VOL 34, NÚMERO 2, AÑO 2021

DIFICULTADES DE ALUMNOS DE TELESECUNDARIA AL OBTENER PROPIEDADES ENTRE PUNTOS ALINEADOS EN EL PLANO EUCLIDIANO

DIFFICULTIES OF TELE-SECUNDARY STUDENTS WHEN OBTAINING PROPERTIES BETWEEN POINTS ALIGNED ON THE EUCLIDIAN PLANE

Vicente Carrión Miranda, Gabriela Legorreta Velázquez
Departamento de Matemática Educativa del Cinvestav del IPN, (México)
vcarrion@cinvestav.mx, gabriela.legorreta@cinvestav.mm

Resumen
Se investigan los desempeños y producciones de un grupo de alumnos de primer grado de telesecundaria, basados en actividades que muestran la forma en que abordan algunos conceptos geométricos para encontrar propiedades surgidas de la semejanza de triángulos para obtener propiedades de colinealidad de puntos del plano. Se indagan causas que originan que los alumnos cometan algunos errores al realizar actividades matemáticas sobre la colinealidad de puntos utilizando los conceptos de semejanza y proporcionalidad. Del análisis de las respuestas de las preguntas se obtuvieron conclusiones sobre dificultades, errores y aciertos relacionados con aspectos cognitivos relevantes de la investigación.

Palabras clave: semejanza de triángulos, proporcionalidad, colinealidad de puntos

Abstract
The performances and productions of a group of tele-secondary first-year students are researched based on activities that show how they approach some geometric concepts to find properties arising from the similarity of triangles in order to obtain collinearity properties of points in the plane. The causes that lead students to make some mistakes when carrying out mathematical activities on the collinearity of points using the concepts of similarity and proportionality are also researched. From the analysis of the answers to the questions, conclusions were obtained about difficulties, errors and successes related to relevant cognitive aspects of the research.

Key words: similarity of triangles, proportionality, collinearity of points

Introducción

La evolución de las diferentes civilizaciones ha requerido del uso de una variedad de propiedades asociadas al tema de la recta. Múltiples situaciones que diariamente ocurren en actividades sociales y en contenidos tratados en las ciencias se basan en este concepto. Son ejemplos de la física la velocidad, la aceleración, la densidad y la presión; si estos conceptos son constantes. Análogamente, existen conceptos dentro de la misma matemática definidos como cocientes de números reales, o como cocientes de diferencias de números reales. Están estrechamente relacionados con la proporcionalidad directa y con la pendiente de una recta. Lo anterior es razón suficiente para valorar la importancia que tienen la recta y sus propiedades para que, con un tratamiento adecuado, se incluyan en los programas de estudio de secundaria.

El objetivo del trabajo que se expone es indagar la forma en que alumnos de telesecundaria aprenden algunas propiedades que intervienen en la determinación de la colinealidad puntos del plano mediante propiedades de semejanza de triángulos. Se pretende encontrar cómo utilizan conceptos aritméticos y geométricos preliminares para precisar por qué una colección de puntos del plano se encuentra sobre una recta y, recíprocamente, cómo trasladar puntos del plano de manera que estén sobre una recta. También, saber cuáles son las causas inmediatas que originan que los alumnos cometan algunos errores al realizar actividades matemáticas que proponen la intervención de propiedades de la colinealidad de puntos.

Marco Teórico

De manera general, el enfoque teórico del trabajo se fundamenta en la teoría de sistemas semióticos de representación (Duval, 1999), tomando en cuenta aspectos relevantes de su teoría. Una forma de establecer interrelaciones entre objetos matemáticos es con el uso de signos y representaciones ante la imposibilidad de ser accesibles sólo por medios tangibles (Duval, 2006). Sin embargo, el interés no sólo está en indagar la forma en que se interrelacionan objetos matemáticos presentados en diferentes representaciones, sino en los procesos cognitivos participantes en la adquisición del conocimiento matemático por parte de los alumnos cuando realizan actividades previamente diseñadas.

Duval, R. (1999), afirma que en las actividades cognitivas se necesitan utilizar sistemas de expresión y representación diferentes al lenguaje natural, otros sistemas de escritura y notaciones simbólicas para los objetos. Son lenguajes paralelos al lenguaje natural como las escrituras algebraica y lógica, para expresar las relaciones y las operaciones, figuras geométricas, gráficas cartesianas y diagramas.

Las representaciones semióticas presentan carácter intencional, cumplen una función de objetivación y un descubrimiento del mismo sujeto de algo que hasta entonces no presuponía. Así, su carácter intencional es el papel fundamental de la significación en la determinación de los objetos que pueden ser observados por un sujeto. Además, a través de una presente significación se hace una aprehensión perceptiva o conceptual del objeto. Por otro lado, las representaciones son externas porque cumplen funciones de comunicación, adquisición de realidad objetiva y de tratamiento. De este modo, los registros de representación son externos y fomentan la reflexión y existe una intencionalidad previa para que estén presentes. Esto conduce a considerar los dos conceptos: semiosis, aprehensión o producción de una representación semiótica y noesis, actos cognitivos como la aprehensión conceptual de un objeto. Otro aspecto fundamental por señalar es que los distintos registros de representación se diferencian no sólo por la naturaleza de sus significantes sino por el sistema de reglas y por el número de formas en que puede efectuarse la asociación de elementos que intervienen en la formación y utilización de las diferentes formas de representación.

Las actividades cognitivas fundamentales en el empleo de varios registros de expresión para un concepto matemático, inherentes a la semiosis, son las siguientes: *a*) la presencia de una representación identificable, *b*) el tratamiento de los elementos internos de esa representación, o sea, la transformación de la representación dentro del mismo registro y *c*) la conversión de una representación incluida en un registro en otra representación de otro registro en la que se conserva el significado de la representación inicial (Duval, 1999).

¿Por qué utilizar varias representaciones y cuál es el interés de esta diversidad de registros para el funcionamiento del pensamiento humano? La existencia de varios registros posibilita interrelacionar entre los elementos que conforman cada registro y la interacción de sus elementos entre uno y otro. Ese cambio favorece efectuar los tratamientos de una manera consistente. El lenguaje no ofrece las mismas posibilidades de representación que una figura o que un diagrama. Toda representación es cognoscitivamente parcial con referencia a lo que representa y, por lo general, en el establecimiento de relaciones entre elementos equivalentes de dos registros no siempre son representados los mismos aspectos de contenido. La conceptualización implica una coordinación de representaciones. Si el registro de representación es elegido correctamente, otras representaciones de ese registro son suficientes para permitir la comprensión del contenido conceptual representado. Esto parece justificarse por la estructura misma de la representación (Duval, 1999). Por ejemplo, en geometría es necesario combinar el uso de, al menos, dos sistemas de representación, uno para la expresión verbal de propiedades o para la expresión numérica de magnitud y el otro para la visualización. Una figura geométrica siempre asocia representaciones tanto discursivas como visuales.

Es necesario relacionar estrechamente las investigaciones en matemática educativa con la práctica docente. Es un fundamento para establecer relaciones que consoliden una práctica educativa reflexiva en el docente, orientada a tomar decisiones fundamentadas para establecer un proceso dialéctico adecuado entre la práctica y la teoría, involucrando logros surgidos de la investigación en esta disciplina. Los profesores tienen la responsabilidad de crear un entorno que conduzca a desarrollar la comprensión de los conceptos matemáticos y a formular hipótesis a partir de las construcciones conceptuales de los alumnos, teniendo en cuenta las posibles estrategias didácticas para mejorar esas construcciones, Malara (2002).

En México la Secretaría de Educación Pública incluye en el Modelo Educativo para la Educación Obligatoria las siguientes variantes: Secundaria General, Secundaria Técnica y Telesecundaria. La característica esencial de la Telesecundaria, modalidad donde se realiza la investigación, es que un profesor, como mediador, se responsabiliza de todas las asignaturas de un grupo de alumnos de un mismo grado escolar (SEP, 2018). Antes, se utilizaron los modelos de telesecundaria 1993 y 2006 donde se asentaron las bases consideradas en el modelo 2018.

En la investigación se utilizan instrumentos impresos que fundamentados en los contenidos matemáticos concernientes a las propiedades geométricas que subyacen en puntos alineados. Los alumnos desarrollan las actividades utilizando diversas formas de expresión: geométrica y numérica, mediadas por la lengua natural escrita.

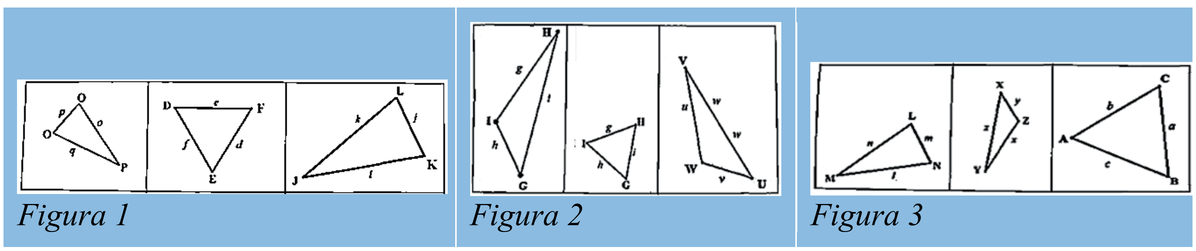
Metodología

Como ha quedado establecido, con la investigación se pretende indagar los procesos cognitivos y las formas en que veinticuatro alumnos de una escuela, modalidad telesecundaria, interrelacionan y emplean algunos de los siguientes conceptos geométricos para determinar propiedades que deben tener colecciones de puntos del plano que se encuentran sobre rectas: paralelismo, perpendicularidad, proporcionalidad y semejanza de triángulos. En otras palabras, la investigación consistió en examinar los desempeños de los alumnos, basados en las realizaciones de actividades que muestran la forma en que encuentran y utilizan propiedades de puntos. Del análisis de las respuestas de los reactivos incluidos en los instrumentos aplicados, de las explicaciones surgidas de la entrevista de un alumno y de las videograbaciones individuales y de grupos pequeños se obtuvieron conclusiones sobre las dificultades, errores y aciertos en las actuaciones de los alumnos, relacionadas con aspectos cognitivos, relevantes para la investigación. Además, se pretende investigar comportamientos de los alumnos sobre los procesos cognitivos que ponen en práctica para establecer correspondencias entre los elementos conceptuales incluidos en las actividades cuando se expresan en las formas verbal, geométrica y aritmética.

En la investigación se utiliza una metodología de carácter cualitativo. Se propusieron varias sesiones de clase en el aula, se aplicó un cuestionario de diagnóstico y otro para identificar los aprendizajes adquiridos después de un proceso de enseñanza. Se realizó una entrevista con un alumno y se hicieron videograbaciones individuales y de grupos pequeños. Las acciones anteriores condujeron a tener la información siguiente: *a*) saber el nivel de conocimientos preliminares individualmente de los alumnos, *b*) conocer la base común de saberes preliminares de los participantes en la indagación para tomarla en cuenta en el diseño de los instrumentos de investigación y *c*) realizar indagaciones sobre los procesos cognitivos y las formas en que aprenden y utilizan algunas propiedades de colecciones de puntos del plano que están sobre rectas, con base en relaciones métricas de ángulos, de segmentos de recta y conceptos geométricos asociados a la proporcionalidad.

Las actividades se basaron en nueve triángulos de diferentes clases trazados en diferentes posiciones, *figuras 1*, *2* y *3*.

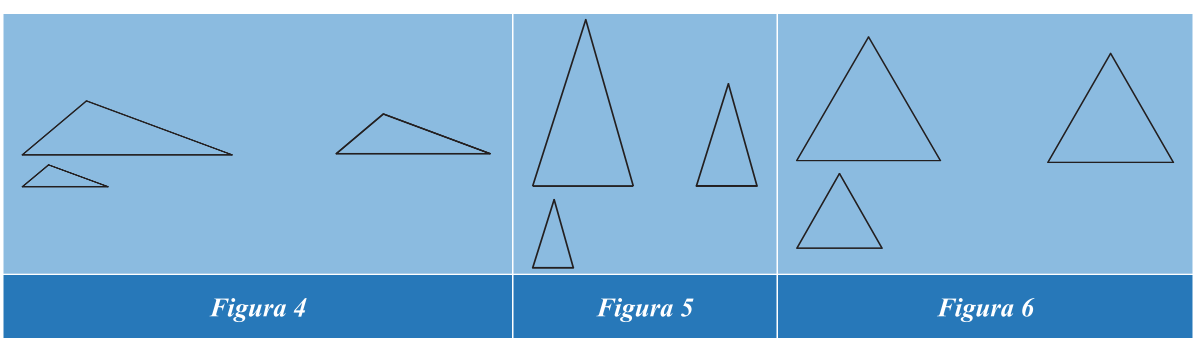
Figura 1, 2 y 3. *Triángulos y posiciones.*



Elaboración de los autores.

Los alumnos obtuvieron tres grupos de tres triángulos; cada grupo se formó con triángulos semejantes. Los clasificaron de acuerdo con la medida de sus lados, tres equiláteros, tres isósceles y tres escalenos. Utilizando regla y compás trazaron otra colección de triángulos congruentes con los que se les propusieron inicialmente. Los ordenaron del más pequeño al de mayor tamaño, de tres en tres, de acuerdo con la semejanza. Colocaron el lado de mayor medida en forma horizontal, la base del triángulo, *figuras 4*, *5* y *6*. Asignaron letras mayúsculas a los vértices y letras minúsculas a los lados, siguiendo el orden positivo: en forma contraria al movimiento de las manecillas de un reloj.

Figura 4, 5 y 6. *Clasificación de Triángulos.*



Elaboración de los autores.

Enseguida, trazaron los triángulos superponiéndolos, coincidiendo uno de sus vértices y los lados que concurren en el vértice común quedan colocados sobre dos rectas que se intersecan en ese mismo vértice. Algunos alumnos recortaron los triángulos, los superpusieron convenientemente y, después, los dibujaron. Tres vértices de cada triángulo, y otros tres por separado, están alineados. Los tres lados correspondientes restantes son paralelos, *figuras 1, 2* y *3*.

Figura 7 y 8. *Líneas paralelas en el triángulo.*

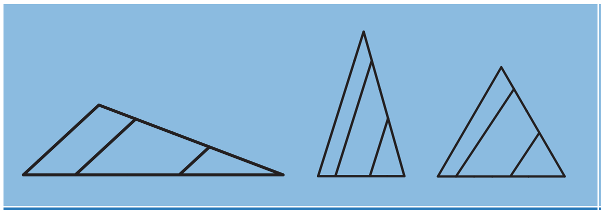


Figura 7

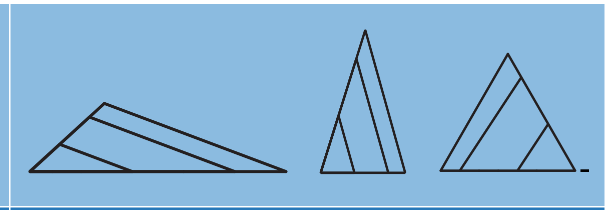


Figura 8

Elaboración de los autores.

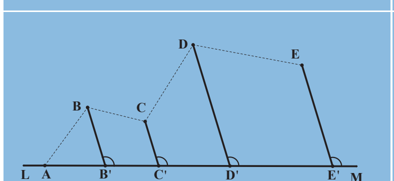
Se espera que algunas de las respuestas de los alumnos sobre este tema queden incluidas en la lista de propiedades expuesta enseguida.

a) Se tienen tres parejas de triángulos semejantes.
b) Se determinan seis parejas de rectas paralelas intersecadas por una transversal con todas las propiedades de pares de ángulos inherentes a estas configuraciones.
c) Cada configuración de tres triángulos, en todos los casos, tiene un vértice común.
d) Sobreponiendo los triángulos convenientemente los lados opuestos al vértice común son paralelos.
e) Las dos tercias de lados que se superponen quedan sobre dos rectas que se intersecan el vértice común. Esto significa que las dos ternas posibles de lados concurren en un punto.
f) Los dos extremos de los tres lados superpuestos, en cada caso, se encuentran en una misma recta.

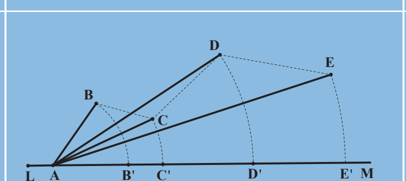
Un aspecto relevante relacionado con la alineación de puntos es establecer formas de llevar a una recta una colección de puntos ubicados en cualquier posición. Al menos uno de los puntos no debe pertenecer a la recta. No todos los puntos pueden pertenecer a la recta propuesta. En los tres casos de la *figura 9* sólo un punto está sobre la recta. Se presentan varias maneras de llevar varios puntos a una recta. Primeramente, hay que precisar las transformaciones y propiedades geométricas que sustentan los cambios de puntos.

Figura 9. *Transformaciones y propiedades de los cambios de puntos.*

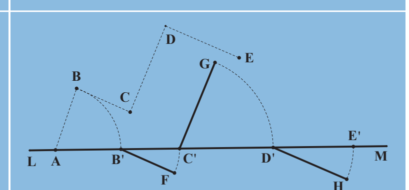
Traslación de puntos construyendo ángulos correspondientes de una misma medida, *figura 9*, (*a*).	Construcción que preserva las distancias de uno de los puntos dados a cada uno de los otros puntos, *figura 9*, (*b*).	Construcción que preserva las distancias entre cada par de puntos consecutivos, *figura 9*, (*c*).



(*a*)



(*b*)



(*c*)

Figura 9

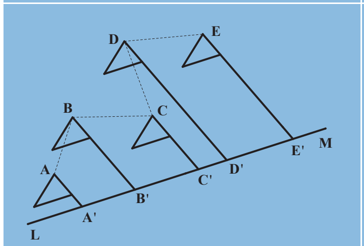
Elaboración de los autores.

Se traza un triángulo cualquiera donde uno de sus vértices es uno de los puntos dados; además, uno de sus lados es paralelo a la recta dada, o está sobre la misma recta.

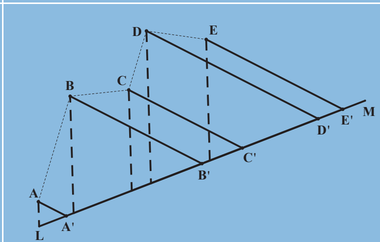
Figura 10. *Transformaciones y propiedades de los cambios de puntos*

.

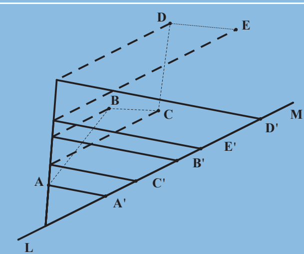
Se traslada este triángulo a cada uno de los puntos y se prolonga uno de los lados paralelos de cada triángulo y las intersecciones con la recta dada son los puntos que corresponden al planteamiento inicial, *figura 10*, (*a*).	Por cada uno de los puntos dados se trazan rectas paralelas a uno de los lados del triángulo base. Las intersecciones de estas paralelas con la recta inicial son los puntos solución de la situación planteada, *figura 10*, (*b*).	Se traza una recta no paralela a la inicial. Por cada punto dado se trazan paralelas a esta recta. Por cada intersección de estas rectas con la primera se trazan paralelas a otro lado del triángulo base. Las intersecciones de las paralelas con la recta inicial son los puntos buscados, *figura 10*, (*c*).



(*a*)



(*b*)



(*c*)

Figura 10

Elaboración de los autores.

Desempeño de los alumnos

Una vez que los alumnos superpusieron los triángulos y midieron cada uno de los lados y encontraron las razones de proporcionalidad. A continuación, se muestra una parte de la entrevista realiza al alumno Daniel, *figura 11*.

Figuras 11 y 12. *Entrevista realizada a Daniel.*

Profesor: ¿Qué figura es?, ¿cómo está formada?, ¿para qué te ha servido?
Daniel: Bueno, pues este es un triángulo escaleno porque nos damos cuenta de que este lado es diferente a éste, no tiene las mismas medidas, todos sus lados son desiguales.
Daniel: Otra es que tenemos tres triángulos sobrepuestos. Aquí encontramos el triángulo… a ver. Está así:

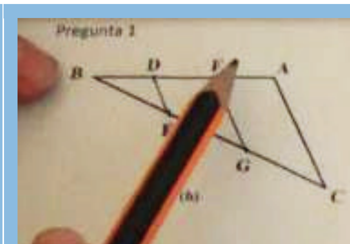


Figura 11

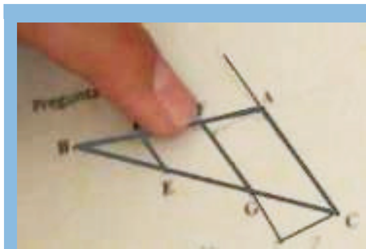


Figura 12

Encontramos el triángulo más pequeño, **BED**, el mediano es **BGF** y el más grande es **BCA** y nos damos cuenta de que estos tres triángulos tienen la misma medida, pero en ángulos: este… éste es correspondiente a éste y a éste. Si tuviéramos una recta así, y así, tenemos ángulos correspondientes en estas tres paralelas de aquí, estas son paralelas. Los puntos están alineados en dos de los lados y los lados correspondientes de los tres triángulos son paralelos.

Fuente: Entrevista a Daniel, fotografías obtenidas por los autores.

Al dibujar los triángulos superpuestos, la mayoría no lo hizo en forma correcta. Algunos no utilizaron instrumentos geométricos. Hicieron a mano los trazos. Esto ocasionó que no pudieran realizar las mediciones en forma precisa y que no contestaran las preguntas como fueron planteadas, a partir de las figuras realizadas por ellos mismos *figuras 13*, *14* y *15*.

Figuras 13, 14 y 15. *Elaboraciones realizadas por los estudiantes respecto a los triángulos.*

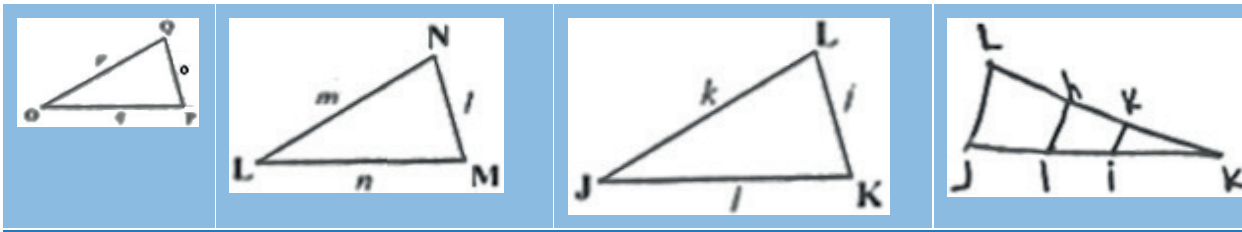


Figura 13

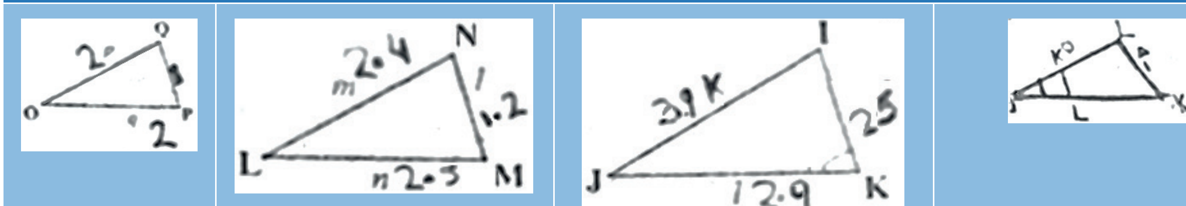


Figura 14

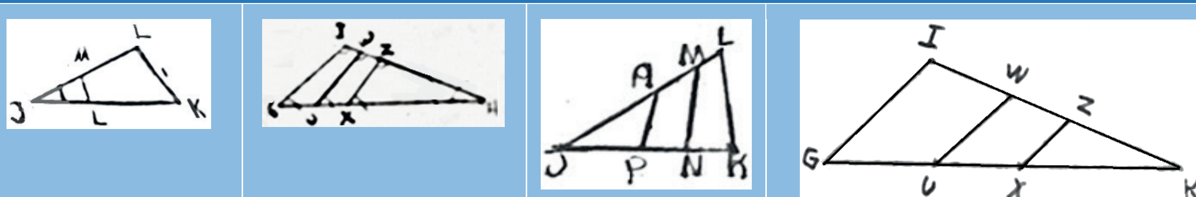
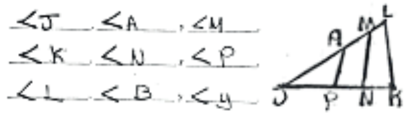


Figura 15

Fuente: Elaboración de los estudiantes.

La mayoría respondió bien al solicitarles que escribieran los ángulos de los triángulos de la *figura 7* que son de una misma medida, ángulos correspondientes; sin embargo, hubo varios casos que no contestaron correctamente. Una causa fue el desconocimiento de las propiedades de las relaciones métricas entre ángulos determinados por dos paralelas intersecadas por una recta transversal o por no trazar los dibujos con precisión, *figura 16*.

Figura 16. *Representación de los estudiantes.*

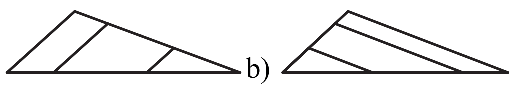


Fuente: Elaboración de los estudiantes.

Cuando dibujaron los triángulos superpuestos todos los alumnos eligieron por vértice común el que está frente al ángulo de menor medida. Entonces los lados paralelos son los lados de menor longitud de los triángulos, *figura17*, (*a*). Ninguno utilizó un dibujo como el de la *figura17*, (*b*), donde los lados paralelos de los triángulos son los lados de mayor longitud.

Figura 17. *Representación esperada de los estudiantes*.

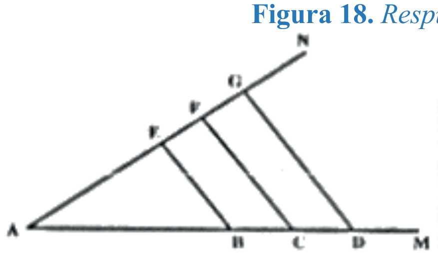
a) b)



Elaboración de los autores.

Una actividad consistió en medir longitudes segmentos de recta incluidos en los diagramas de triángulos superpuestos. Muy pocos respondieron en forma correcta, *figura 18*.

Figura 18. *Respuestas de los estudiantes.*



AD = 5.7 cm.	AC = 4.7 cm.	AB = 3.6 cm.
AG = 9.1 cm.	AF = 3.7 cm.	AE = 2.8 cm.
FG = 0.9 cm.	CD = 1.1 cm.	EF = 0.9 cm.
BC = 1.1 cm.	EG = 1.8 cm.	BD = 2.2 cm.

Elaboración de los autores.

Figura 19. *Elección de unidad de medida de los estudiantes.*

Todos los participantes eligieron al centímetro como unidad de medida. Sólo uno consideró al metro como unidad para expresar las medidas de los lados de los triángulos o para las longitudes de segmentos de recta incluidos en las configuraciones geométricas, *figura 19*.

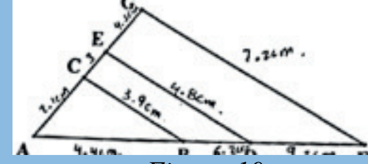
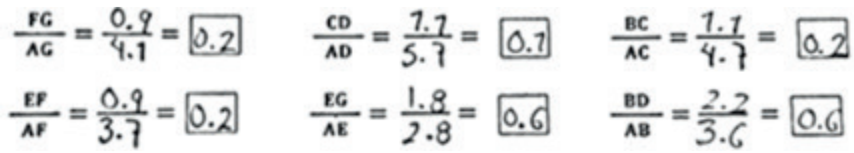


Figura 19

Elaboración de los autores.

Después, encontraron razones para establecer relaciones de proporcionalidad que llevan a explicar la colinealidad de puntos.

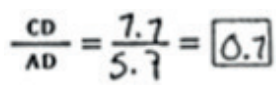
Figura 20. *Respuestas de los estudiantes.*



Elaboración de los autores.

Está presente en todos los alumnos desconocimiento de la aproximación de números decimales, al operarlos y al presentar los resultados Sólo utilizan la aproximación por corte de cifras. Sólo lo hacen para reducir el número de cifras decimales, sin conocer las reglas de aproximación. Desconocen la aproximación por redondeo. Además, utilizan diferentes números de decimales dentro de un mismo proceso de cálculo. La expresión siguiente, que por unos milésimos es 0.2, al hacer el corte en la segunda cifra decimal, aproximan el resultado a 0.1 y esto hace se desestabilice la regularidad que presentan los otros valores encontrados. El cociente 1.1/5.7 es igual a 0.1929824561… y la aproximación más conveniente es, por redondeo, 0.2. El alumno, por corte, eligió 0.1.

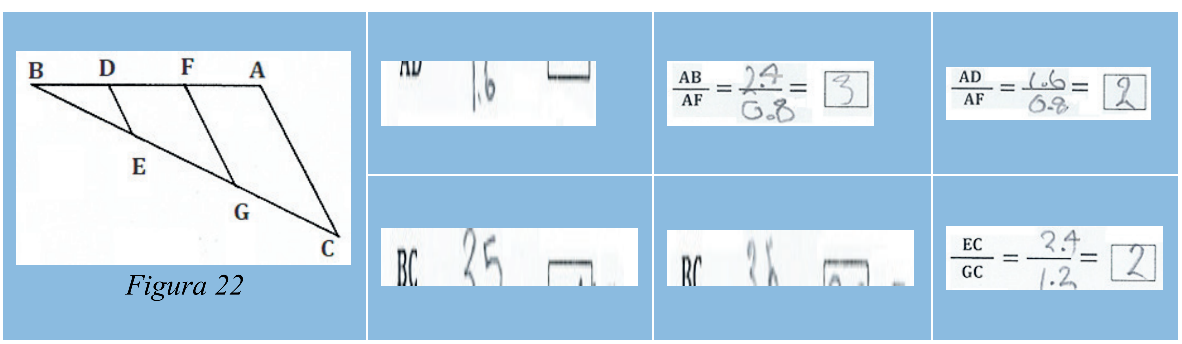
Figura 21. *Respuestas de los estudiantes.*



Elaboración de los autores.

Al obtener las siguientes razones se ve que una alumna calcula cocientes de números decimales y los expresa con números enteros, con decimales finitos y con decimales infinitos. En los resultados numéricos correspondientes a la *figura 22* se observa que utiliza la notación para representar números decimales periódicos, $2.96\overline{6}$.

Figura 22. *Respuestas de los estudiantes*



Elaboración de los autores.

Se les exhortó a que encontraran todas las propiedades y relaciones posibles en las razones numéricas obtenidas. Algunas respuestas son las siguientes. Algunas son respuestas equivocadas, otros, se aproximaron a alguna propiedad expresada en forma correcta. Relacionaron los resultados con la proporcionalidad, el paralelismo de lados de triángulos, medidas de ángulos; sin embargo, muy pocos alumnos relacionaron estos conceptos con la colinealidad de puntos.

Figura 23. *Respuestas de los estudiantes*

¿Qué relaciones encuentras en las razones numéricas que has obtenido?

Qué van siendo proporcionales por que hay una constante de proporcionalidad por que son parecidos algunas razones se aproximano hasta incluso son las mismas razones del mismo resultados.	En el tema se incluyen fracciones, proporcionalidad, angulos, ángulos entre paralelos, longitudes, segmentos, lados, correspondientes.
Que unos son constantes de proporcionalidad o unos se acercan a ser proporcionales por los cocientes	que en las seis razones las cantidades son diferentes pero se aproximan
pues que dan diferente resultado pero tanto como en la primera columna y tanto como en la segunda columna se aproximan los resultados. también que estamos trabajando con paralelas, fracciones y otras y otros elementos más.	en este ejercisio en este tema e visto que si se encuentra paralelismo en los triangulos sobrepuestos tiene propursionalidad es decir tiene un patron

Elaboración de los autores.

En vista de que en las actividades anteriores los alumnos no explicaron las razones básicas para que un conjunto de puntos esté sobre una recta, explícitamente, se les propusieron dos reactivos adicionales. En el primero se pide que expliquen por qué cuatro puntos que se les proponen no son colineales. En el segundo reactivo se pide que expliquen por qué cuatro puntos dados son colineales. Algunas respuestas son las siguientes.

Figura 24. *Respuestas de los estudiantes.*

Se les pidió escribir las propiedades que encuentren en los triángulos de la *figura 23*.

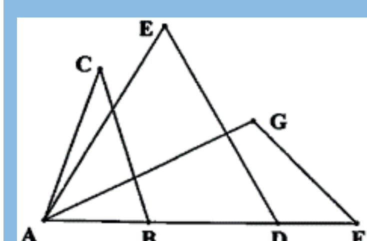


Figura 23

Que tienen en comun el punto A que los puntos A, B, D, F están en una línea recta.

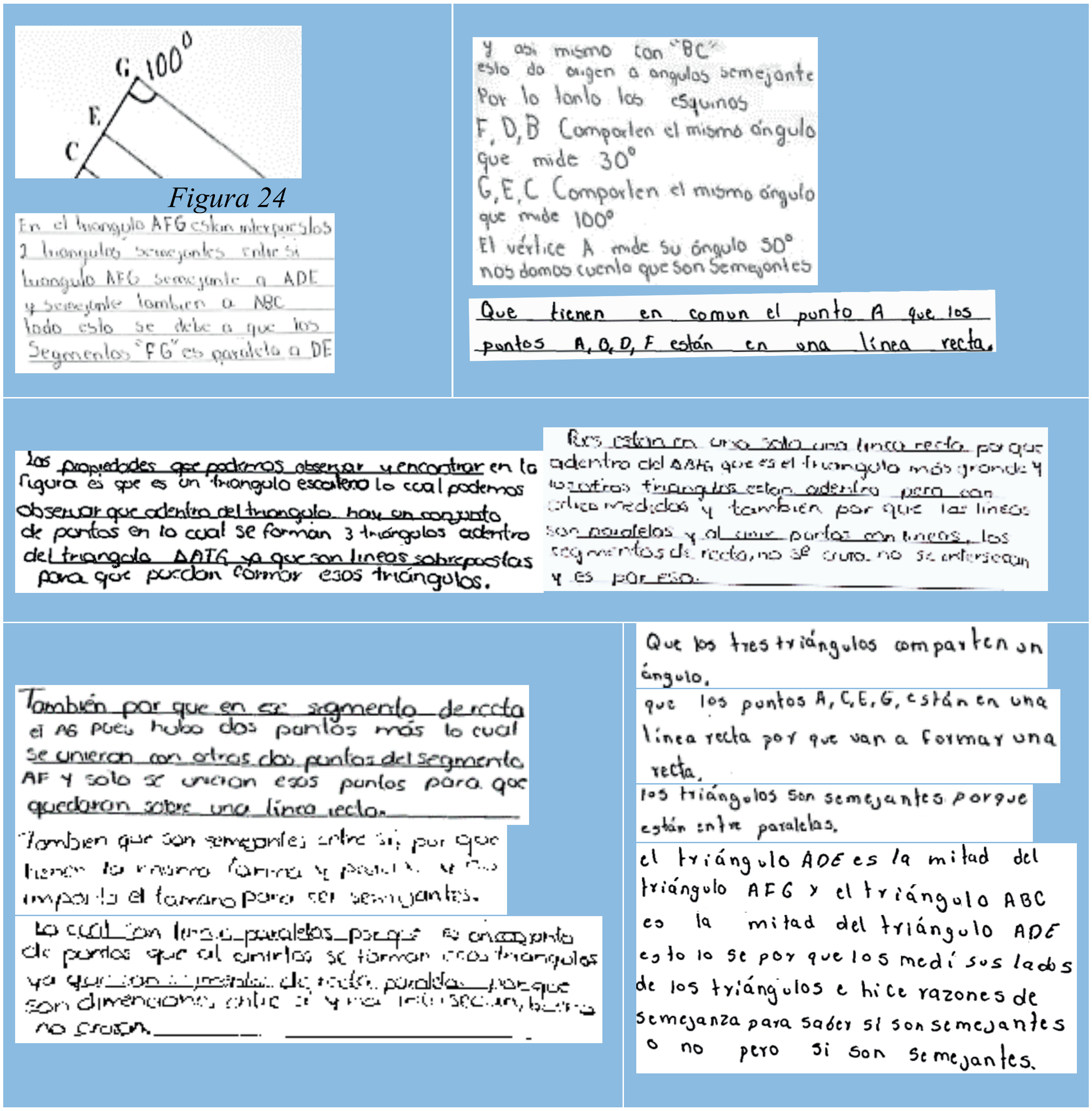
También se les solicita que expliquen por qué los puntos **A**, **C**, **E** y **G** no están en una recta. Una respuesta fue la siguiente:

Por que los triángulos no tienen los mismos ángulos y medidas y no tienen la misma forma por eso los puntos no están alineados

Elaboración de los autores.

Finalmente, con base en la *figura 24* se les propusieron las mismas preguntas de la *figura 23*.

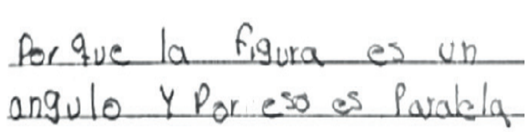
Figura 25. *Respuestas de los estudiantes.*



Elaboración de los autores.

Un respuesta elocuente para explicar el paralelismo de los lados de los triángulos es la siguiente:

Figura 26. *Respuestas de los estudiantes.*



Elaboración de los estudiantes.

Resultados

Ocho participantes tuvieron bajo desempeño en las actividades académicas por sus inasistencias constantes porque no asisten regularmente a clases. El 33.3% de los alumnos contestaron correctamente los contenidos del cuestionario preliminar. El 29.1% dieron respuestas aproximadas basados en propiedades de triángulos. El 37.5% contestó de manera incorrecta, con respuestas ajenas a lo solicitado. Al encontrar las relaciones existentes entre los ángulos formados por dos rectas paralelas intersecadas por una transversal el 33.3% contesta correctamente la mayoría los reactivos propuestos; el 25% los contesta en forma aproximada; y el 41.6% presenta confusión. Al obtener propiedades sobre proporcionalidad entre los lados de cada triángulo, el 41.6% mostró conocimiento correcto del tema, mientras que el 33.3% tuvieron errores aritméticos. En general, un poco más de la mitad de los alumnos encontró que la semejanza de triángulos se relaciona directamente con el paralelismo de los lados y con la igualdad de razones entre las longitudes de los lados. Con relación a las propiedades de colecciones de puntos se observó que todos los estudiantes tienen dificultades para explicar por qué un conjunto de puntos está en una línea recta.

Algunos evadieron las indicaciones, otros, dieron explicaciones triviales utilizan lenguaje verbal sin recurrir a justificaciones dentro de lineamientos geométricos o aritméticos. Los que intentaron mejores acercamientos lo hicieron de manera imprecisa. Todos los participantes presentan dificultades para expresar los conceptos geométricos con orientaciones relacionadas directamente con la asignatura. Finalmente, los pocos alumnos que llevaron puntos del plano dispuestos en diversas posiciones a una recta sólo lo hicieron trasladándolos sin seguir un procedimiento que se justifique geométricamente. Sólo “arrastran” irregularmente los puntos explicando los movimientos con recursos verbales.

Conclusiones

De lo antes expuesto surgen dos reflexiones, una se relaciona con el uso de los conceptos matemáticos que han incorporado los alumnos y, otra, con las formas que tienen para apropiarse de nuevos conceptos, poniendo en juego los conocimientos adquiridos. Estas reflexiones favorecen obtener las siguientes conclusiones.

Partiendo de la importancia del concepto de recta, sus aplicaciones en actividades cotidianas, en ciencia y dentro de la misma matemática, se hace necesario que, desde los niveles escolares básicos, se incorpore convenientemente su estudio.

Toda vez que se estudian los conceptos ligados a propiedades de puntos alineados es necesario que el alumno entienda bien la base de conceptos matemáticos involucrados en proposiciones relativas al tema. Igualmente, se requiere dar la misma atención a los recíprocos de estas proposiciones para saber dónde utilizarlas y cómo hacerlo. Asimismo, conviene, y se necesita, que los alumnos formen estructuras sencillas con los conocimientos matemáticos porque se propicia, por un lado, entender cabalmente las ideas y, por otro, darle un atinado uso a la base de conceptos, al conformar y organizar un cuerpo de conceptos básicos para afrontar y resolver problemas sencillos.

Los resultados de las respuestas de las actividades manifiestan que les hace falta información sobre conceptos preliminares. Existe heterogeneidad en la interpretación de los conceptos matemáticos.

En pocos alumnos no se observó la comunicación esperada porque es difícil la interrelación con sus compañeros en trabajo colaborativo: En la mayoría se logró uniformar un poco la interpretación de los conceptos. Esto se debió al intercambio de ideas por trabajar colaborativamente en grupos pequeños.

Con relación a las causas que dan origen a los errores cometidos por los alumnos al establecer y emplear propiedades de colinealidad de puntos, a partir de triángulos semejantes, utilizando la proporcionalidad, se observó que hace falta interpretar correctamente el teorema de Tales y su recíproco y las proposiciones sobre ángulos incluidos en dos paralelas intersecadas por una transversal. Lo anterior conduce a no poder usar estos conceptos para explicar por qué un conjunto de puntos está en una recta o cómo utilizarlos para llevar puntos del plano a una recta.

Referencias

Duval, R. (1999). Semiosis y pensamiento humano. Registros semióticos de aprendizajes intelectuales. Cali, Colombia: Universidad del Valle.

Duval, R. (2006) Un tema crucial en la educación matemática. La habilidad para cambiar el registro de representación Duval, R. (2006) Localización: Gaceta de la Real Sociedad Matemática española, ISSN 1138-8927, Vol. 9, Nº 1, 2006, págs. 143-168.

Malara, N. A., & Zan, R. (2002). The problematic relationship between theory and practice. In L. English (Ed.), Handbook of international research in mathematics education (pp. 553– 580). Mahwah, NJ: Erlbaum.

SEP (2018). Matemáticas Primer grado. Telesecundaria, 2018. Ciudad de México. Secretaría de Educación Pública. https://telesecundaria.sep.gob.mx/. Consultada septiembre 2018.