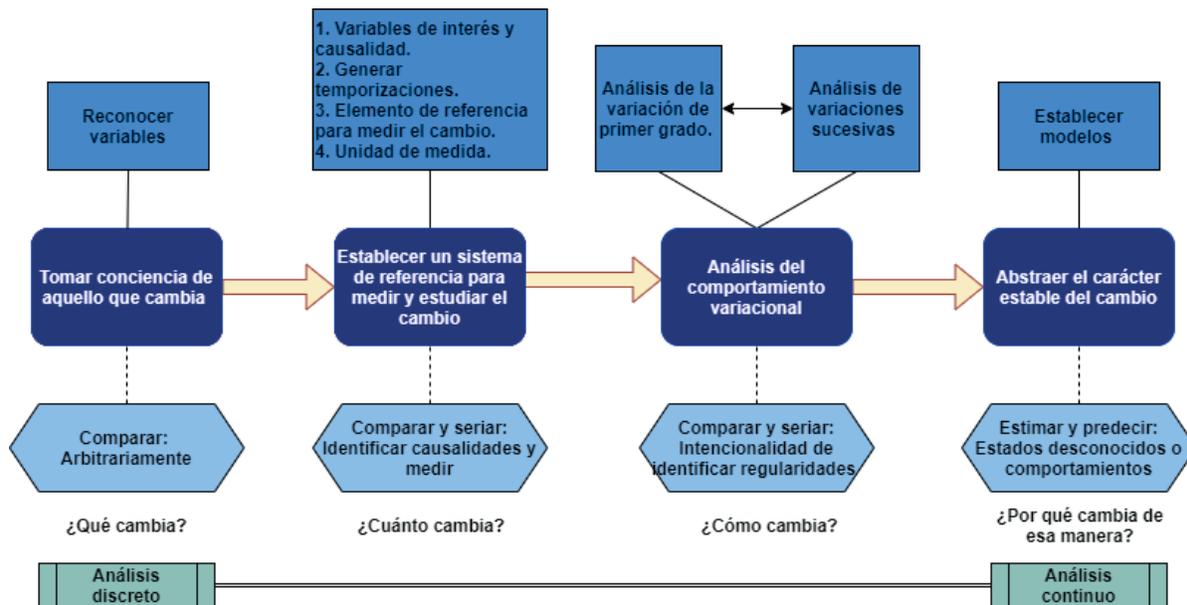
Para identificar aquellos elementos clave y sus relaciones, que intervienen para el desarrollo del Pensamiento y Lenguaje Variacional, se realizó una revisión de trabajos o reportes de investigación en dos niveles. En el primero se revisaron aquellos trabajos o reportes más relevantes de los últimos 5 años que tuvieran como objetivo evidenciar, analizar o teorizar sobre este proceso de desarrollo, bajo en enfoque teórico descrito en la sección anterior. Esto tomando en consideración que los elementos más relevantes deberían ser considerados así por la comunidad de investigación sobre esta temática y, por tanto, deberían estar presentes en los trabajos de vanguardia. El segundo nivel de análisis lo constituyó el rastreo, según fue necesario, de trabajos anteriores a este tiempo para comprender los contextos en los que surgieron los elementos o relaciones identificados en el primer nivel y, con ello, tener mayor claridad sobre estos.

Al tiempo que se realizaba la revisión anterior, se fueron articulando los elementos y sus relaciones, estableciendo una cierta progresión de desarrollo. En un primer momento, esto se realizó con base en el propio contexto de los trabajos revisados. Posteriormente, se fueron deconstruyendo dichas relaciones para establecer relaciones más precisas y articuladas de los diferentes elementos reportados en diferentes trabajos, conformándose una nueva racionalidad en las relaciones de los elementos.

### *Desarrollo del pensamiento y lenguaje variacional*

Para el desarrollo del Pensamiento y Lenguaje Variacional se propone un esquema conformado por 4 estadios (Figura 2): **tomar conciencia de aquello que cambia; establecer un sistema de referencia para medir y estudiar el cambio; análisis del comportamiento variacional, y abstraer el carácter estable del cambio.** Estos estadios constituyen elementos básicos o clave que deben operacionalizarse de acuerdo con las *prácticas de referencia* y la *epistemología de prácticas* (Montiel y Buendía, 2012) en las que se enmarque el estudio del cambio. Los conceptos u objetos matemático y no matemáticos que emergen al estudiar el cambio y la variación pueden tomar significados diversos de acuerdo con la práctica de referencia en la que se ubican.

Figura 2. Esquema de desarrollo del Pensamiento y Lenguaje Variacional.



Elaboración de los autores.

En el corazón del enfoque teórico se plantea el tratamiento de la variable y su variación para la elaboración de predicciones. Esto tomando en consideración que el estudio del cambio se realiza a través de la comparación de estados de un fenómeno, lo cual implica establecer la diferencia de los valores de la variable en dichos estados (Cantoral, 2019). Esto queda de manifiesto en el modelo teórico propuesto por Caballero y Cantoral (2013) que señala que el estudio de la variación en una situación específica se realiza a partir de las estrategias variacionales de comparación, seriación, predicción y estimación.

- *Comparación.* Acción de establecer las diferencias entre dos estados de un mismo fenómeno o dos estados equivalentes de fenómenos diferentes, con la intención de cuantificar o cualificar el cambio. Esta constituye la primera estrategia que se pone en funcionamiento al estudiar el cambio y posibilita el desarrollo de la siguiente estrategia.
- *Seriación.* Consiste en establecer las diferencias entre un conjunto finito de comparaciones (variación de primer orden <primeras diferencias>) de modo que se pueda analizar y determinar la lógica del comportamiento de estados consecutivos de un fenómeno. En caso necesario, los resultados de las comparaciones se pueden considerar nuevos estados y se pueden poner en práctica de nueva cuenta la comparación y la seriación. Esto llevará a establecer análisis del comportamiento variacional de las variables.

Con base en la información obtenida a partir de las estrategias anteriores se posibilitan las siguientes estrategias.

- *Predicción.* Acción de anticipar un estado o valor específico desconocido de una variable, con base en el carácter estable del cambio.
- *Estimación.* Acción de anticipar comportamientos o tendencias de las variables de un fenómeno en un intervalo, con base en el carácter estable del cambio.

Caballero-Pérez y Moreno-Durazo (2017) señalan que es posible establecer una evolución pragmática jerárquica de las estrategias variacionales, lo cual se refleja en la figura 3 en la siguiente anidación de prácticas.

**Figura 3.** Anidación de prácticas para el pensamiento y lenguaje variacional.

<b>Práctica social</b>	Preadiciere
<b>Práctica de referencia</b>	Toxicología Física Etc.
<b>Práctica socialmente compartida</b>	Predicción Estimación
<b>Actividad</b>	Comparación Seriación
<b>Acción</b>	Ordenar Medir Girar Etc.

Fuente: (Caballero-Pérez y Moreno-Durazo, 2017)

De este modo, para estudiar el cambio es necesario primero ser conscientes de él (primer estadio), reconocer *qué es lo que cambia* a partir de reconocer modificaciones de estado de la situación o fenómeno bajo estudio (Cantoral, 2019). Para lograr esto se requerirá, por un lado, que el sujeto pueda actuar sobre su medio para explorar la situación que se estudia y, por el otro, poder comparar diferentes estados. Esto implica también la toma de decisión sobre aquello que interesa analizar. En otras palabras, determinar aquellas variables pertinentes para comprender cómo cambia la situación o fenómeno bajo estudio.

Al pensar, por ejemplo, en una situación de llenado de recipientes con agua, se puede notar que están involucradas variables como la velocidad con la que se vierte el agua en el recipiente, el volumen del agua en el recipiente, la altura que el agua alcanza y el tiempo que transcurre. Sin embargo, podría resultar complejo manejar todas las variables a la vez, por lo que será necesario determinar aquellas que se consideran adecuadas para los análisis a realizar. Esto significa establecer un primer nivel de lo que Cantoral (2019) denomina de constantificación de las variables.

Posteriormente, será necesario generar elementos mínimos que permitan estudiar *cuánto cambian las variables* (segundo estadio), lo cual se traduce en el establecimiento de un sistema de referencia variacional (Caballero, 2018): *la relación causal de las variables, un elemento de referencia pertinente que permita reconocer y medir el cambio, la unidad de medida para establecer la intensidad del cambio, y la temporización de los estados de la situación o variables para reconocer su evolución*. En este estadio se establecen aquellos elementos básicos que permitirán determinar diferentes estados o momentos del fenómenos o situación de interés (temporización) y compararlos entre sí para estudiar el cambio implicado de un estado a otro. En otras palabras, determinar el valor (elemento de referencia y unidad de medida) de las variables de interés en esos momentos y luego determinar la intensidad del cambio (comparación). A su vez, esto podrá ayudar a reconocer las relaciones causales entre dichas variables (comparación), entendiendo cómo los resultados de la comparación se comportan (seriación). En resumen, se establecen los elementos para estudiar el cambio.

Retomando el ejemplo del llenado de recipientes y el bosquejo gráfico de cómo varía la altura del agua dentro el recipiente, es necesario determinar qué variables son las pertinentes para esto. Por ejemplo, se podría establecer que la altura depende del volumen del agua en el interior del recipiente o que la altura depende del tiempo transcurrido (relaciones causales). Si bien, las variables independientes en estos casos están relacionadas, la forma de razonar sobre la situación es diferente en cada uno. Pero, para medir la altura del agua en el recipiente es necesario tomar la base del recipiente como el elemento a partir del cual realizar esto (elemento de referencia). Los resultados de la medición podrían expresarse en centímetros u otra unidad arbitraria que ser tomada como unidad de comparación (unidad de medida). Además, para realizar la medición será necesario determinar ciertos momentos o estados que se producen durante el desarrollo del llenado, lo cual constituye la temporización de la situación. Se habla de

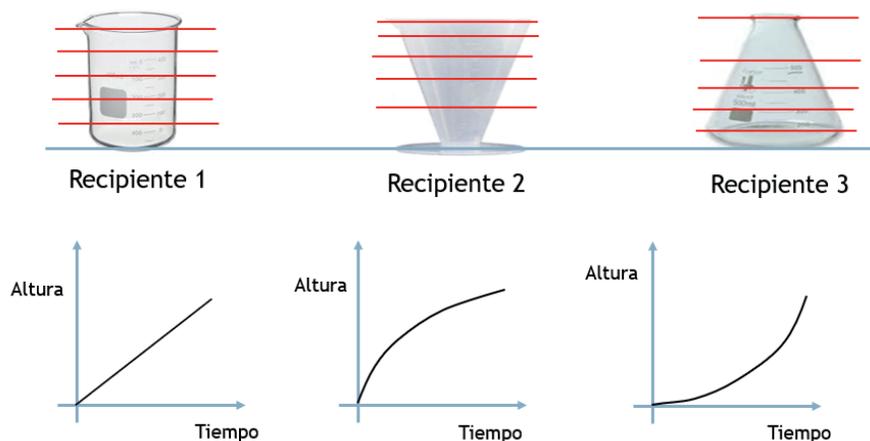
temporización y no tiempo, pues no siempre es necesario que esté involucrada la variable tiempo en las situaciones o fenómenos bajo estudio. Por ejemplo, si se eligen la altura del agua con respecto a su volumen en el recipiente, como las variables de interés, entonces la medición de la altura se realizará cuando haya cierto volumen en el recipiente.

Solo hasta que se haya establecido el sistema de referencia variacional, ya sea consciente o inconscientemente, es que se posibilitará analizar los patrones de comportamiento de las variables de interés. Para esto será necesario analizar las variaciones de primer orden y, en caso necesario, las variaciones sucesivas (Hernández-Zavaleta & Cantoral, 2017). Así, se está en condiciones de describir *cómo cambian las variables*, en otras palabras, su comportamiento variacional (tercer estadio). De este modo, en este estado se pasa de determinar los cambios de la situación o fenómeno de interés a reconocer comportamientos o regularidades en esto, es decir, se transita hacia la variación. Así, no basta la comparación de estados, se requiere realizar seriaciones para determinar alguna regularidad en estos cambios. Esto podría ocurrir en la primera comparación (variación de primer orden) o requerirá comparar los resultados de las comparaciones (variación de segundo orden) y así sucesivamente (variación de orden mayor). Así, esto implica tomar decisiones sobre qué orden de variación es pertinente para identificar dicho comportamiento, es decir, se establece un segundo nivel de constantificación (Cantoral, 2019).

Retomando el ejemplo del llenado de recipientes (Figura 4), al hacer la temporización del proceso de llenado en diferentes momentos (líneas rojas en los recipientes de la Figura 1) y seriar los cambios que se producen en estos momentos sucesivos, se puede identificar que para el recipiente 1 (cilindro) los cambios son constantes, pero para el recipiente 2 (cono invertido) los cambios son cada vez menores y para el recipiente 3 (cono) los cambios son cada vez mayores. Esto puede realizarse desde la primera variación.

**Figura 4.** Llenado de recipientes y análisis de los cambios de altura del líquido.

Supongamos que los recipientes de la imagen (con el mismo volumen) se llenan con el mismo flujo constante de agua. Bosqueja la gráfica que representa cómo cambia la altura del líquido.



Elaboración de los autores.

No obstante, en ocasiones se requerirá de variaciones sucesivas. Para esto, reflexionemos sobre la situación de la Figura 5. En las tablas se presenta el número de personas (casos), por semana, que se han contagiado de COVID-19 en tres poblaciones y se solicita calcular el número de personas que se espera estén contagiadas en las semanas 7 y 9 en cada población si se continúa con las tendencias de las tablas.

En este ejemplo, los estudiantes argumentan que es posible notar que las diferencias son constantes luego de realizar cierta cantidad de diferencias. Así, se reconoce este patrón de comportamiento como algo que caracteriza a cada conjunto de valores en las tablas.

**Figura 5.** Método de las diferencias para calcular valores desconocidos de la secuencia.

Semana	Personas contagiadas en Santiago	Personas contagiadas en Monte Real	Personas contagiadas en San Francisco
1	89	47	0
2	101	99	7
3	120	151	26
4	141	203	63
5	164	255	124
6	189	307	215
7	216	359	342
8	245	411	511
9	276	463	730

Estrategia propuesta por un alumno de tercero de secundaria (14 años).

Los estadios dos y tres se desarrollan enmarcados en el segundo nivel (de abajo hacia arriba) del modelo de anidación de prácticas. Esto tomando en consideración que la búsqueda de regularidades (comparación y seriación) para comprender diferentes situaciones y fenómenos es una *actividad humana* (Cantoral, 2019). Esto se realiza normados por la necesidad de las sociedades (*prácticas socialmente compartidas*) de predecir o estimar comportamiento de situaciones o fenómenos de interés (Cantoral, 2019). Sobre esto se sustenta el desarrollo del cuarto estadio.

Una vez que se ha establecido el comportamiento variacional de las variables debe reconocerse que este permite explicar *por qué las variables cambian en la forma en que lo hacen*, es decir, abstraer el carácter estable del cambio (cuarto estadio): aquella regularidad que determina el comportamiento de los estados ulteriores del fenómeno (Cantoral, 2019).

En el ejemplo de la Figura 5, una vez identificado el patrón de comportamiento de cada conjunto de valores, se emplea este para realizar el cálculo de los valores solicitados. Es decir, el tomar conciencia de que este patrón se seguirá repitiendo, proporciona la racionalidad necesaria sobre la que descansa la estrategia para calcular los valores desconocidos de interés.

Si bien los ejemplos que se han señalado hasta ahora no buscan ser exhaustivos, sino solo ilustrar las ideas que se discuten, permiten evidenciar cómo la práctica social de Preadicere, que está detrás del diseño de tales ejemplos, norma las acciones y racionalidades que se encuentran detrás de las estrategias para enfrentarlas. Además, se debe tomar conciencia que dichos ejemplos se enmarcan en prácticas de referencia que dan sentido a dichas racionalidades y a los significados de los saberes que se construyen.

Es importante señalar que los estadios no son necesariamente lineales, sino pueden tener un diseño espiralado, es decir, es posible avanzar y retroceder en caso necesario y de acuerdo con la situación variacional. Por ejemplo, si pensamos en una situación variacional que parte de una tabla de valores, es muy probable que en la tabla ya se resume el sistema de referencia y el estudiante podría no ser demasiado consciente de él. Por otra parte, en la situación de llenado de recipientes, es probable que los estudiantes puedan describir verbalmente el cambio, teniendo que establecer para esto sistemas de referencia, pero si se solicita graficar ese comportamiento (estadio 4) deberán traducir a los sistemas de referencia del plano cartesiano ese análisis variacional, es decir, regresar al estadio 2. Esto también plantea que no basta que los estudiantes alcancen el último estadio para un reducido número de situaciones o comportamientos variacionales “sencillos”, sino que debe lograrse esto para una diversidad de situaciones donde los comportamientos variacionales son cada vez más complejos (de acuerdo con los objetivos formativos y/o del nivel educativo).

Además de los estadios anteriores, el desarrollo del Pensamiento y Lenguaje Variacional precisa tomar consciencia de cómo se analiza el cambio, es decir, la variación. Esto puede realizarse desde una perspectiva discreta o una perspectiva continua (Castiblanco, Urquina y Acosta, 2004; Thompson y Carlson, 2017). Por lo general, los primeros análisis del cambio se realizan de forma discreta, aun cuando el fenómeno bajo estudio sea continuo, por tanto, se requiere que las personas transiten hacia la toma de consciencia de que el cambio es válido en diferentes puntos o momentos del fenómeno cuando este es continuo. Sin embargo, el trabajo con fenómenos discretos es una puerta de entrada para el estudio de la variación (Ellis et al., 2015), pues el análisis continuo del cambio es más complejo que el análisis discreto (Thompson y Carlson, 2017).

Un último aspecto a considerar dentro el esquema de la Figura 2, es el relativo a la importancia de trabajar variadas formas de representación o registros semióticos (Duval, 1999). Cabe aclarar que esta importancia radica en el hecho de que las representaciones de tales registros son los medios que permiten representar las relaciones de las variables bajo estudio y los cambios de estas, lo que posibilitará el estudio del cambio, es decir, de la variación. Así, el énfasis no se ubicará en promover las actividades cognitivas de formación, tratamiento y conversión de los registros, sino en considerar que estos registros son la forma a través de la cual se comunicará y estudiará el cambio. Esto puede vislumbrarse en los ejemplos discutidos antes y en las Figuras 4 y 5.

## ■ Conclusiones

El esquema que se presenta en este trabajo para el desarrollo del Pensamiento y Lenguaje Variacional, en su estatus de propuesta, tiene la intención de contribuir a la sistematización de los elementos que en la revisión documental se han identificado como claves para este fin, con la finalidad de tener una base que pueda irse robusteciendo a la luz de la investigación que se desarrolle. Así, este esquema representa un aporte teórico que se sustenta en los resultados empíricos reportados en tales trabajos.

Se pretende que dicho esquema sirva de base para el diseño de trayectorias hipotéticas de aprendizaje que contribuyan a desarrollar el Pensamiento y Lenguaje Variacional de los estudiantes y generar a su vez conocimientos para mejorar dicho esquema y, a futuro, elaborar un modelo robusto sobre esto. Por tanto, los siguientes pasos en la investigación asociada con este desarrollo son dos. El primero es generar diseños didácticos para su implementación en contexto de aula. El segundo es analizar los resultados de las implementaciones para determinar si los elementos y relaciones que se expresan son suficientes para promover y explicar el desarrollo del pensamiento y lenguaje variacional o en su caso establecer los ajustes necesarios.

Es importante señalar que para la construcción del esquema se tuvo la intención de integrar aquellos elementos mínimos clave para el objetivo planteado. Esto llevó a que algunos elementos reportados no fueran integrados, no por no ser relevantes, sino para mantener cierta simplicidad que favoreciera su posible aplicación en diferentes prácticas de referencia. Cada posible práctica de referencia tiene particularidades y significados que de buscar integrarlos en un mismo esquema harían demasiado complejo o estático dicho esquema, limitando su posibilidad

de generalización. Sin embargo, como se indicó antes, resulta importante generar investigación que ayude a validar, refinar o integrar más elementos a este esquema. Esto con la intención de alcanzar de manera óptima el objetivo que se tiene.

Como toda investigación en proceso, el resultado parcial que se presenta aquí debe seguir fortaleciéndose con más resultados empíricos y teóricos.

## ■ Referencias Bibliográficas

- Arias, C., Leal, L. & Organista, M. (2011). La modelación de la variación, un análisis del uso de las gráficas cartesianas en los libros de texto de biología, física y química de secundaria. *Revista de Ciencias*, 15, 93-118.
- Artola, E. C., Mayoral, L. E., & Benarroch, A. (2016). Dificultades de aprendizaje de las representaciones gráficas cartesianas asociadas a biología de poblaciones en estudiantes de educación secundaria. Un estudio semiótico. *Revista Eureka Sobre Enseñanza y Divulgación de Las Ciencias*, 13(1), 36-52. [https://doi.org/10.25267/rev\\_eureka\\_ensen\\_divulg\\_cienc.2016.v13.i1.04](https://doi.org/10.25267/rev_eureka_ensen_divulg_cienc.2016.v13.i1.04)
- Báez, A. M., Martínez-López, Y., Pérez, O. L., & Pérez, R. (2017). Propuesta de tareas para el desarrollo del pensamiento variacional en estudiantes de ingeniería. *Formacion Universitaria*, 10(3), 93-106. <https://doi.org/10.4067/S0718-50062017000300010>
- Caballero, M. (2012). *Un estudio de las dificultades en el desarrollo del Pensamiento y Lenguaje Variacional en profesores de bachillerato* (Tesis de maestría). Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN. México.
- Caballero, M. y Cantoral, R. (2013). Una caracterización de los elementos del Pensamiento y Lenguaje Variacional. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, 26, 1007 – 1015.
- Caballero, M. (2018). *Causalidad y temporización entre jóvenes de bachillerato. La construcción de la noción de variación y el desarrollo del Pensamiento y Lenguaje variacional* (Tesis de doctorado). Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN, México.
- Caballero-Pérez, M. & Moreno-Durazo, G. (2017). Diseño de una situación de aprendizaje para el desarrollo del Pensamiento y Lenguaje Variacional. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, 30, 1066 -1074.
- Cabrera, L. (2014). *El estudio de la variación en la práctica del profesor de Cálculo. Un estudio de caso.* (Tesis de doctorado). Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN. México
- Cantoral, R. & Farfán, R. (1998). Pensamiento y lenguaje variacional en la introducción al análisis. *Revista Epsilon*, 14 (3), 353 – 369.
- Cantoral, R. (2001). *Matemática Educativa. Un estudio de la formación social de la analiticidad.* México: Grupo Editorial Iberoamérica.
- Cantoral, R. (2016). *Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa. Estudios sobre construcción social del conocimiento.* Barcelona, España: Editorial Gedisa.
- Cantoral, R. (2019). *Camino del saber. Pensamiento y Lenguaje Variacional.* España: Editorial Gedisa.
- Carlson, M., Jacobs, S., Coe, E., Larsen, S., & Hsu, E. (2002). Applying covariational reasoning while modeling dynamic events: A framework and a study. *Journal for Research in Mathematics Education*, 33(5), 352-378. <https://doi.org/10.2307/4149958>
- Castiblanco, A., Urquina, H., & Acosta, E. (2004). *Pensamiento Variacional y Tecnologías Computacionales.* Bogotá, Colombia: Enlace Editores Ltda.
- De la Orden, A. (2009). Evaluación y calidad: análisis de un modelo. *Estudios sobre Educación*, 16, 17-36
- Duval, R. (1988). "Graphiques et Equations: l'articulation de deux registres". *En Annales de Didactique et de Sciences Cognitives* 1, 235-255.
- Ellis, A. B., Özgür, Z., Kulow, T., Williams, C. C., & Amidon, J. (2015). Quantifying exponential growth: Three conceptual shifts in coordinating multiplicative and additive growth. *Journal of Mathematical Behavior*, 39, 135-155. <https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2015.06.004>
- Hernández-Zavaleta, J. & Cantoral, R. (2017). El desarrollo del Pensamiento y Lenguaje variacional y las acciones en las prácticas predictivas. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, 30, 1009-1017.

- Johnson, H. L. (2015). Together yet separate: Students' associating amounts of change in quantities involved in rate of change. *Educational Studies in Mathematics*, 89(1), 89–110. <https://doi.org/10.1007/s10649-014-9590-y>
- Martínez-López, L. G., & Gualdrón-Pinto, E. (2018). Fortalecimiento del pensamiento variacional a través de una intervención mediada con TIC en estudiantes de grado noveno. *Revista de Investigación, Desarrollo e Innovación*, 9(1), 91-102. doi: 10.19053/20278306.v9.n1.2018.8156.
- Maury Mancilla, E. A., Palmezano Sarmiento, G. J., & Cárcamo Barriosnuevo, S. J. (2016). Sistema de tareas para el desarrollo del pensamiento variacional en 5° grado de educación básica primaria. *Escenarios*, 10(1), 7. <https://doi.org/10.15665/esc.v10i1.721>
- Montiel G. & Buendía, G. (2012). Un esquema metodológico para la investigación socioepistemológica: Ejemplos e ilustraciones. En A. Rosas y A. Romo (Eds.), *Metodología en Matemática Educativa: Visiones y reflexiones* (pp. 61-88). México: Lectorum.
- Simon, M. A., & Tzur, R. (2004). Explicating the role of mathematical tasks in conceptual learning: an elaboration of the hypothetical learning trajectory. *Mathematical Thinking and Learning*, 6(2), 91-104.
- Thompson, P. W., & Carlson, M. P. (2017). Variation, covariation, and functions: Foundational ways of thinking mathematically. In J. Cai (Ed.), *Compendium for research in mathematics education* (pp. 421-456). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.
- Thompson, P. W., Hatfield, N. J., Yoon, H., Joshua, S., & Byerley, C. (2017). Covariational reasoning among U.S. and South Korean secondary mathematics teachers. *Journal of Mathematical Behavior*, 48(July), 95–111. <https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2017.08.001>