Acta Latinoamericana de Matemática Educativa

SECCIÓN 2 / PROPUESTAS PARA LA ENSEÑANZA DE LAS MATEMÁTICAS

VOL 34, NÚMERO 2, AÑO 2021

AVANCES EN LA CARACTERIZACIÓN DEL PENSAMIENTO GEOMÉTRICO A TRAVÉS DE LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS TRIGONOMÉTRICOS NO RUTINARIOS

ADVANCES IN THE CHARACTERIZATION OF GEOMETRIC THINKING THROUGH NON-ROUTINE TRIGONOMETRIC PROBLEM SOLVING

Margarita Pinzón Cardozo
Universidad Antonio Nariño. (Colombia)
mpinzon32@uan.edu.co

Resumen
Esta investigación se realiza con el fin de contribuir a la caracterización del pensamiento geométrico en estudiantes de grado décimo de la educación media. Partiendo de estudios reportados en la literatura sobre enseñanza y aprendizaje de la trigonometría, autores como Bressoud (2010), Altman y Kidron (2016) y Gomes (2013), evidencian que existe una dicotomía entre la trigonometría triangular y la trigonometría circular, conocimientos insuficientes en geometría y álgebra, la no familiaridad en las construcciones con regla y compás, no permiten una buena comprensión en el momento de aprender trigonometría. Observando las dificultades anteriores se propone elaborar un diseño instruccional, basado en la resolución de problemas, el pensamiento geométrico, el modelo DNR (dualidad, necesidad y razonamiento repetido) y el uso del software dinámico GeoGebra como una herramienta didáctica, que ofrezca experiencias de aprendizaje de los conceptos y teoremas básicos de la trigonometría.

Palabras clave: trigonometría, pensamiento geométrico, resolución de problemas

Abstract
This research aims to contribute to the characterization of tenth grade middle school students’ geometric thinking. It is based on studies of the literature about the teaching and learning of trigonometry by authors such as Bressoud (2010), Altman and Kidron (2016), and Gomes (2013), who show that there is a dichotomy between triangular and circular trigonometry; insufficient knowledge of geometry and algebra, and lack of familiarity with constructions via ruler and compass, all of which hinders a good understanding when learning trigonometry. Taking into account the aforementioned difficulties, this work suggests creating an instructional design based on problem solving, geometric thinking, the DNR model (duality, necessity and repeated reasoning), and the use of GeoGebra dynamic software as a didactic tool, that offers learning experiences on trigonometry basic concepts and theorems.

Key words: trigonometry, geometric thinking, problem solving

Introducción

La trigonometría es una rama de la matemática, cuyo nombre se deriva de los términos griegos *trigonos* que significa triángulo y *metron* que significa medida, es decir medida de los triángulos. La trigonometría surgió inicialmente con los trabajos de los babilonios, los egipcios, y los griegos quienes vieron la necesidad de resolver problemas de la astronomía y otras disciplinas, aplicando relaciones entre los lados y los ángulos de un triángulo. Posteriormente se definen las funciones trigonométricas empleadas para resolver problemas en otros campos del conocimiento como la mecánica, electricidad, termodinámica, entre otras.

En Colombia, el estudio de la trigonometría se lleva a cabo en la educación media como lo establecen los Lineamientos Curriculares de Matemáticas (1998), los Estándares Básicos de Competencias Matemáticas (EBCM, 2006), creados por el Ministerio de Educación Nacional (MEN), donde se hace énfasis en los cinco tipos de pensamiento matemático, cuyo estudio es de suma importancia debido a que:

De esta manera, la percepción geométrica se complejiza y ahora las propiedades de los objetos se deben no sólo a sus relaciones con los demás, sino también a sus medidas y a las relaciones entre ellas. El estudio de estas propiedades espaciales que involucran la métrica son las que, en un tercer momento, se convertirán en conocimientos formales de la geometría, en particular, en teoremas de la geometría euclidiana. (p. 61)

En los últimos años, el Ministerio de Educación Nacional (MEN) reafirma la importancia del proceso enseñanza y aprendizaje de la trigonometría en la educación básica secundaría y la media vocacional con la creación e implementación de los Derechos Básicos de Aprendizaje (DBA, 2016) y la Matriz de Referencia (MR, 2016), donde se plantean aspectos fundamentales en el aprendizaje de la trigonometría como: reconocer el significado de las razones trigonométricas seno, coseno y tangente en un triángulo rectángulo para los ángulos agudos, calcular valores de las razones trigonométricas seno y coseno para ángulos no agudos, auxiliándose de los ángulos de referencia inscritos en el círculo unitario y reconocer algunas aplicaciones de las funciones trigonométricas en la modelación de fenómenos de variación periódica, como: movimiento circular, movimiento del péndulo, movimiento de un pistón, ciclo de la respiración, entre otros.

Por otro lado, en la literatura se encuentran investigaciones en educación matemática, con el propósito de identificar las dificultades que presentan los estudiantes cuando aprenden trigonometría. Bressoud (2010), afirma que "El estudio de la trigonometría adolece de una dicotomía básica que presenta un serio obstáculo para muchos estudiantes" (p. 107), Altman y Kidron (2016) parten de estudios reportados en la literatura, especialmente sobre las dificultades que tienen los estudiantes al no relacionar la trigonometría triangular y circular, además, observaron que los estudiantes acceden a la universidad sin el conocimiento firme de la trigonometría, especialmente en relación con el círculo trigonométrico. Por otra parte, Gomes (2013), afirma que la no familiaridad de las construcciones geométricas con regla y compás, y conocimientos insuficientes en geometría y álgebra, originan la baja comprensión en el aprendizaje de la trigonometría.

Teniendo en cuenta los referentes teóricos del Ministerio de Educación Nacional de Colombia (MEN) y diferentes investigaciones en el campo del proceso y enseñanza de la trigonometría, la presente investigación plantea el siguiente problema de investigación a través de la pregunta: ¿Cómo avanzar en la caracterización del pensamiento geométrico en estudiantes de grado décimo de la educación media a través de la resolución de problemas de trigonometría?

El objetivo general es lograr avances en la caracterización del pensamiento geométrico, manifestado por los estudiantes en el grado décimo de la educación media al resolver problemas de trigonometría, basado en dos aspectos:

Elaborar un diseño instruccional, basado en la resolución de problemas, que ofrezca experiencias de aprendizaje de los conceptos fundamentales de la trigonometría.

Describir los procesos que siguen los estudiantes cuando resuelven problemas de trigonometría, en el marco del diseño instruccional presentado.

Marco teórico
A continuación, se precisa los referentes teóricos que son parte fundamental en el desarrollo de la investigación.

Resolución de problemas

Durante muchos años la resolución de problemas ha sido un tema abordado por diferentes investigadores en el campo de la educación matemática. A continuación, se presenta brevemente los aportes de algunos autores.

Polya (1954), plantea que resolver problemas es una cuestión de habilidad práctica, como por ejemplo el nadar. La habilidad se adquiere mediante la imitación y la práctica. Al tratar de resolver problemas hay que observar, imitar lo que hacen otras personas en casos semejantes y así aprender a resolver problemas.

Falk (1980), señala que para que un problema sea motivante para el estudiante debe tener tres características "…que sea una situación que estimula el pensamiento, que sea interesante para el estudiante, y que la solución no sea inmediata" (p.16)
Santaló (1981), señala que "enseñar matemáticas debe ser equivalente a enseñar a resolver problemas. Estudiar matemáticas debe ser lo mismo que pensar en la solución de algún problema"

Schroeder y Lester (1989, pp. 32-33) escribieron sobre el desarrollo de la comprensión matemática a través de la resolución de problemas desde tres enfoques distintos que son:

- Enseñanza sobre la resolución de problemas.
- Enseñanza para la resolución de problemas.
- Enseñanza a través de la resolución de problemas.

Cuando un estudiante aborda un problema, sin que se le dé a conocer los conceptos matemáticos que puede emplear en la resolución del problema, requerirá poner en juego todas sus habilidades y conocimientos, tener confianza en sí mismo, conocer los alcances y limitaciones de sus estrategias y valorar la necesidad de aprender nuevos conceptos.

Los estudiantes de hoy van a vivir en un mundo donde se van a enfrentar a situaciones cada vez más complejas. Por lo tanto, la resolución de problemas debe ser uno de los instrumentos principales en el proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, puesto que permite el desarrollo de habilidades intelectuales en los estudiantes cuando se enfrentan a situaciones complejas. De acuerdo con lo anterior, la resolución de problemas debe plantarse como uno de los objetivos para la educación en este milenio.

Pensamiento matemático

Falk (1994) propone un modelo, a partir de ideas de Leone Burton, que se describe en cuatro procesos del pensamiento matemático que considera centrales: especializar, conjeturar, generalizar y convencer, y los describe de la siguiente manera.

Especializar: cuando se está frente a un problema o pregunta, una forma valiosa de explorar su significado es examinando modelos particulares. Esta es la clave desde una mirada inductiva en el aprendizaje y se observa de manera natural en los niños.

Conjeturar: Cuando se examinan suficientes modelos o ejemplos, automáticamente se hacen conjeturas acerca de las relaciones que los conectan, a través de este proceso se explora y se ratifica un patrón subyacente.

Generalizar: Cuando se reconoce una regularidad o un patrón subyacente, desencadena en la afirmación de una generalización. Estas afirmaciones, son los elementos usados por los aprendices para dar orden y significado entre una cantidad abrumadora de información, el comportamiento depende de dichas generalizaciones.

Convencer: Para llegar a una generalización sólida, no es suficiente con verificar, es cuestionar hipótesis o supuestos, dudar y sondear la generalización, para llegar a producir una demostración.

Drijvers, P. et al (2019), señalan que la resolución de problemas, el modelado y la abstracción, se convierten en elementos importantes para el desarrollo del pensamiento matemático. A su vez, de manera análoga y con acompañamiento del docente permite el redireccionamiento a través de trayectoria de aprendizaje prevista por el docente para consolidar nuevas y mejores estructuras del pensamiento matemático del estudiante.

Finalmente, en los Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas de Colombia (2006), señalan que los problemas tomados de textos escolares, suelen ser solo ejercicios de rutina, pero plantear y analizar problemas suficientemente complejos y atractivos, para que los estudiantes formulen y resuelvan, es clave para el desarrollo del pensamiento matemático.

Modelo DNR (Dualidad, necesidad y razonamiento repetido)

La enseñanza basada en el modelo DNR, desarrollada por Guershon Harel (2010) en matemáticas, parte de tres principios: dualidad, necesidad y razonamiento repetido.

El Principio de Dualidad: los estudiantes desarrollan formas de pensar a través de la producción de formas de comprensión y, las formas de comprensión que producen se ven afectadas por las formas de pensar que poseen. Además, lo que los estudiantes saben se constituye en una base para robustecer lo que aprenderán en el futuro.

El principio de necesidad: para que los estudiantes aprendan las matemáticas que pretendemos enseñarles, deben tener una necesidad, donde la "necesidad" aquí referida es la necesidad intelectual.

El principio de razonamiento repetido: Los estudiantes deben practicar para interiorizar las formas deseables de entender y de pensar. Por lo tanto, un solo problema no es suficiente para que los estudiantes interioricen completamente las formas de pensar. El maestro debe proporcionarles a los estudiantes situaciones que requieran la aplicación de una forma de pensar específica y asegurarse de que sus estudiantes interioricen, retengan y organicen el conocimiento.

Las TIC como herramienta didáctica en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas
Real (2013), reflexiona sobre la era de la tecnología que se están viviendo las instituciones educativas. El uso de diferentes recursos tecnológicos por parte de los estudiantes y docentes, pueden llegar a jugar un papel importante en el proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, si se utilizan correctamente. Las TIC no son el centro del proceso enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Es una herramienta que le permite al docente facilitar el proceso, sin olvidar que son solamente un recurso didáctico.

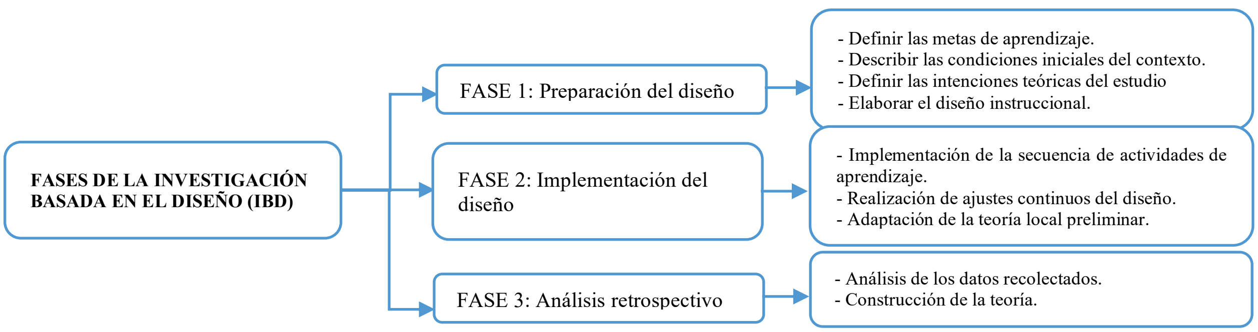
Moreno (2018), afirma que representar una idea matemática, un concepto matemático, es una manera de darle existencia material a dicho concepto, siempre teniendo en cuenta que, un concepto se puede representar de varias formas, como: una gráfica, una tabla, una expresión algebraica, etc. Por lo tanto, tener un sistema de representación como el suministrado por GeoGebra, permite cerrar la grieta entre la intuición y la capacidad deductiva.

Concluyendo, el uso de las herramientas TIC como una herramienta pedagógica y de apoyo en el aula, le permite al estudiante representar, generar conclusiones, comunicar, conjeturar, hacer demostraciones, modelar y resolver problemas, favoreciendo el aprendizaje de la trigonometría en el estudiante.
Metodología

Esta investigación se desarrolla a través de la metodología de investigación basada en el diseño (IBD). Bell (como citó Gibelli, 2014) afirma que este tipo de metodología IBD se centra en el diseño y exploración de todo tipo de innovaciones educativas, a nivel didáctico y organizativo, considerando también posibles herramientas digitales tales como los softwares, que contribuyen a la innovación y consecuentemente al mejoramiento de la comprensión de la naturaleza y condiciones del aprendizaje.

El siguiente esquema muestra un resumen de las tres fases con los subprocesos de la metodología IBD. (Figura 1).

Figura 1. *Fases de la Investigación Basada en el Diseño (IBD).*



Fuente: Elaboración propia con base en el trabajo de Gravemeijer y Prediger, (2016).

Condiciones iniciales del contexto: la propuesta está dirigida a un grupo de 10 estudiantes de grado décimo que oscilan en edades entre 14-15 años del Instituto Técnico Nueva Familia del municipio de Duitama-Colombia. Antes de implementar la intervención, se determina la situación del grupo en cuanto a conceptos fundamentales de la geometría a través de una prueba de entrada que consta de ocho problemas. Se obtuvieron los siguientes resultados:

La mayoría de los estudiantes resolvieron los problemas propuestos por impresión visual o por intuición. Cabe resaltar, que las gráficas son el medio principal que utilizan los estudiantes para resolver los problemas de geometría y con frecuencia usan términos como en la gráfica se observa que son: “iguales”, “es el doble de”, “equivale a la suma de”.

Uso de lenguaje y notación inapropiados para realizar conjeturas o para explicar la solución de los problemas.

Dificultad para aplicar las expresiones algebraicas y sus operaciones básicas, que son necesarias en la resolución de problemas de tipo geométrico.

La mayoría de los estudiantes no reconocen qué conceptos de la geometría deben usar cuando resuelven problemas no rutinarios, como son: Generalidades de los ángulos, ángulos en el triángulo, desigualdad triangular, teorema de Thales, criterios de semejanza entre dos triángulos y teorema de Pitágoras, entre otros.

Diseño instruccional: para la elaboración del diseño instruccional y la estructura de las actividades se propone una adaptación al modelo DNR, en cuanto al orden de los principios que propone Harel (2008).

Los tres principios del modelo adaptado es NDR, se estructuran mediante tres momentos: la motivación, la intervención del docente y la interiorización del conocimiento a través de repetición. El siguiente esquema muestra un resumen del diseño instruccional. (Figura 2)

Para Bressoud (2010), existe la tradición donde primero se enseña la trigonometría triangular de una forma simple y básica antes de profundizar en la trigonometría circular. Históricamente, se evidencia que este proceso se desarrolló en dirección opuesta, además se presentan varias dificultades que presentan cuando abordan las dos trigonometrías desde dos enfoques distintos. Por esto se tomó la decisión de diseñar una secuencia de actividades partiendo de la geometría, trigonometría del círculo y trigonometría del triángulo donde se evidencie la integración de las dos trigonometrías.

Figura 2. *Principios fundamentales del Modelo NDR.*

Fuente: Elaboración propia con base en el trabajo de Harel (2008).

Ejemplos, análisis y resultados

A continuación, se presentarán el análisis de los resultados de la aplicación de segunda actividad a través del diseño instruccional presentando, teniendo en cuenta que la primera actividad que se propuso fue sobre conocimientos fundamentales de geometría.

Actividad No. 2 de trigonometría
Tema: Medición de ángulos, arcos, cuerdas y circunferencia unitaria.
Título: "Siguiendo a los griegos"
Objetivo del profesor: Caracterizar el pensamiento de los estudiantes cuando resuelven problemas aplicando temática: medición de ángulos, medición de arcos, longitud de cuerdas con ángulos notables y circunferencia unitaria.
Momento 1. Motivación: Se le proponen cuatro problemas a los estudiantes dentro de un contexto real, con el propósito de despertar el interés, la voluntad y el deseo de aprender algo nuevo. No se les informa los temas que van a aprender, para que ellos los resuelvan de manera autónoma.

El docente analiza los resultados obtenidos para identificar los recursos con los que cuentan los estudiantes y las temáticas que deben aprender para realizar su intervención.

Análisis de los resultados del momento motivacional

Para el análisis de los resultados obtenidos de las actividades en las fases motivacional y razonamiento repetido, se proponen cuatro componentes que permiten avanzar en la caracterización del pensamiento geométrico.

Primer componente: Creación de códigos

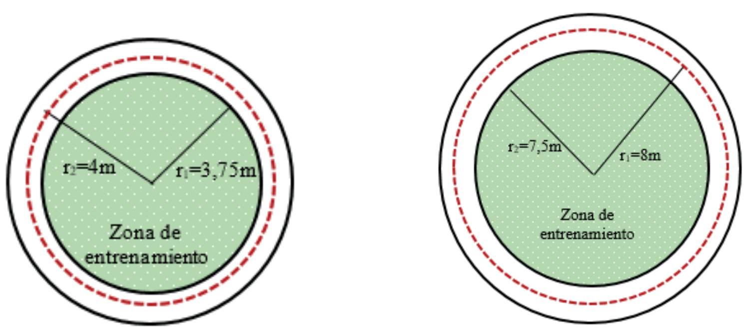
Para la construcción de los códigos se tiene en cuenta el número del problema y las definiciones o teoremas que debe contar el estudiante para resolverlo. (Ej. P1T1: Problema 1 y temática 1).
P1T1: Perímetro del círculo
P1T2: Área del círculo
P2T1: Aplicación del Teorema de Pitágoras
P2T2: Área sombreada entre la circunferencia y un cuadrado inscrito.
P3T1: Ángulos entre rectas perpendiculares y ángulos complementarios.
P3T2: Ángulos opuestos por el vértice.
P4T1: Ángulos sobre una recta forman dos ángulos rectos.
P4T2: Planteamiento y solución de ecuaciones lineales.

Segundo componente: Análisis de las soluciones propuestas por los estudiantes

Para ejemplificar el análisis se presentará el esbozo de los resultados obtenidos en dos de los cuatro problemas propuestos.

Problema 1. La gráfica representa dos pistas circulares de atletismo para entrenamiento de niños y jóvenes. (Figura 3)

Figura 3. *Pistas de entrenamiento de atletismo para niños y jóvenes.*

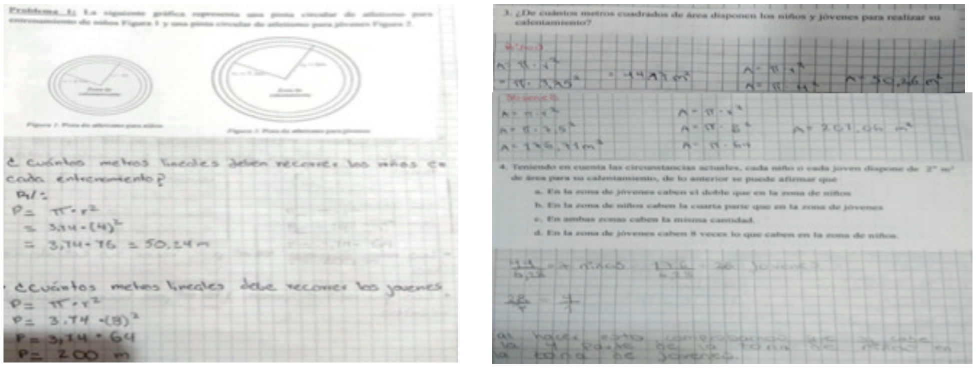


Elaboración de la autora.

1. La línea punteada de color rojo representa el recorrido de los atletas en cada entrenamiento. Si los niños y jóvenes deben realizar 10 vueltas en su respetiva pista de entrenamiento.
¿Cuántos metros lineales deben recorrer cada niño en cada entrenamiento?
¿Cuántos metros lineales debe recorrer cada joven en cada entrenamiento?
¿De cuántos metros cuadrados de área disponen los niños y jóvenes para realizar su calentamiento?

Análisis de la solución del problema 1: El 40% los estudiantes confunden el algoritmo de perímetro del círculo con el algoritmo del área del círculo, la resolución que proponen es incorrecta, además este error no les permite establecer una relación de proporcionalidad correcta entre el perímetro y el radio del círculo. El 80% los estudiantes conocen el algoritmo del área del círculo, lo aplican de forma correcta en la resolución del problema, establecen una relación de proporcionalidad entre el área y el radio del círculo y lo explican con detalle. (Figura 4)

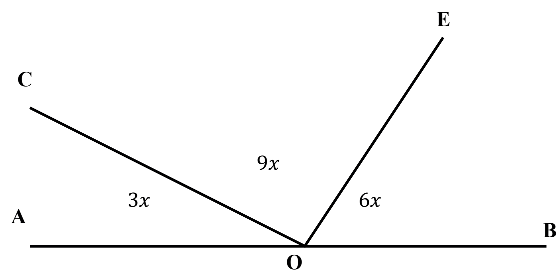
Figura 4. *Soluciones propuestas por dos estudiantes al problema 1.*



Elaboración de la autora.

Problema 4: Observa la gráfica de la derecha, los ángulos 3x, 9x y 6x están sobre la recta $\overleftrightarrow{AB}$. (Figura 5) ¿Teniendo en cuenta los datos de la gráfica, se puede afirmar que uno de los tres ángulos es recto? Si la respuesta es afirmativa o negativa, explique por qué. ¿Cuál es la medida de los ángulos $\sphericalangle COA$, $\sphericalangle EOC$ y $\sphericalangle BOE$?

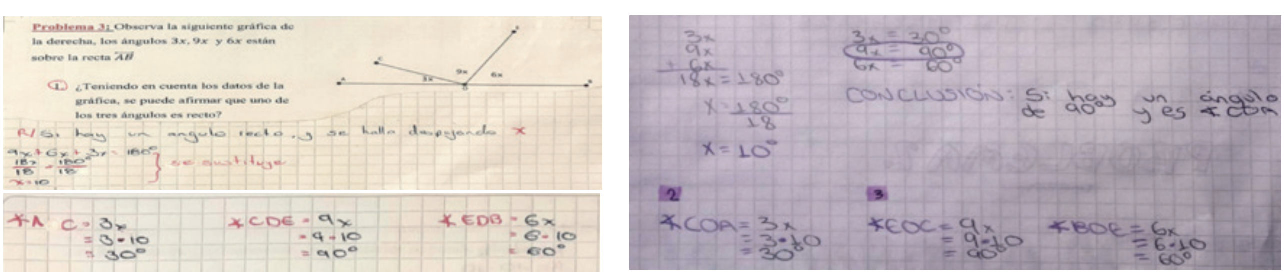
Figura 5. *Ángulos sobre la recta.*



Elaboración de la autora.

Análisis de la solución del problema 4: El 100% de los estudiantes identifican que los ángulos que están sobre una recta forman dos ángulos rectos, plantean el sistema de ecuaciones y explican con detalle la resolución del problema, hay similitud en los procesos que siguen los estudiantes. (Figura 6).

Figura 6. *Soluciones propuestas por dos estudiantes al problema 2.*

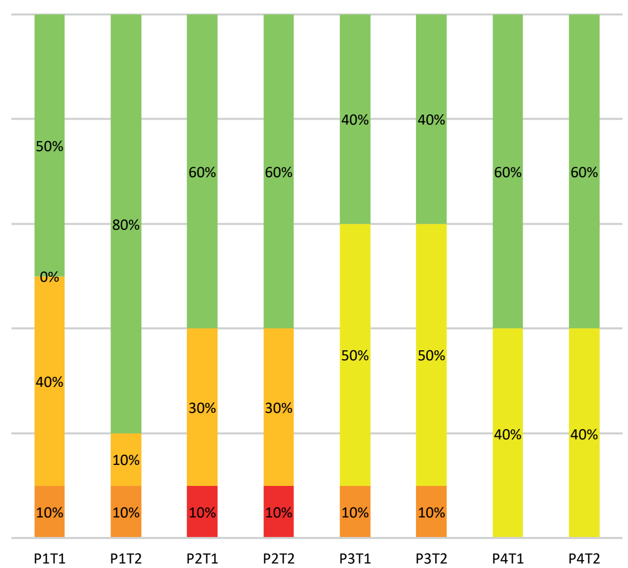


Elaboración de la autora.

Tercer Componente: Ubicación del grupo de estudiantes en niveles de desempeño

Después de analizar las soluciones propuestas por los estudiantes en el componente dos, se proponen cinco (5) niveles de desempeño, cada nivel se identifica con un color y con indicadores de desempeño. A través de una gráfica y la tabla se muestra los resultados obtenidos por el grupo en el momento uno. (Figura 7)

Figura 7. *Niveles de desempeño grupal en cada uno de los aprendizajes.*



Nivel	Indicadores de desempeño
1	Es estudiante no propone solución a los problemas.
2	La solución que propone es incorrecta porque - Desconoce definiciones y/o algoritmos - Utiliza gráficos o imágenes y por impresión visual resuelve de forma incorrecta.
3	La solución que propone es incorrecta porque - Conoce las definiciones y algoritmos, los aplica de forma incorrecta - Conoce las definiciones y algoritmos, pero los confunde en el momento de aplicarlos. - Utiliza gráficos e imágenes como ayuda visual, pero hace conjeturas de forma incorrecta.
4	La solución que propone es correcta porque - Utiliza gráficos e imágenes como ayuda visual para hacer conjeturas de forma correcta pero no explica la resolución del problema.
5	La solución que propone es correcta porque - Conoce definiciones, teoremas y algoritmos, los aplica de forma correcta en la resolución del problema y explica con detalle la resolución del problema. - Utiliza gráficos e imágenes como ayuda visual para hacer conjeturas y explicar con detalle la resolución del problema.

Elaboración de la autora.

Cuarto Componente: Recursos con los que cuentan los estudiantes en la fase motivacional

De acuerdo con los resultados obtenidos en los dos componentes anteriores, se identifican los recursos con los que cuentan los estudiantes y los recursos en los que presentaron dificultades o no cuentan los estudiantes. (Tabla 1)

Tabla 1. *Recursos con los que cuenta los estudiantes en la fase motivacional*

Recursos con los que cuentan los estudiantes	Recursos en los que tienen dificultades o no cuentan los estudiantes.
• Área del círculo y relación de proporcionalidad entre el área del círculo y el radio. • Ángulos entre rectas perpendiculares. y ángulos complementarios. • Ángulos opuestos por el vértice. • Ángulos sobre una recta forman un ángulo de 180º. • Planteamiento y solución de ecuaciones lineales con una variable para resolver problemas que involucran ángulos.	• Perímetro del círculo y relación de proporcionalidad entre el perímetro del círculo y el radio. • Aplicación del Teorema de Pitágoras para hallar la longitud de una cuerda de 90º. • Área sombreada entre la circunferencia y un cuadrado inscrito.

Elaboración de la autora.

Momento 3. Interioriza en conocimiento a través de la repetición
En este momento se proponen problemas no rutinarios para que los estudiantes a través de la aplicación de los conocimientos aprendidos en la intervención del docente y en nuevos escenarios puedan fortalecer el pensamiento geométrico, robustecer los conceptos y teoremas de forma autónoma.

Análisis de los resultados del momento de interiorización del conocimiento a través de la repetición
Primer componente: Creación de códigos

P1T1: Ángulos en grados, radianes y vueltas, conversiones.
P1T2: Cálculo de arcos.
P2T1: Longitud de cuerdas y arcos para un ángulo de 60º.
P2T2: Construcción de arcos y cuerdas en GeoGebra para comparar resultados.
P3T1: Longitud de cuerdas y arcos para un ángulo de 30º.
P3T2: Construcción de arcos y cuerdas en GeoGebra para comparar resultados.
P4T1: Coordenadas de puntos sobre la circunferencia unitaria para ángulos con múltiplos de 30º.
P4T2: Conversión de ángulos de grados a radianes.
P4T3: Ubicación de puntos sobre la circunferencia unitaria en GeoGebra para comparar resultados.
P5T1: Para todo punto (x, y) que pertenece a la circunferencia unitaria se cumple que

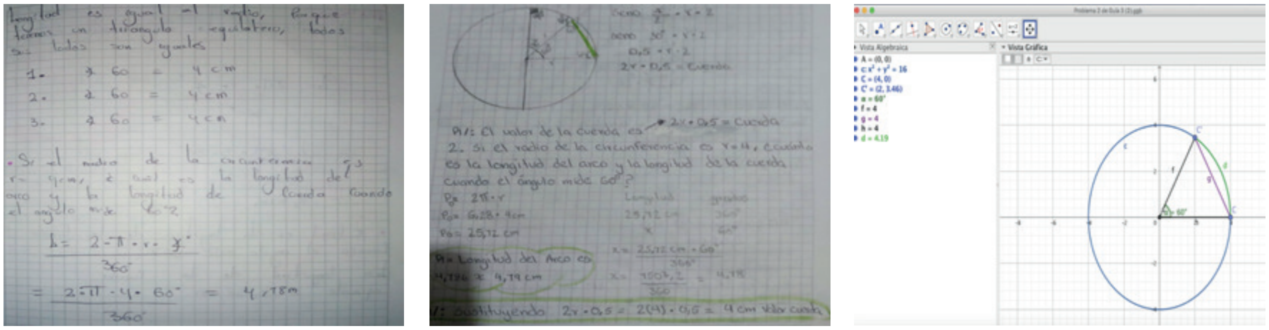
$$x^2 + y^2 = 1 \text{ o } \sqrt{x^2 + y^2} = 1$$

P6T1: Aplicación del Teorema de Pitágoras para hallar la longitud de una cuerda a partir del diámetro o radio.
Segundo componente: Análisis de las soluciones propuestas por los estudiantes
Para ejemplificar el análisis se presentará el esbozo de los resultados obtenidos en dos de los seis problemas propuestos.

Problema 2. Si el radio de una circunferencia es r, responde:
¿Cuál es la longitud de la cuerda en función de r cuando el ángulo mide 60º?
Si el radio de la circunferencia es $\mathrm{r} = 4\mathrm{cm}$, ¿cuál es la longitud del arco y la longitud de cuerda cuando el ángulo mide 60º?
Realizar la gráfica en GeoGebra la circunferencia con un $\mathrm{r} = 4\mathrm{cm}$, el arco y la cuerda para un ángulo de 60º. Compara las respuestas obtenidas del problema con los obtenidos en GeoGebra.
Análisis de la solución del problema 2: El 80% los estudiantes resolvieron de forma correcta el problema, se observaron dos procesos para hallar la longitud de la cuerda:

1) Construyeron una circunferencia con dos radios y la cuerda para el ángulo de 60º, y dedujeron que la longitud es igual al radio de la circunferencia.
2) Aplicaron el algoritmo $2r \cdot sen\left(\frac{\alpha}{2}\right)$, compararon el resultado con GeoGegra y como obtuvieron el mismo resultado, dedujeron que se podía aplicar. En la entrevista con el docente se les preguntó qué si entendían el algoritmo, comentaron que no sabían que representaba el seno pero que entendieron como sustituir en el algoritmo para resolver el problema. El 20% de los estudiantes lo resolvieron de forma incorrecta, se observa que conocen las definiciones de cuerda y arco, pero en el momento de resolver el problema las intercambiaron. (Figura 8)

Figura 8. *Soluciones propuestas por dos estudiantes al problema 2, gráfica de un estudiante en GeoGebra.*



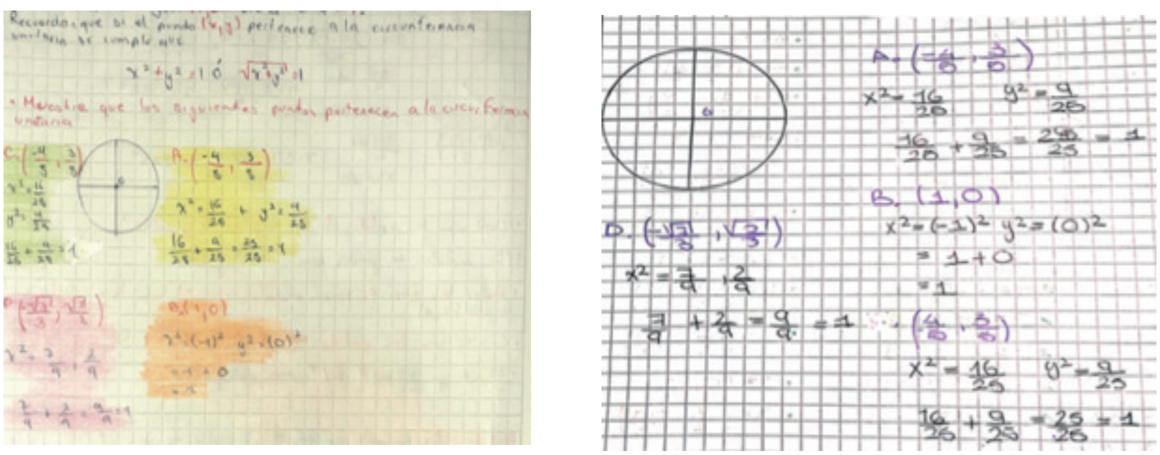
Elaboración de la autora

Problema 5: Sobre una circunferencia unitaria, se ubican cuatro puntos A, B, C y D.
Muestre si los puntos pertenecen a la circunferencia unitaria.

A$\left(-\frac{4}{5},\frac{3}{5}\right)$ B (-1,0) C$\left(-\frac{\sqrt{7}}{3},\frac{\sqrt{2}}{3}\right)$ D$\left(\frac{\sqrt{5}}{5},-\frac{2\sqrt{5}}{5}\right)$

Análisis de la solución del problema 5: El 100% los estudiantes resolvieron de forma correcta el problema, se observó en las soluciones presentadas que comprenden que si un punto (x,y) pertenece a la circunferencia unitaria de cumple que que si el punto (x,y) pertenece a la circunferencia unitaria se cumple que $x^2+y^2=1$ o $\sqrt{x^2+y^2}=1$. (Figura 9)

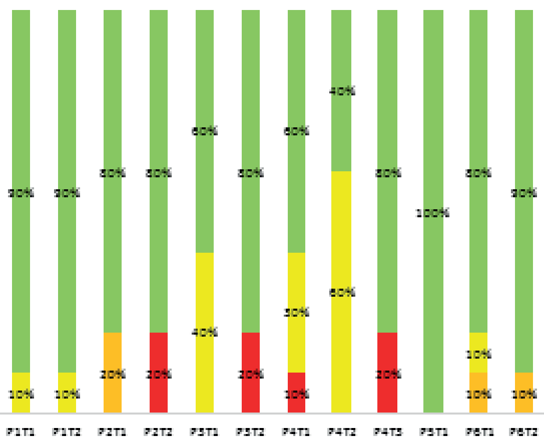
Figura 9. *Soluciones propuestas por dos estudiantes al problema 5.*



Elaboración de la autora.

Tercer Componente: Ubicación del grupo de estudiantes en niveles de desempeño al finalizar la actividad (Figura 10)

Figura 10. *Niveles de desempeño grupal en cada uno de los aprendizajes.*



Nivel	Indicadores de desempeño
1	Es estudiante no propone solución a los problemas.
2	La solución que propone es incorrecta porque - Desconoce definiciones y/o algoritmos - Utiliza gráficos o imágenes y por impresión visual resuelve de forma incorrecta.
3	La solución que propone es incorrecta porque - Conoce las definiciones y algoritmos, los aplica de forma incorrecta - Conoce las definiciones y algoritmos, pero los confunde en el momento de aplicarlos. - Utiliza gráficos e imágenes como ayuda visual pero hace conjeturas de forma incorrecta.
4	La solución que propone es correcta porque - Utiliza gráficos e imágenes como ayuda visual para hacer conjeturas de forma correcta pero no explica la resolución del problema.
5	La solución que propone es correcta porque - Conoce definiciones, teoremas y algoritmos, los aplica de forma correcta en la resolución del problema y explica con detalle la resolución del problema. - Utiliza gráficos e imágenes como ayuda visual para hacer conjeturas y explicar con detalle la resolución del problema.

Elaboración de la autora.

Cuarto Componente: Recursos con los que cuentan los estudiantes al finalizar la actividad y en los que presentan dificultades al finalizar la actividad. (Tabla 2)

Tabla 2. *Recursos con los que cuenta los estudiantes al finalizar la actividad.*

Recursos con los que cuentan los estudiantes	Recursos en los que tienen dificultades o no cuentan los estudiantes.
• Medición de ángulos en el sistema sexagesimal, cíclico y conversiones. • Longitud de arcos. • Longitud de cuerdas con ángulos de 30º, 45º, 60º y 90º. • Circunferencia unitaria. • Cálculo de coordenadas para los puntos sobre la circunferencia unitaria con ángulos notables (0º, 30, 35º, 60º, 90º y múltiplos en los cuatro cuadrantes). • Aplicación del teorema de Pitágoras para hallar longitudes de cuerdas a partir del diámetro o radio. • Construcciones en el software GeoGebra de: ángulos en posición estándar, circunferencias unitarias, puntos sobre la circunferencia unitaria, cuerdas y arcos entre otros.	• Longitud de arcos y cuerdas. • Construcciones en el software GeoGebra de: ángulos en posición estándar, circunferencias unitarias, puntos sobre la circunferencia unitaria, cuerdas y arcos entre otros. Área sombreada entre la circunferencia y un cuadrado inscrito.

Elaboración de la autora.

Conclusiones

Para la preparación del diseño, se propone conocer las condiciones iniciales del grupo a través de una prueba de entrada sobre conceptos fundamentales de geometría. De acuerdo con los resultados encontrados, se observó que el grupo de estudiantes presenta conocimientos insuficientes en geometría, ratificando de esta forma lo que afirma Gomes (2013). Por lo anterior se toma la decisión de diseñar la primera actividad sobre el sobre conceptos fundamentales de geometría.

La aplicación de las actividades a través del diseño instruccional presentado les ha permitido a los estudiantes en el *momento uno* identificar los conocimientos que poseen y si los están aplicando de forma correcta en la resolución de problemas, para despertar el interés y la necesidad por aprender cosas nuevas. En el *momento dos,* los estudiantes de forma activa y el docente como mediador del conocimiento plantea aprender cosas nuevas sobre la trigonometría del círculo y del triángulo a través de la resolución de problemas, y por medio de las construcciones en GeoGebra han podido visualizar, comparar resultados, realizar conjeturas y verificar la solución obtenida en los problemas. En el *momento tres,* cuando los estudiantes hacen uso del principio de razonamiento repetido, resuelven problemas no rutinarios aplicando los conocimientos aprendidos en nuevos escenarios y de forma autónoma, le permiten fortalecen el pensamiento geométrico e interiorizan los conocimientos adquiridos, corroborando la teoría de Harel (2010).

Por otro lado, los estudiantes manifiestan que este proceso de enseñanza y aprendizaje les ha permitido salir del confort, al aplicar los conocimientos en diferentes escenarios y proponer diferentes estrategias de solución. Además, informan que interactuar con el software GeoGebra, les dio la oportunidad hacer construcciones geométricas reales, comparar resultados, hacer conjeturas y los motiva a aprender geometría y trigonometría.

Referencias bibliográficas

Altman, R. & Kidron, I. (2016). Constructing knowledge about the trigonometric functions and their geometric meaning on the unit circle. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 47*(07), 1048-1060.

Bressoud, D. (2010). Historical Reflections on Teaching Trigonometry. *The Mathematics Teacher, 104*(2), 106-112.

Drijvers, P., Kodde-Buitenhuis, H. & Doorman, M. (2019). Assessing mathematical thinking as part of curriculum reform in the Netherlands. *Educational Studies in Mathematics*. 102, 435-456.

Falk de Losada, M. (1980). *La enseñanza a través de problemas.* Bogotá, Colombia: Universidad Antonio Nariño.

Falk de Losada, M. (1994) Enseñanzas acerca de la naturaleza y el desarrollo del pensamiento matemático extraídas de la historia del álgebra. *Boletín de Matemáticas*; 1(1), 39-59.

Gravemeijer, K. & Prediger, S. (2016). Topic-Specific Design Research: An Introduction. Kaiser, G. & Presmeg,. *Compendium for Early Career Researcher in Mathematics Education.* 33-57. Hamburgo, Alemania: ICME-13.

Gomes, S. (2013). Teaching trigonometry using an historical approach: an educational product. *Bolema, Boletim de Edecação Matemática,27*(46), 563-577.

Harel, G. (2010) DNR-Based Instruction in Mathematics as a Conceptual Framework. In: Sriraman B., English L. (eds). *Theories of Mathematics Education*. Advances in Mathematics Education. 343-367.

Ministerio de Educación Nacional (MEN). (2006). *Estándares Básicos de Competencias.* Bogotá, Colombia: Imprenta Nacional de Colombia.

Ministerio de Educación Nacional (MEN). (2016). *Derechos Básicos de Aprendizaje.* Bogotá, Colombia: Panamericana formas e impresos S.A.

Ministerio de Educación Nacional (MEN). (2016). *Matrices de referencia.* Bogotá, Colombia: Panamericana formas e impresos S.A.

Moreno, L. (2018). La geometría en el mundo moderno. Revista Praxis, Educación y Pedagogía. 2, 96-123.

Polya, G. (1965). *Cómo plantear y resolver problemas*. México: Trillas. 215 pp.

Real, M. (2013*). Las TIC en el proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas*. Jornadas de Innovación docente. Facultad de Matemáticas. Universidad de Sevilla.

Santaló, L.A. (1981), *Enseñanza de la matemática en la escuela media*. Buenos Aires: Docencia.

Schroeder, T. & Lester, F. (1989). Developing Wlderstanding in mathematics via problem solving. In P.R. Trafton (Ed) *New directions for elementary school mathematics*, 1989 Yearbook of the National Council of Teachers of Mathematics. pp 31-42. Reston, VA: NCTM.